Universidad de Cantabria
Departamento de Ing. Estructural y Mecánica

Capitulo II

II.3 Estudio del mecanismo cuadrilátero articulado

Capítulo II
Movimiento plano

II.1 Aspectos generales del movimiento plano.
II.2 Teoría de la curvatura.
II.3 Estudio del mecanismo cuadrilátero articulado.

1. Importancia del mecanismo cuadrilátero articulado.
2. Rotabilidad: Criterio de Grashof.
3. El problema de posición inicial.
4. Curvas de acoplador.
5. Puntos dobles, cúspidales y ciclicos.

Capítulo II: Tema 3
Estudio del mecanismo cuadrilátero articulado

1. Importancia del mecanismo cuadrilátero articulado.
2. Rotabilidad: Criterio de Grashof.
   1. Rotabilidad.
   2. Condiciones de rotabilidad.
   3. Casos de estudio.
   4. Enunciado del Criterio de Grashof.
   5. Conclusiones.
3. El problema de posición inicial.
4. Curvas de acoplador.
   1. Curvas de acoplador en ecuaciones paramétricas.
   2. Curvas de acoplador en ecuaciones cartesianas.
   3. Propiedades generales de las curvas de acoplador.
5. Puntos dobles, cúspidales y cíclicos.
   1. Puntos dobles.
   2. Puntos cúspidales.
   3. Puntos cíclicos.

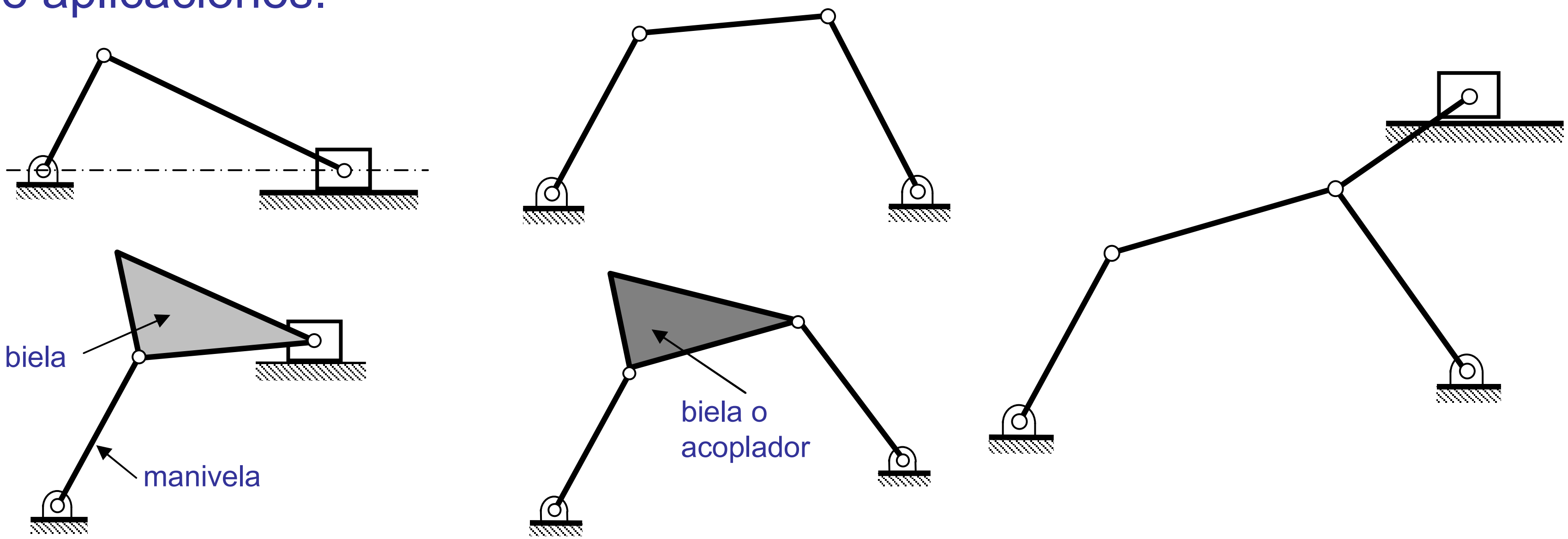
Capítulo II: Tema 3
Estudio del mecanismo cuadrilátero articulado

1. Importancia del mecanismo cuadrilátero articulado.

Importancia del mecanismo cuadrilátero articulado

Desde muy antiguo el mecanismo biela-manivela junto al mecanismo cuadrilátero articulado han sido las soluciones más empleados para la resolución de problemas cinemáticos.

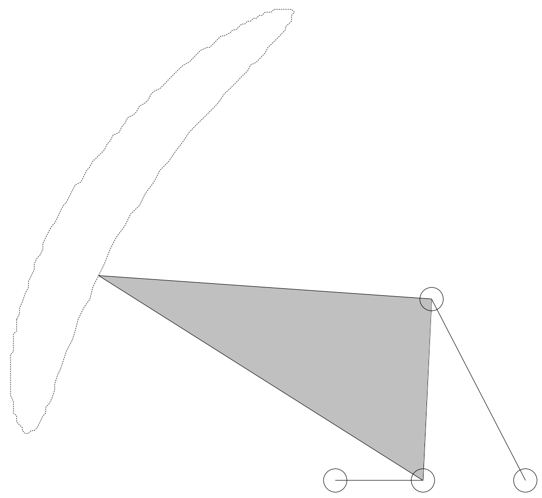
Independientemente o combinados pueden generar multitud de trayectorias y funciones, característica que junto a su relativa sencillez hacen que sigan siendo los mecanismos más empleados en multitud de aplicaciones.



Importancia del mecanismo cuadrilátero articulado

Aunque el mecanismo biela-manivela tiene un gran número de aplicaciones, presenta bastantes limitaciones cuado se quiere conseguir trayectorias complejas. En este caso el mecanismo cuadrilátero articulado puede ser mucho más útil.

Se puede establecer que una barra gire vueltas completas con respecto a otra, lo que supone que pueda conectarse un motor rotativo para generar movimiento.



Además, este mecanismo sólo tiene pares de revolución, muy sencillos de obtener técnicamente.

Capítulo II: Tema 3

2. Rotabilidad: Criterio de Grashof.
    1. Rotabilidad.
    2. Condiciones de rotabilidad.
    3. Casos de estudio.
    4. Enunciado del Criterio de Grashof.
    5. Conclusiones.

Rotabilidad

El estudio del rango de movimientos de un mecanismo es una parte fundamental del análisis cinemático. En general es un problema complejo, ya que es fuertemente no lineal.

El estudio de la rotabilidad implica estudiar la capacidad de que una barra de un mecanismo de vueltas completas alrededor de un punto. La importancia radica en que normalmente es un motor (eléctrico, combustión, etc.) el que aplica el movimiento al mecanismo y, por tanto, es necesario que la barra conectada al motor gire vueltas completas alrededor del eje de dicho motor.

Rotabilidad

En el caso particular del mecanismo cuadrilátero articulado se puede estudiar la rotabilidad de las barras de forma sencilla.

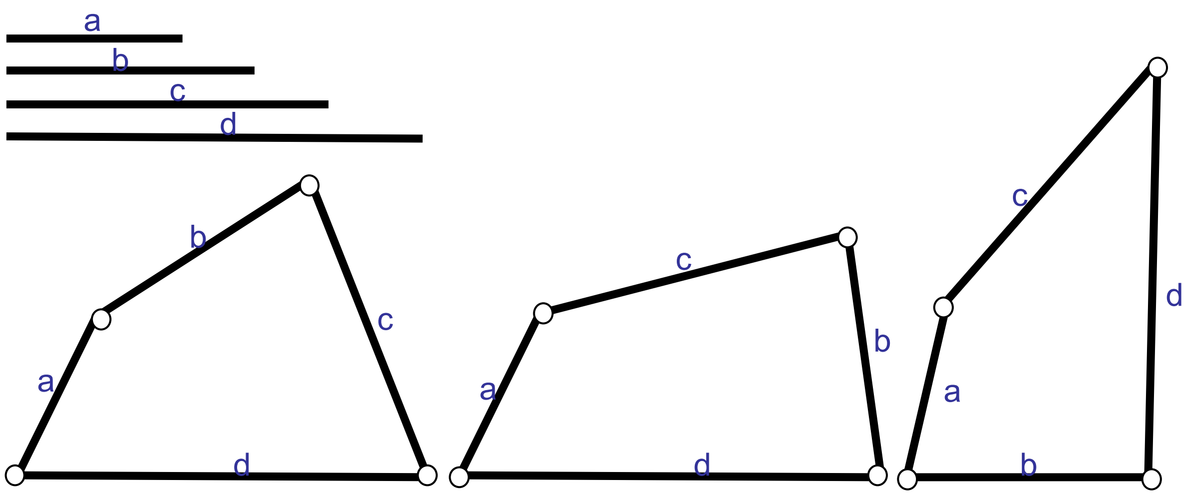
Rotabilidad

Suponemos las cuatro barras del mecanismo: a, b, c y d de forma que se cumpla a<b<c<d.

Con esta condición se pueden construir tres mecanismos cuadrilátero articulado.

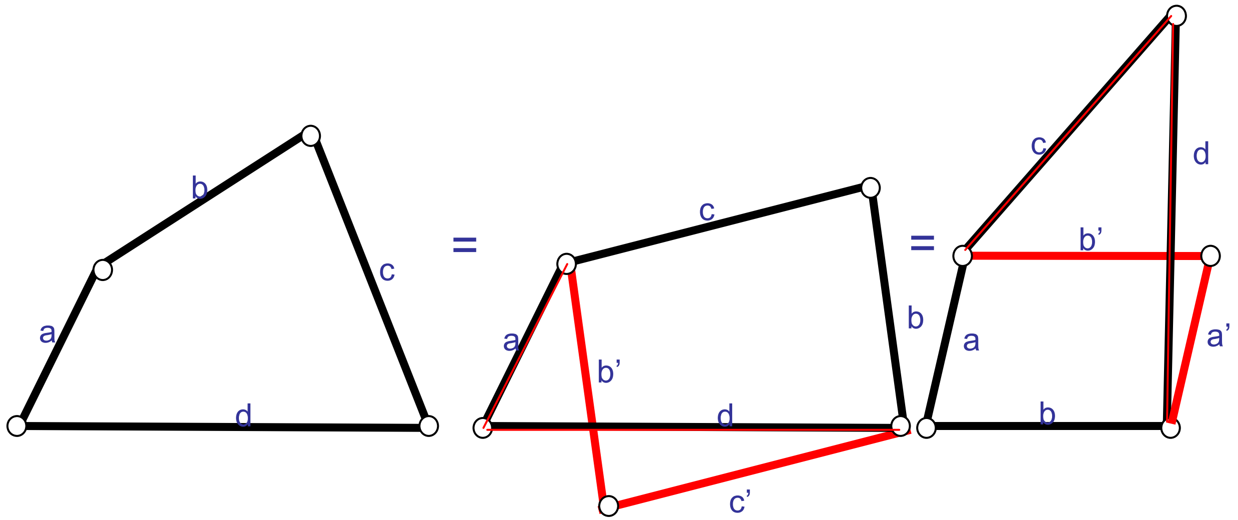
El estudio de la rotabilidad implicaría estudiar los siguientes casos de rotabilidad de las barras: a/b, a/c, a/d, b/c, b/d, c/d.

Es decir: 3 cuadriláteros x 6 casos = 18 casos de estudio.



Rotabilidad

Sin embargo, en cuanto a rotabilidad de las barras se pueden construir mecanismos equivalentes.



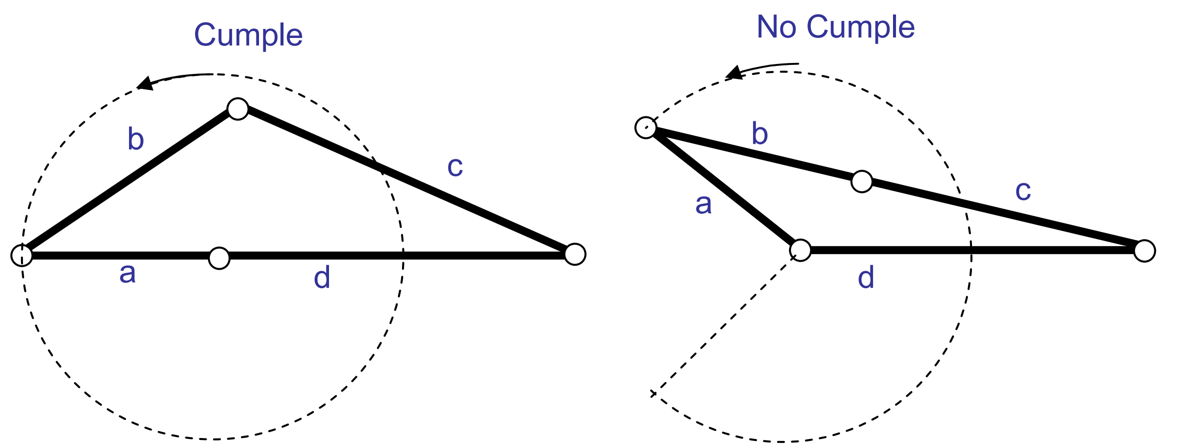
Reduciendose el problema a:

1 cuadrilátero x 6 casos = 6 casos de estudio

Condiciones de rotabilidad

Para que una barra de un mecanismo cuadrilátero articulado gire vueltas completas alrededor de otra se deben alcanzar dos posiciones "extremas". Esto da lugar a dos condiciones:

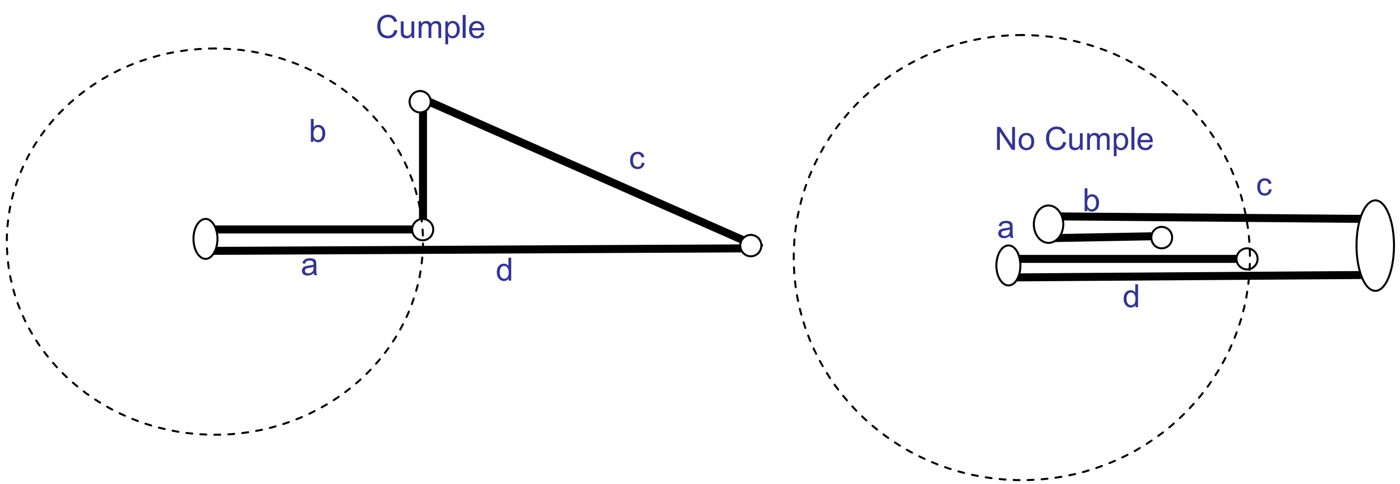
Condición 1: La suma de la longitud de la barra que gira una vuelta completa más la longitud de la barra sobre la cual gira debe ser menor que la suma de las otras dos barras.



Ejemplo: rotabilidad de la barra a respecto a la barra d : → Condición $a + d < b + c$

Condiciones de rotabilidad

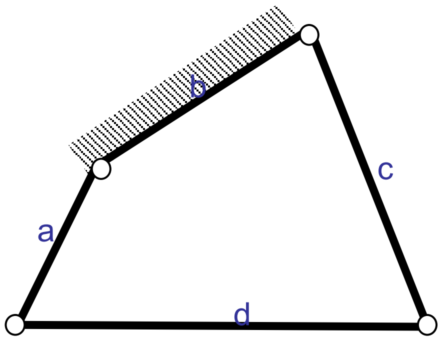
Condición 2: La diferencia de las dos barras mencionadas sea mayor que la diferencia de las otras dos.



Ejemplo: rotabilidad de la barra a respecto a la barra d : → Condición $d - a > c - b$

Casos de estudio

Rotabilidad a/b



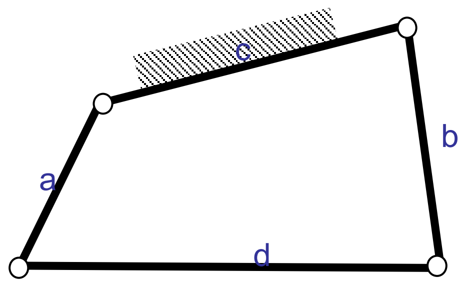
Condición 1:

a + b < c + d

Condición 2:

$\boxed{b + c > a + d}$

Rotabilidad a/c



Condición 1:

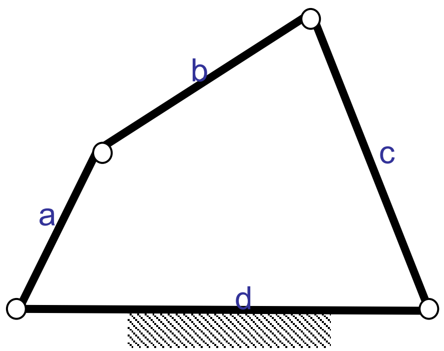
a + c < d + b

Condición 2:

$\boxed{b + c > a + d}$

Casos de estudio

Rotabilidad a/d



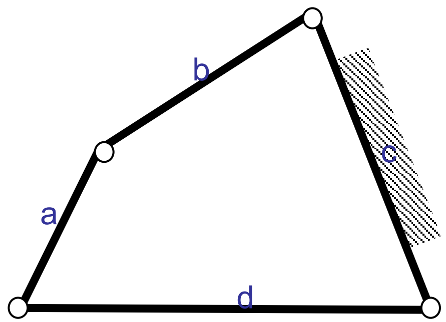
Condición 1:

$\boxed{b + c > a + d}$

Condición 2:

$b + d > a + c$

Rotabilidad b/c



Condición 1:

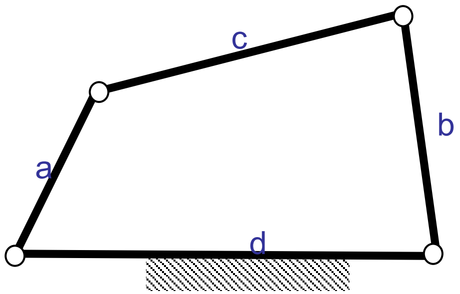
$b + c < d + a$

Condición 2:

$a + c > b + d$

Casos de estudio

Rotabilidad b/d



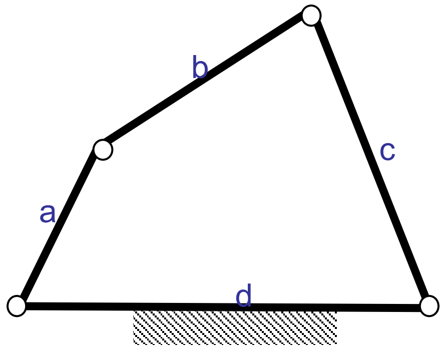
Condición 1:

b + d < a + c

Condición 2:

$\boxed{b + c < a + d}$

Rotabilidad c/d



Condición 1:

d + c < a + b

Condición 2:

$\boxed{b + c < a + d}$

Enunciado del Criterio de Grashof

Criterio de Grashof:

"*La barra más corta de un cuadrilátero articulado gira vueltas completas respecto de todas las demás si se verifica que la suma de las longitudes de la barra más corta y la más larga es menor que la suma de las longitudes de las otras dos. Es imposible que las barras restantes giren vueltas completas entre sí*".

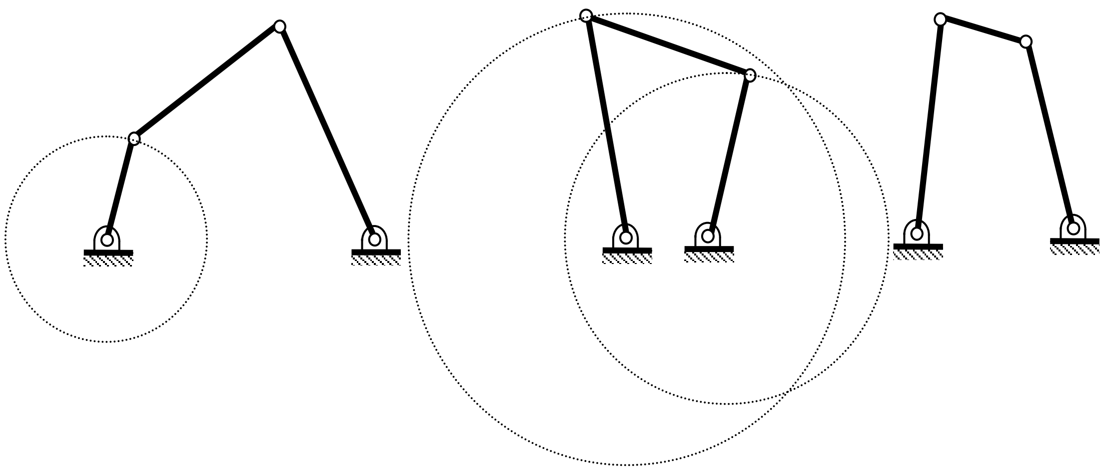
$$\boxed{b + c > a + d}$$

Conclusiones del Criterio de Grashof

Casos posibles:

Caso I: cumple la condición de Grashof.

- Cuando a es el elemento fijo → Cuadrilátero de doble manivela.
- Cuando a es el elemento opuesto al fijo → Cuadr. de doble balancín.
- Cuando a es adyacente al fijo → Cuadr. manivela-balancín.



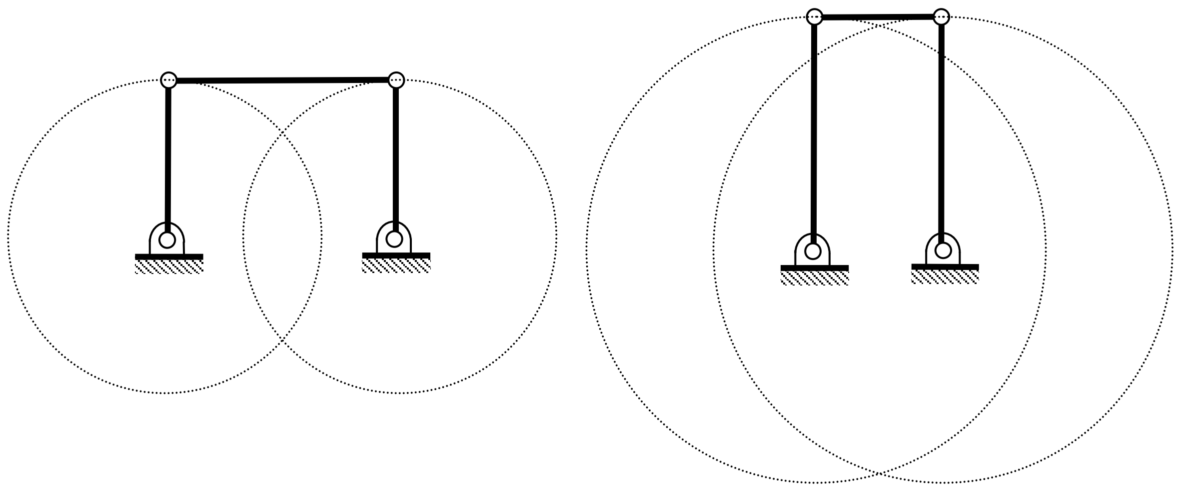
Conclusiones del Criterio de Grashof

Casos posibles:

Caso II: No cumple la condición de Grashof; todos los cuadriláteros son de doble balancín.

Caso III: Caso límite: $b + c = a + d$

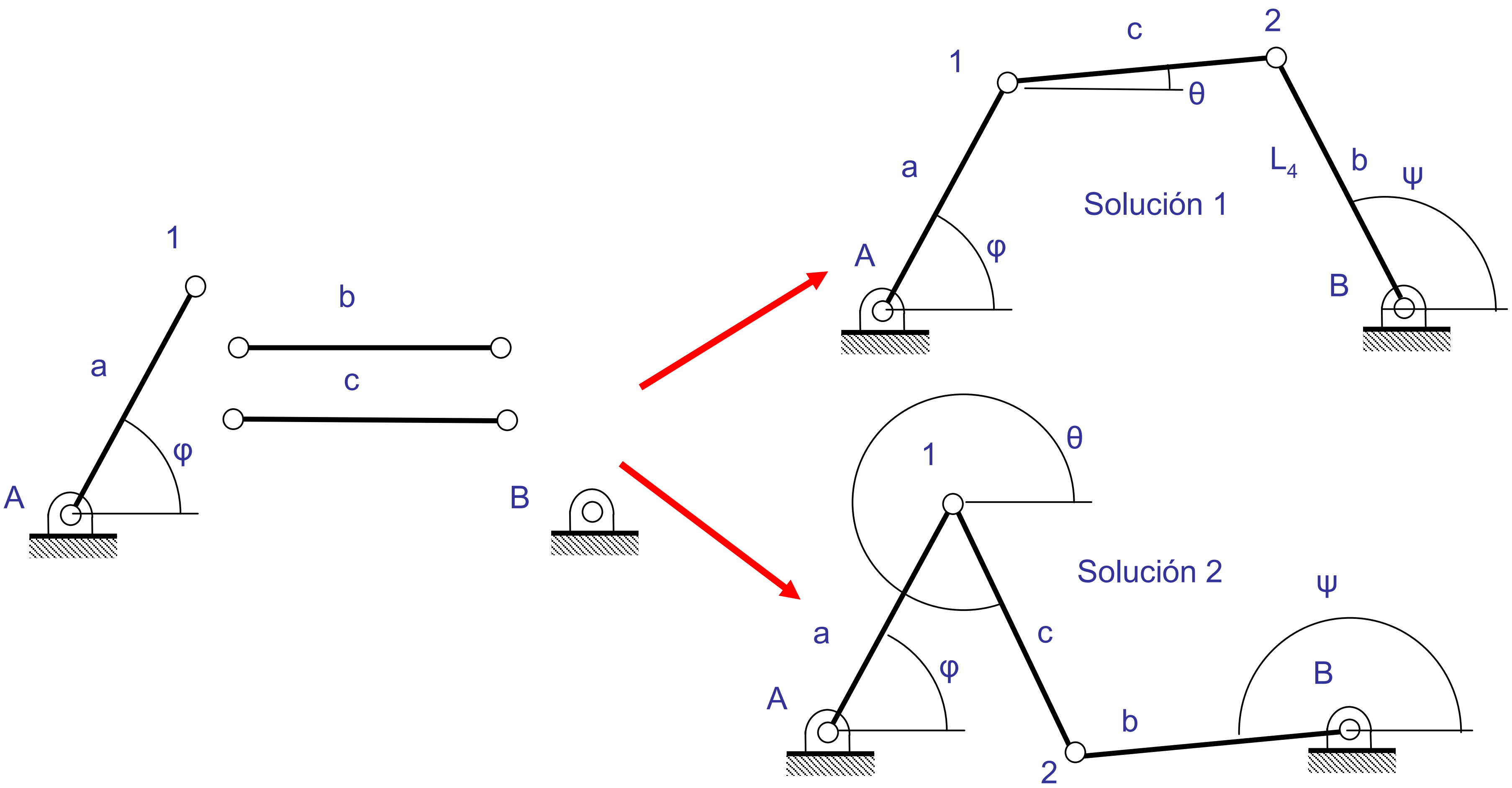
Si además: $a=c$ y $b=d$



Capítulo II: Tema 3

3. El problema de posición inicial.

El problema de posición inicial



El problema de posición inicial

$$g = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi}$$

$$g\,\mathrm{sen}\delta = a\,\mathrm{sen}\varphi \qquad \delta = \mathrm{arcsen}\left(\frac{a\,\mathrm{sen}\varphi}{g}\right)$$

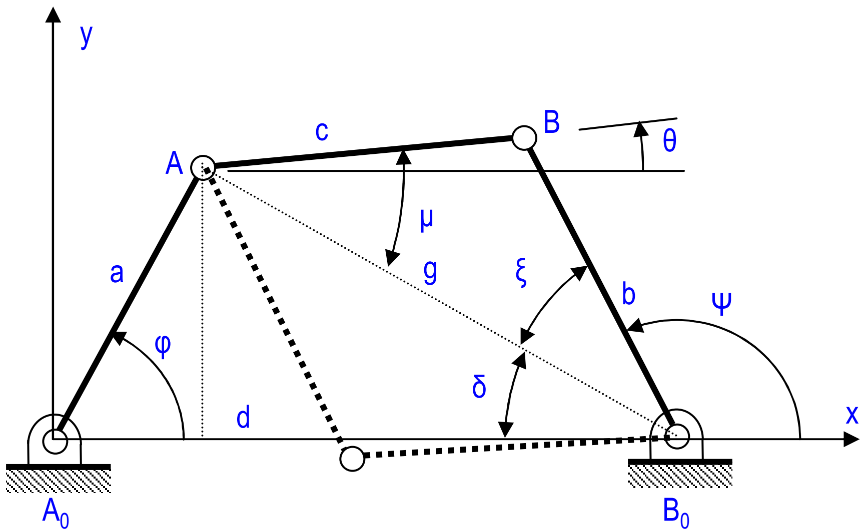
$$b = \sqrt{c^2 + g^2 - 2cg\cos\mu}$$

$$\mu = \pm\mathrm{ar}\cos\left[\frac{b^2 - c^2 - g^2}{2cg}\right]$$

$$b\,\mathrm{sen}\xi = c\,\mathrm{sen}\mu$$

$$\xi = \pm\mathrm{arcsen}\left(\frac{c\,\mathrm{sen}\mu}{b}\right)$$

$$\boxed{\psi = \pi - \delta \mp \xi} \qquad \boxed{\theta = \pm\mu - \delta}$$



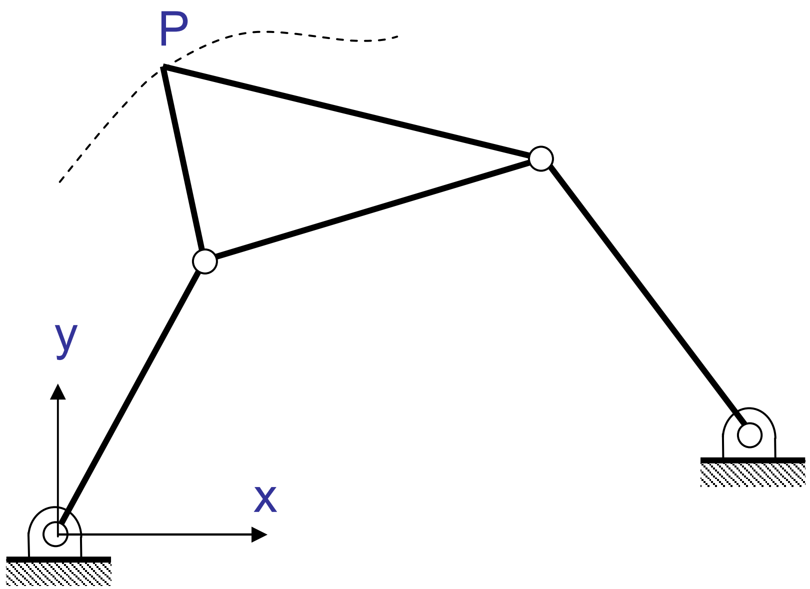
Capítulo II: Tema 3

4. Curvas de acoplador.
    1. Curvas de acoplador en ecuaciones paramétricas.
    2. Curvas de acoplador en ecuaciones cartesianas.
    3. Propiedades generales de las curvas de acoplador.

Curvas de acoplador en ecuaciones paramétricas

Se trata de obtener las ecuaciones de la trayectoria de un punto P del acoplador en forma parámetrica. Es decir:

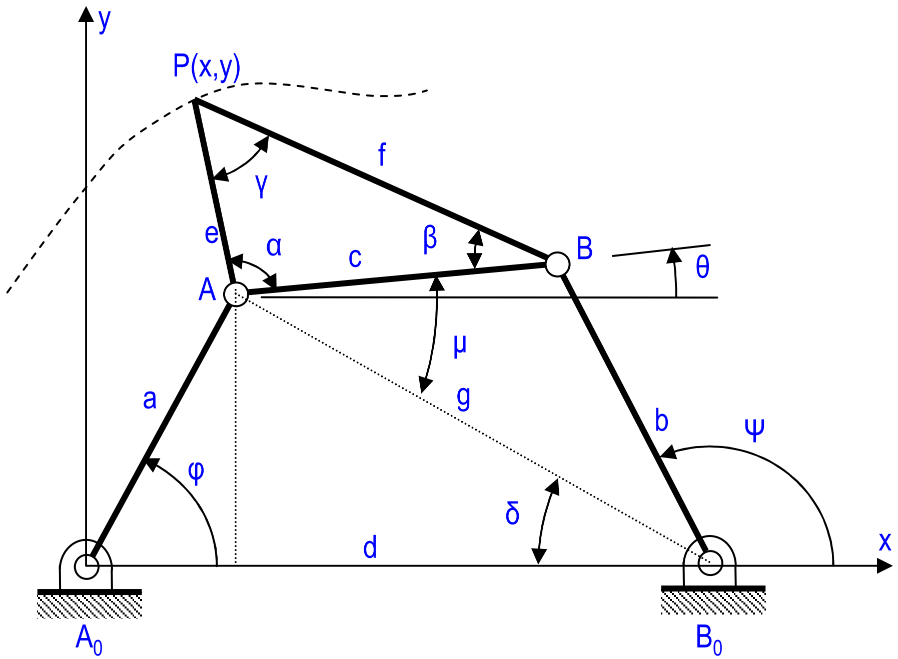
$$\left.\begin{array}{l} x=x(\varphi) \\ y=y(\varphi) \end{array}\right\}$$



Curvas de acoplador en ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\varphi) \\ y &= y(\varphi) \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi + e\cos(\mu+\alpha-\delta) \\ y &= a\,\mathrm{sen}\,\varphi + e\,\mathrm{sen}(\mu+\alpha-\delta) \end{aligned}\right\}}$$



$$\delta = \mathrm{atg}\left(\frac{a\,\mathrm{sen}\,\varphi}{d - a\cos\varphi}\right)$$

$$\mu = \mathrm{ar}\cos\left(\frac{g^2 + c^2 - b^2}{2cg}\right)$$

$$g = \sqrt{a^2\mathrm{sen}^2\varphi + (d - a\cos\varphi)^2} = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi}$$

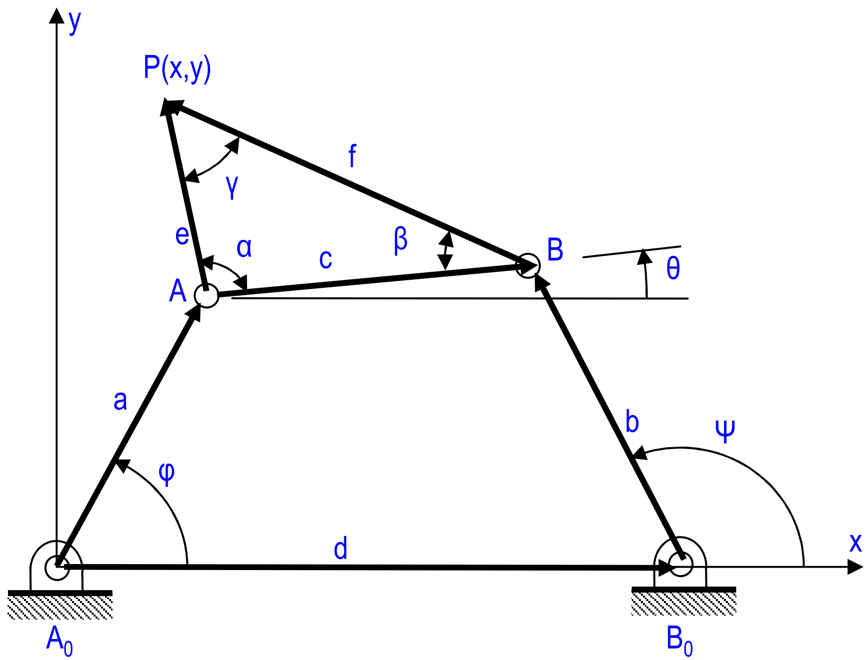
Curvas de acoplador en ecuaciones cartesianas

$$G(x, y) = 0$$

$$\boxed{\vec{a} + \vec{e} = \vec{d} + \vec{b} + \vec{f}}$$

$$x = a\cos\varphi + e\cos(\alpha + \theta)$$
$$y = a\,\mathrm{sen}\,\varphi + e\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = d + b\cos\psi + f\cos(\alpha + \theta + \gamma) \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\psi + f\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta + \gamma) \end{array}\right\}$$



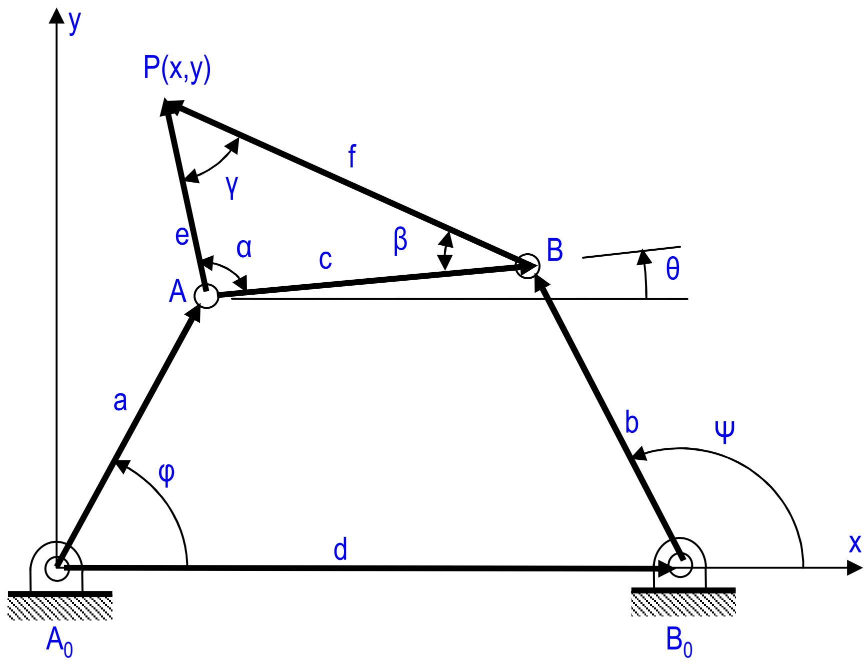
Curvas de acoplador en ecuaciones paramétricas

$$2A\cos(\alpha+\theta)+2B\mathrm{sen}(\alpha+\theta)=M$$
$$2C\mathrm{sen}(\alpha+\theta)+2D\mathrm{sen}(\alpha+\theta)=N$$

$$\left.\begin{array}{l} A = e\,x; \\ B = e\,y; \\ C = f\,y\,\mathrm{sen}\gamma + f(x-d)\cos\gamma; \\ D = f\,y\cos\gamma + f(d-x)\mathrm{sen}\gamma; \\ M = x^2+y^2+e^2-a^2; \\ N = (d-x)^2+y^2+f^2-b^{2;} \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} M & B \\ N & D \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & M \\ C & N \end{vmatrix}^2 = 4\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^2$$

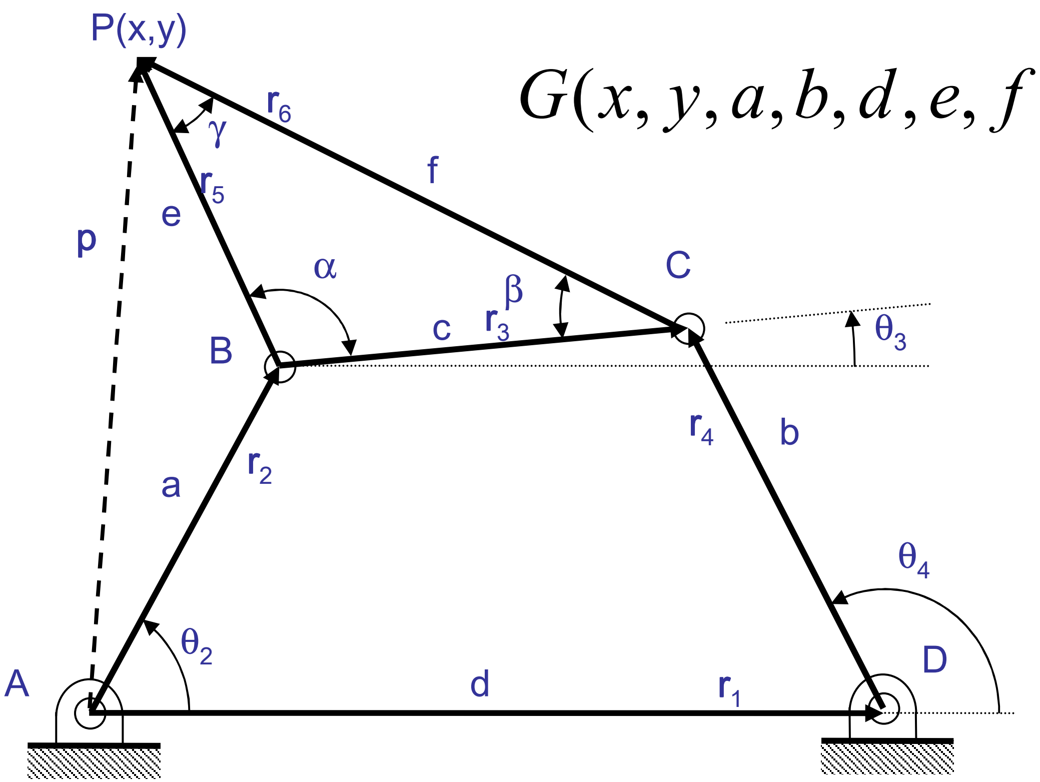
$$\boxed{U^2+V^2=W^2}$$



Propiedades generales de las curvas de acoplador

1. Es una curva de grado seis, o séxtica.
2. Según el sistema de referencia empleado para su obtención, la ecuación de la trayectoria depende de seis parámetros, es decir,

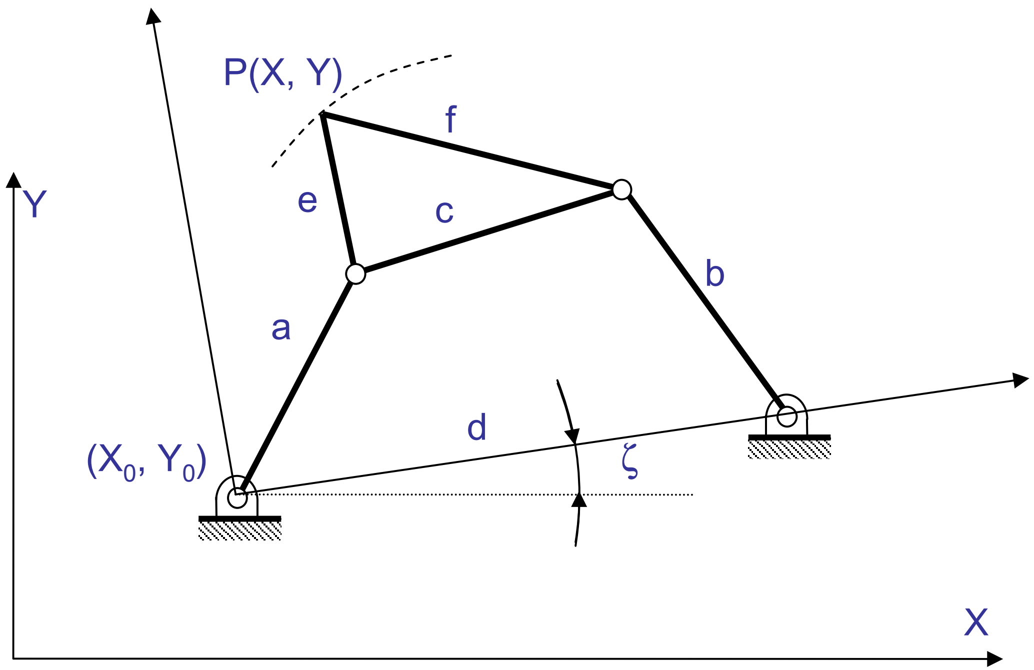
$$G(x, y, a, b, d, e, f, \gamma) = 0$$



Propiedades generales de las curvas de acoplador

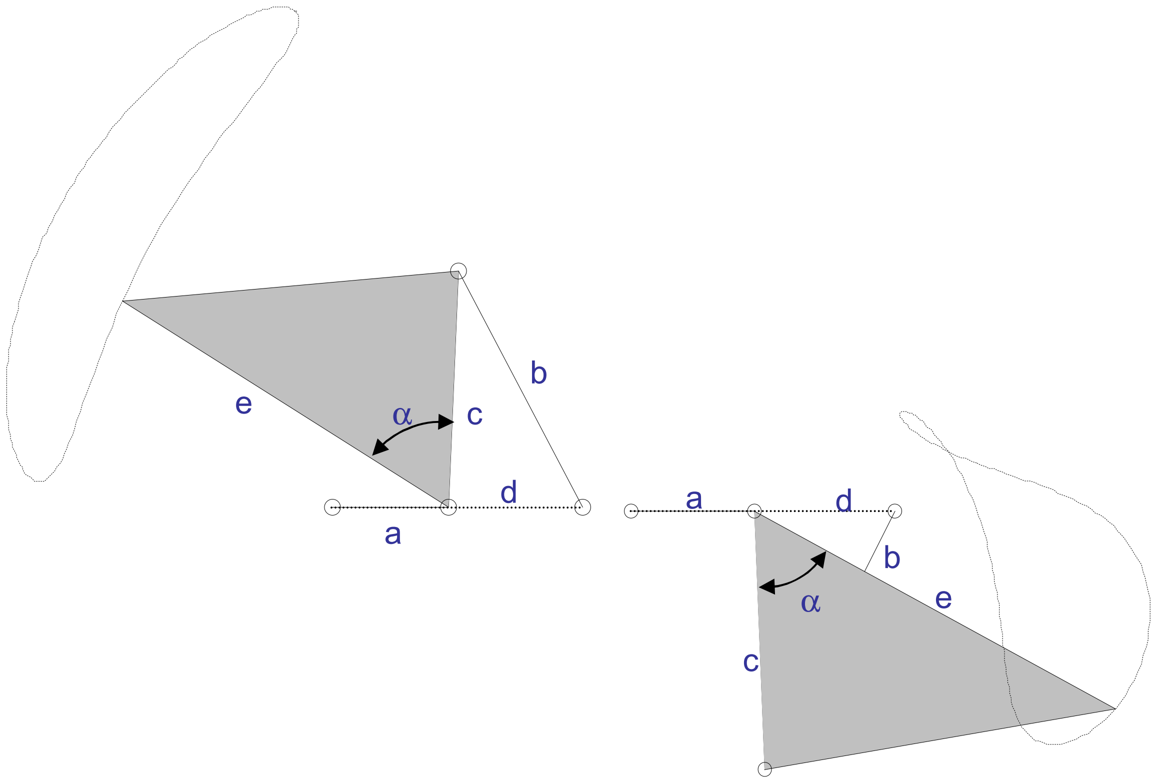
3. En un sistema de referencia más general, como el mostrado en la Figura, la ecuación de la trayectoria puede llegar a depender de hasta nueve parámetros. Es decir,

$$G(X, Y, X_0, Y_0, \xi, a, b, c, d, e, f) = 0$$



Propiedades generales de las curvas de acoplador

4. El punto P de acoplador de un cuadrilátero articulado de dimensiones a,b,c,d,e y f puede generar dos ramas o trayectorias diferentes según sea su configuración abierta o cerrada



Propiedades generales de las curvas de acoplador

5. Teorema de Bezout dice: "*Dos curvas algebraicas de grado m y n tienen mn puntos de intersección contando los reales, simples, multiples e imaginarios*". Por tanto, la intersección de una recta con la curva generada por la trayectoria del punto P del acoplador sólo puede producirse en seis puntos.
6. La curva generada por la trayectoria de un punto del acoplador puede degenerar en una de un grado inferior a seis. Ahora bien, si esto se produce toda la curva degenerará en esa de grado inferior, pero en ningún caso la curva estará constituida por diferentes tramos con diferentes grados.

Propiedades generales de las curvas de acoplador

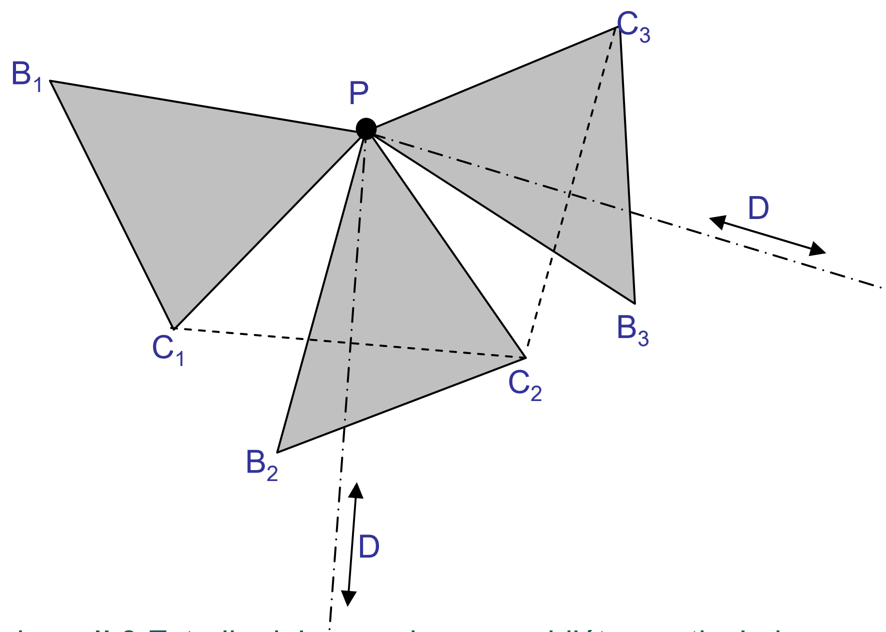
7. Según Soni se pueden clasificar las curvas de acoplador según su forma de la siguiente manera:
    1. Curvas formadas por arcos casi circulares.
    2. Curvas formadas por arcos casi circulares y un segmento casi rectilíneo.
    3. Curvas formadas por arcos casi circulares y dos segmentos casi rectilíneos.
    4. Curvas con puntos dobles o figuras con forma de ocho.
    5. Curvas con puntos de retroceso o cúspidales.
    6. Curvas con forma de ala de avión.

Propiedades generales de las curvas de acoplador

8. Según el teorema de Niewenglowski: “Una curva algebraica plana carece de puntos angulosos”. Por tanto, las curvas generadas por un punto del acoplador no tienen puntos de este tipo.
9. Las curvas generadas por el punto P del acoplador pueden presentar puntos dobles, es decir puntos por los cuales la misma rama de la curva generada pasa dos veces.

Propiedades generales de las curvas de acoplador

10. Asimismo, el punto P del acoplador de mecanismo de cuatro barras no puede generar curvas con orden de multiplicidad igual o superior a tres. Se puede demostrar considerando el caso de un supuesto punto triple según la figura. Para que esta situación se produzca es necesario que la articulación fija D esté en la confluencia de las dos mediatrices indicadas en la figura. Esta situación sólo se produce cuando P=D, lo que descarta la posibilidad de existencia de estos puntos.



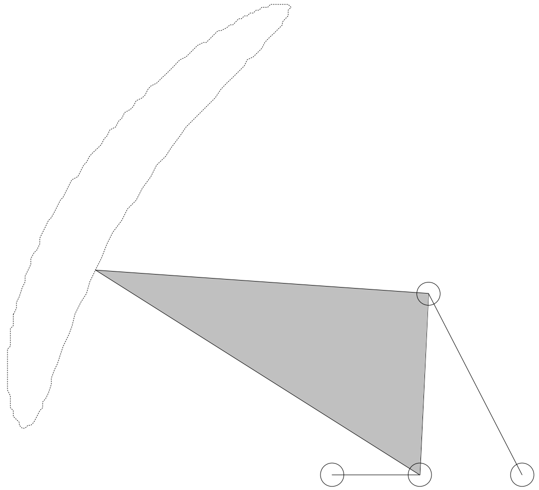
Propiedades generales de las curvas de acoplador

11. La existencia de puntos cúspidales, es decir, puntos de detención instantánea de la trayectoria sólo ocurre cuando dicho punto tiene un instante de velocidad nula. En otras palabras, cuando el punto P del acoplador coincide con el centro instantáneo de rotación del elemento acoplador.
12. La trayectoria del punto P de acoplador carece de puntos en el infinito puesto que la curva no tiene asíntotas.

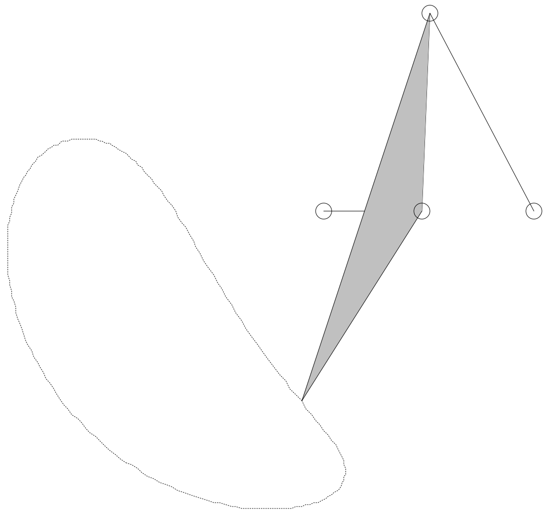
Universidad de Cantabria
Departamento de Ing. Estructural y Mecánica

Propiedades generales de las curvas de acoplador

Curvas formadas por arcos casi circulares

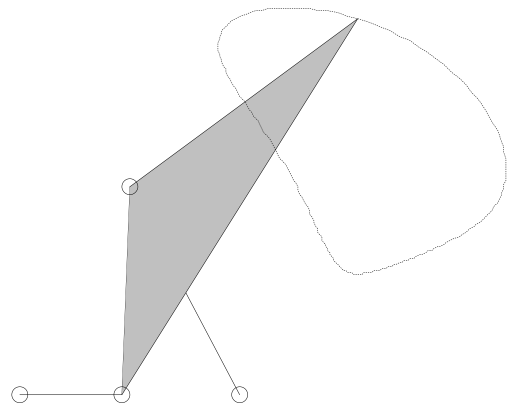


Curvas formadas por arcos casi circulares y un segmento casi rectilíneo.

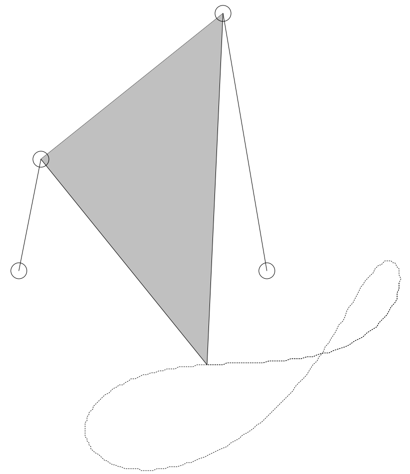


Propiedades generales de las curvas de acoplador

Curvas formadas por arcos casi circulares y dos segmentos casi rectilíneos.

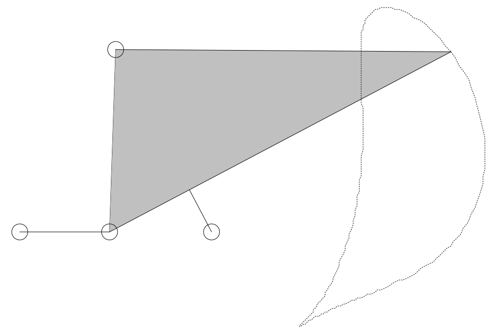


Curvas con puntos dobles o figuras con forma de ocho.

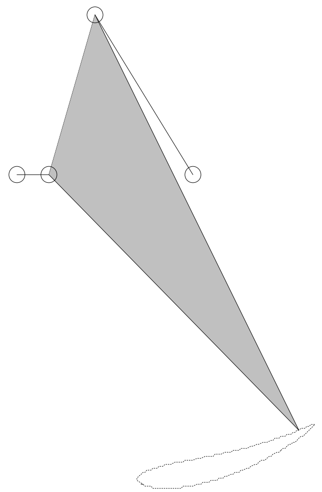


Propiedades generales de las curvas de acoplador

Curvas con puntos de retroceso o cúspidales.



Curvas con forma de ala de avión.



Capítulo II: Tema 3

5. Puntos dobles, cúspidales y cíclicos.
   1. Puntos dobles.
   2. Puntos cúspidales.
   3. Puntos cíclicos.

Puntos dobles

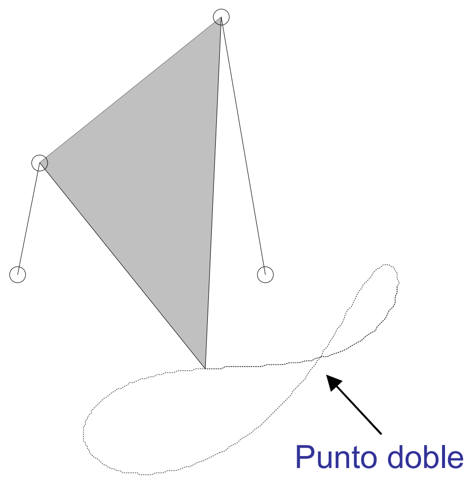
Definición: punto doble es aquel en el que se corta un misma rama de la trayectoria. En otras palabras, el punto P del acoplador pasa dos veces por dicho punto.

En los puntos dobles existe una indeterminación de la tangente.

$$G(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty}}$$



Puntos dobles

$$G(x, y) = U^2 + V^2 - W^2 = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x} = 0; \quad U\dfrac{\partial U}{\partial x} + V\dfrac{\partial V}{\partial x} + W\dfrac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} = 0; \quad U\dfrac{\partial U}{\partial y} + V\dfrac{\partial V}{\partial y} + W\dfrac{\partial W}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Cada una de estas ecuaciones representa una curva. La intersección de ambas curvas y la trayectoria del punto P permite obtener la posición de los puntos dobles.

Puntos dobles

$$\left.\begin{aligned} U^2 + V^2 &= W^2 \\ W^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Entonces,

$$U = 0;$$
$$V = 0;$$
$$W = 0;$$

y por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{0}{0}$$

Puntos dobles

$$W = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e\,x & e\,y \\ f\,y\,\mathrm{sen}\gamma + f(x-d)\cos\gamma & f\,y\cos\gamma + f(d-x)\mathrm{sen}\gamma \end{vmatrix} =$$

$$f\left[e\,x\,y\cos\gamma + e\,x(d-x)\mathrm{sen}\gamma - e y^2 \mathrm{sen}\gamma + e\,y(d-x)\cos\gamma\right] =$$
$$f\left[e\,x\,y\cos\gamma + e\,x\,d\,\mathrm{sen}\gamma - e\,x^2\,\mathrm{sen}\gamma - e\,y^2 \mathrm{sen}\gamma + e\,y\,d\cos\gamma - e\,y\,x\cos\gamma\right] = 0$$

$$-(x^2 + y^2 - x\,d)\mathrm{sen}\gamma + y\,d\cos\gamma = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - x\,d - \frac{y\,d}{\mathrm{tg}\gamma} = 0}$$

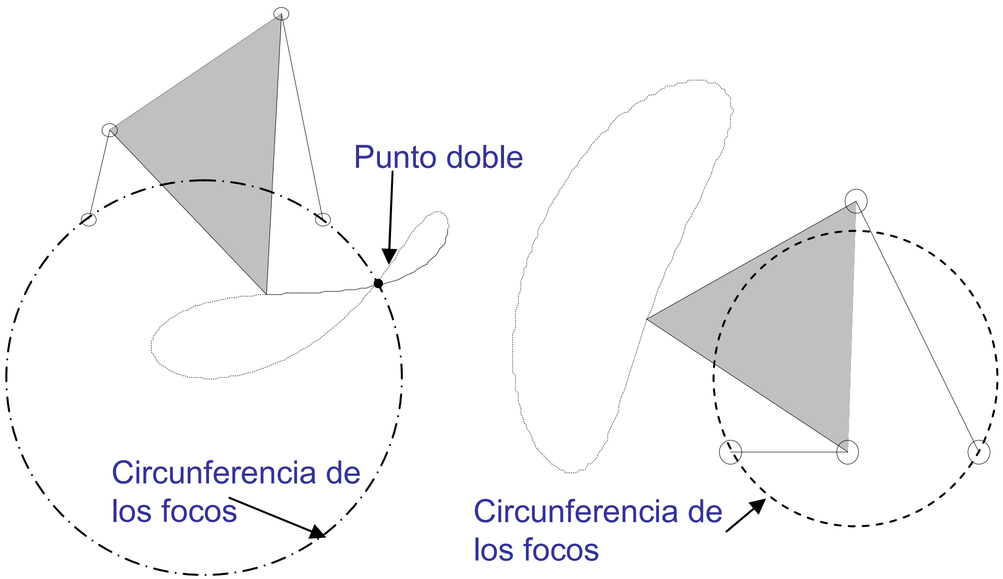
Circunferencia de los focos

Esta ecuación representa una circunferencia que pasa por las articulaciones fijas del mecanismo cuadrilátero articulado.

Puntos dobles

Se puede afirmar que los puntos dobles, si existen, se encuentran donde la curva generada por el punto P del acoplador se corta con la circunferencia de los focos.

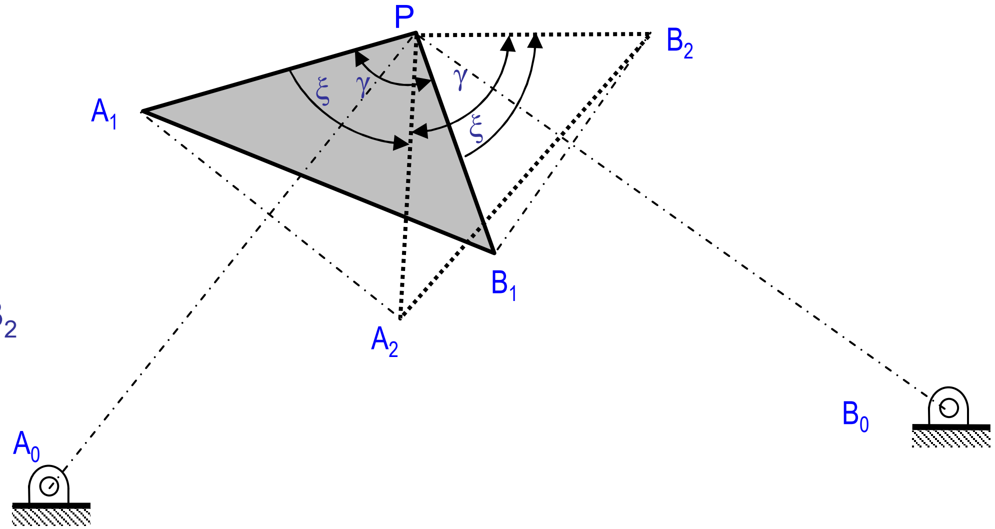
En otras palabras, si la curva generada por el punto P de acoplador corta a la circunferencia de los focos existirán puntos dobles. Si no la corta la curva de acoplador no tiene puntos dobles.



Puntos dobles

$$\widehat{A_0PB_0} = \widehat{A_1PB_1} + \widehat{B_1PB_2} - \widehat{A_1PA_0} - \widehat{B_0PB_2}$$

$$(1/2)\ \widehat{A_1PA_2} = \widehat{A_1PA_0} = \widehat{B_0PB_2} = (1/2)\ \widehat{B_1PB_2}$$



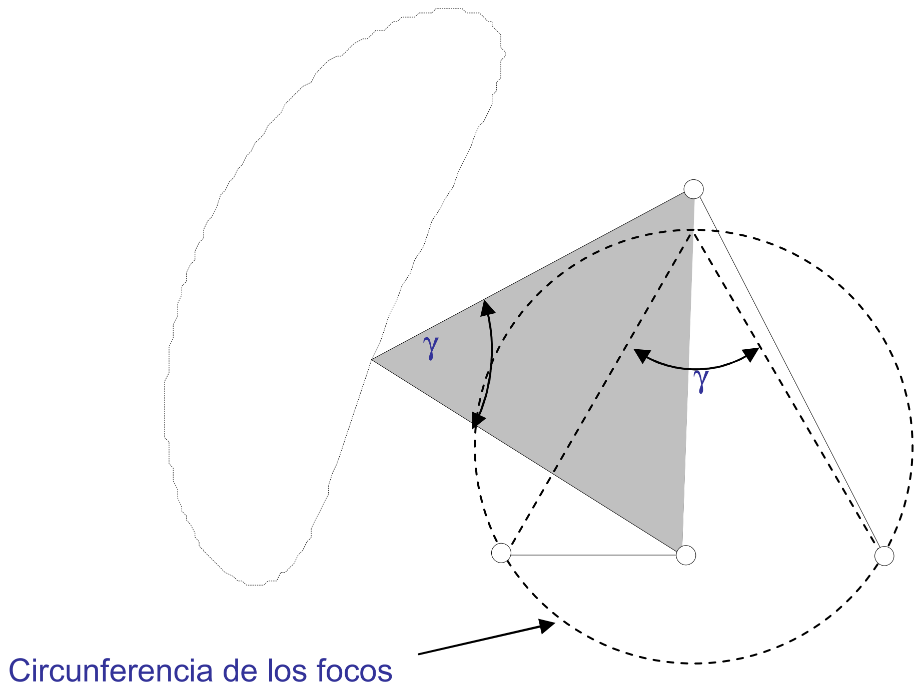
$$\widehat{A_0PB_0} = \widehat{A_1PB_1} + \widehat{B_1PB_2} - (1/2)\ \widehat{B_1PB_2} - (1/2)\ \widehat{B_1PB_2}$$

$$\widehat{A_0PB_0} = \widehat{A_1PB_1} = \Upsilon$$

En consecuencia un punto doble exige que las rectas que unen dicho punto con las articulaciones fijas formen un ángulo constante e igual al vértice P del acoplador.

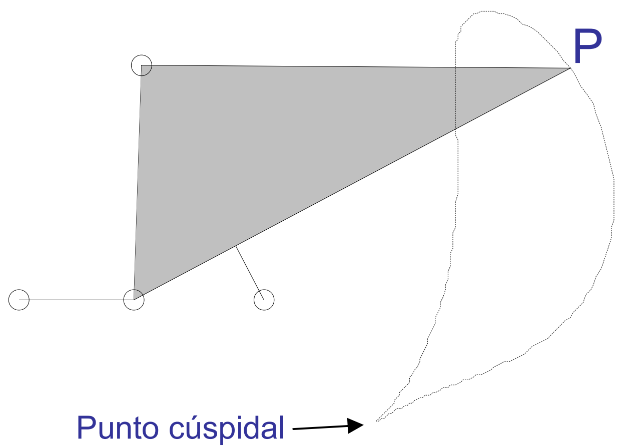
Puntos dobles

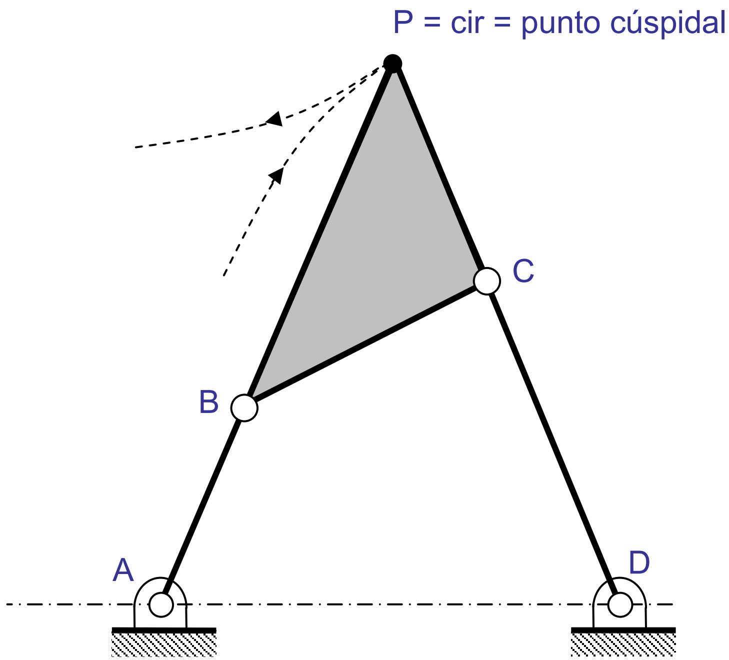
Esta última propiedad nos permite obtener la circunferencia de los focos de forma sencilla conocido el ángulo ϒ del acoplador. Para ello se traza por A0 y B0 un triángulo de base d cuyo tercer vértice forme un ángulo ϒ.



Puntos cúspidales o de retroceso

<u>Definición:</u> se denomina puntos cúspidales de la trayectoria a aquellos puntos donde se produce una detención instantánea. Es decir, cuando el punto P pasa por un punto que es centro instantáneo de rotación.





Puntos cíclicos

Definición: son puntos de la trayectoria del acoplador que se van al infinito. En otras palabras, la trayectoria tiene una asíntota.

En el mecanismo cuadrilátero articulado no cabe posibilidad de existencia de este tipo de puntos.