Capitulo IV

IV.1 Síntesis dimensional de mecanismos. Generación de funciones

Capítulo IV
Síntesis dimensional de mecanismos

Capítulo IV: Tema 1
Síntesis dimensional de mecanismos. Generación de funciones.

1. Introducción a la síntesis dimensional.
2. Síntesis de generación de funciones.
3. Ecuación de Freudenstein.
4. Síntesis con tres puntos de precisión.
5. Aumento del número de puntos de precisión.
6. Derivadas de precisión.
7. Generalización de la ecuación de Freudenstein.

Capítulo IV: Tema 1 Síntesis dimensional de mecanismos. Generación de funciones.

1. Introducción a la síntesis dimensional.

Introducción a la síntesis dimensional

Síntesis cinemática: Es el proceso de encontrar la mejor geometría y dimensiones del mecanismo que producirá el movimiento deseado.

Análisis cinemático	vs.	Síntesis cinemática
Datos: geometría y dimensiones del mecanismo y posición de los elementos de entrada		Datos: Posición inicial, desplazamientos finitos, velocidades y aceleraciones.
Resultado: Posición inicial, desplazamientos finitos, velocidades y aceleraciones.		Resultados: geometría y dimensiones del mecanismo y posición de los elementos de entrada

Introducción a la síntesis dimensional

Síntesis de tipo o Reuleaux: Consiste en encontrar el tipo y número de elementos y pares cinemáticos para formar un mecanismo que cumpla con las condiciones de movimiento impuestas.

Síntesis dimensional: Para un mecanismo estructuralmente definido (elementos y pares cinemáticos), consiste en encontrar las dimensiones de los elementos que proporcionen las características de movimiento que cumplan con la condiciones impuestas.

Introducción a la síntesis dimensional

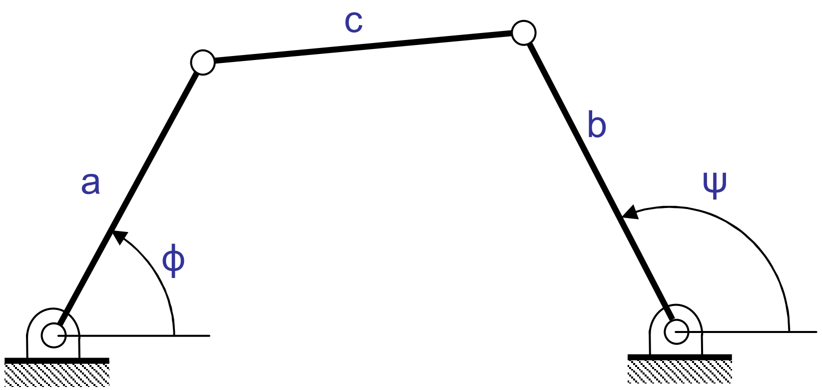
Dentro de la síntesis dimensional de mecanismos existen tres tipos de problemas que dan lugar a dos clases de síntesis:

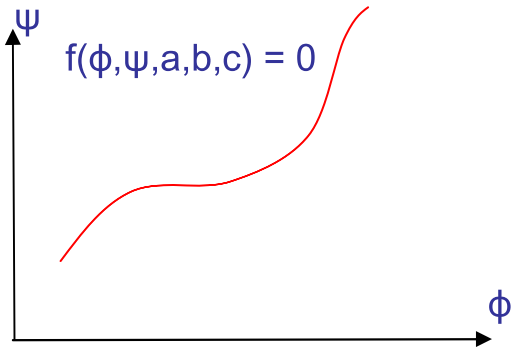
- Síntesis de generación de funciones.
- Síntesis de generación de trayectorias.
- Síntesis de guiado de sólido rígido.

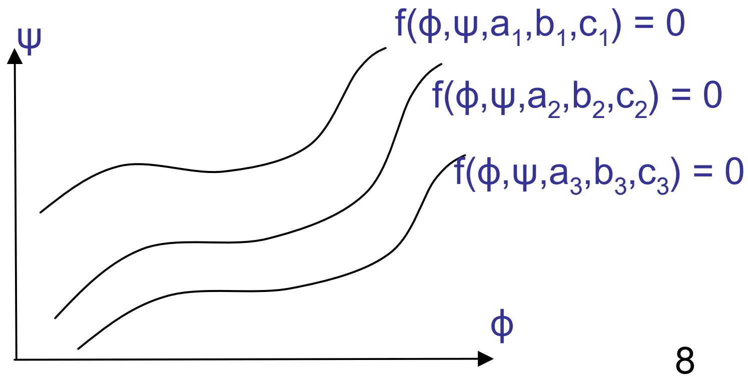
En este primer tema se estudiará la síntesis de generación de funciones, para posteriormente estudiar la generación de trayectorias.

Introducción a la síntesis dimensional

•<u>Síntesis de generación de funciones:</u> se denomina así a la parte de la síntesis de mecanismos que estudia encontrar las dimensiones de un mecanismo que genere una coordinación deseada de las posiciones de las barras de entrada y de salida.

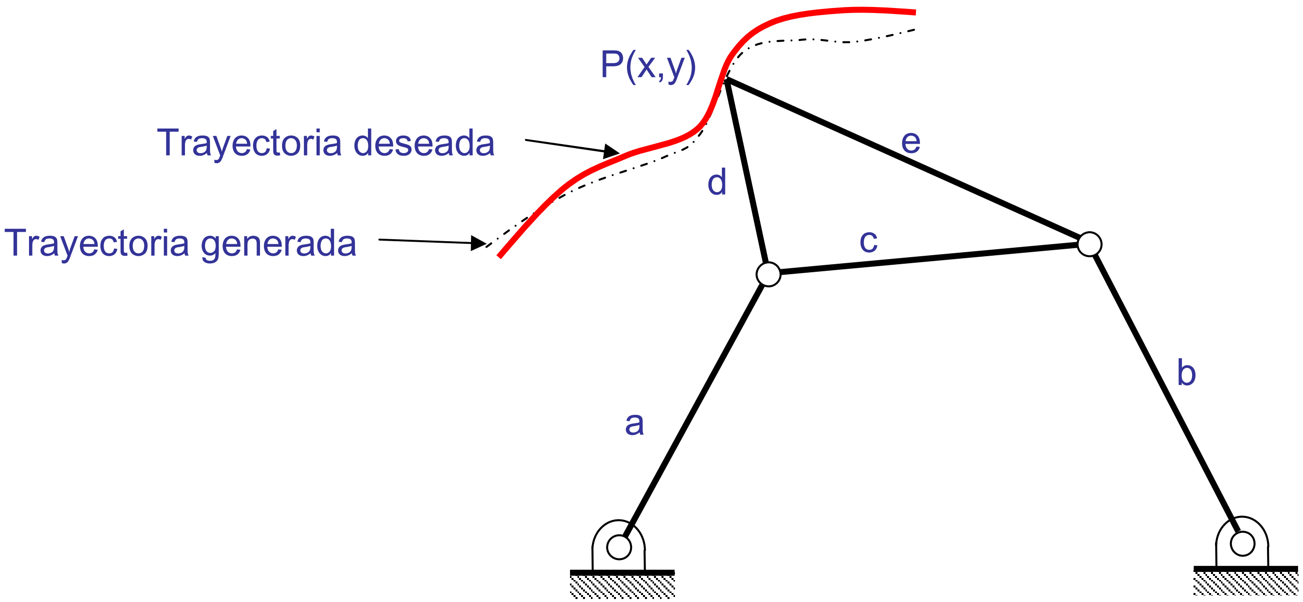






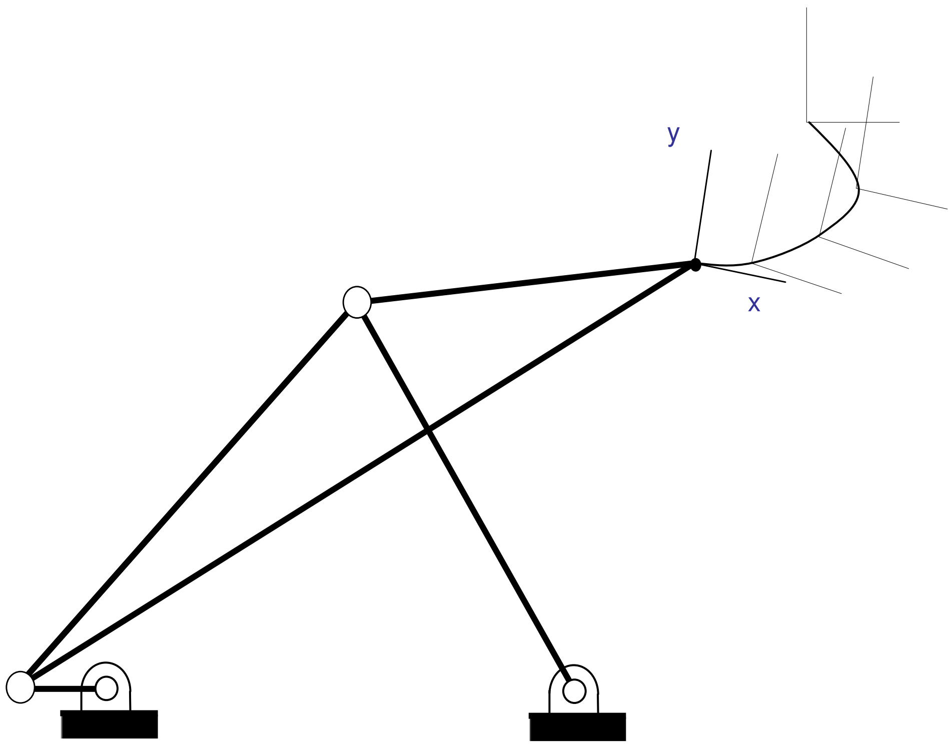
Introducción a la síntesis dimensional

•<u>Síntesis de generación de trayectorias:</u> Se denomina así a la parte de la síntesis de mecanismos que estudia encontrar las dimensiones de un mecanismo en el que uno de sus genere una trayectoria deseada.



Introducción a la síntesis dimensional

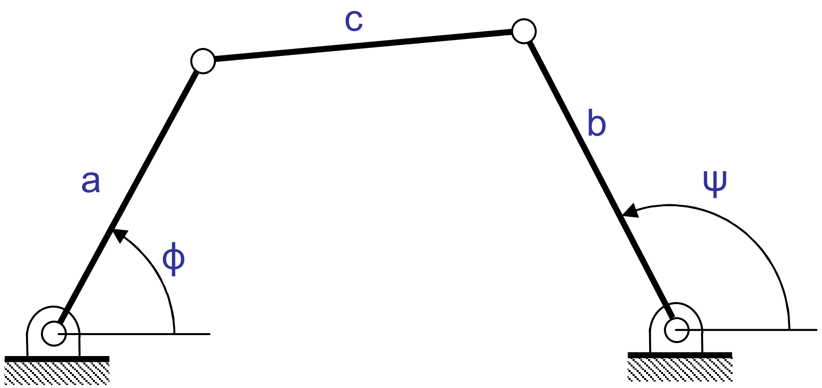
•<u>Síntesis de guiado de sólido rígido:</u> Se denomina así a la parte de la síntesis de mecanismos que estudia situar un elemento de un mecanismo en diversas posicione especificadas.

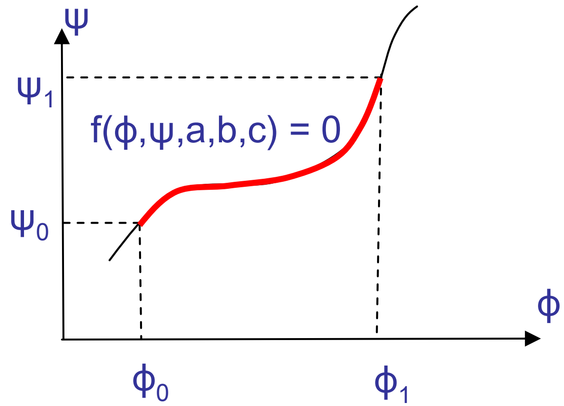


Capítulo IV: Tema 1
Síntesis dimensional de mecanismos. Generación de funciones.

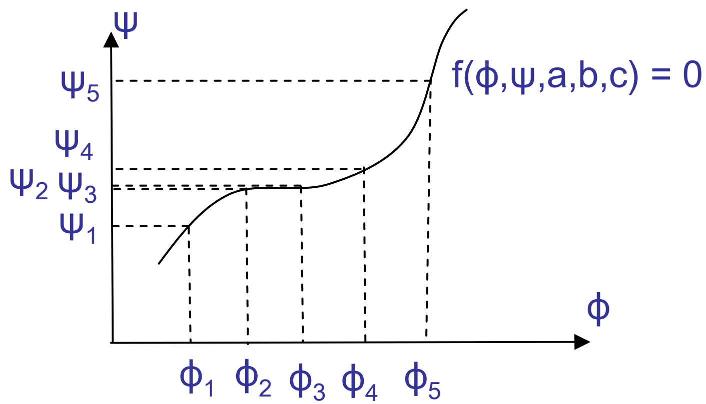
2. Síntesis de generación de funciones.

Síntesis de generación de funciones

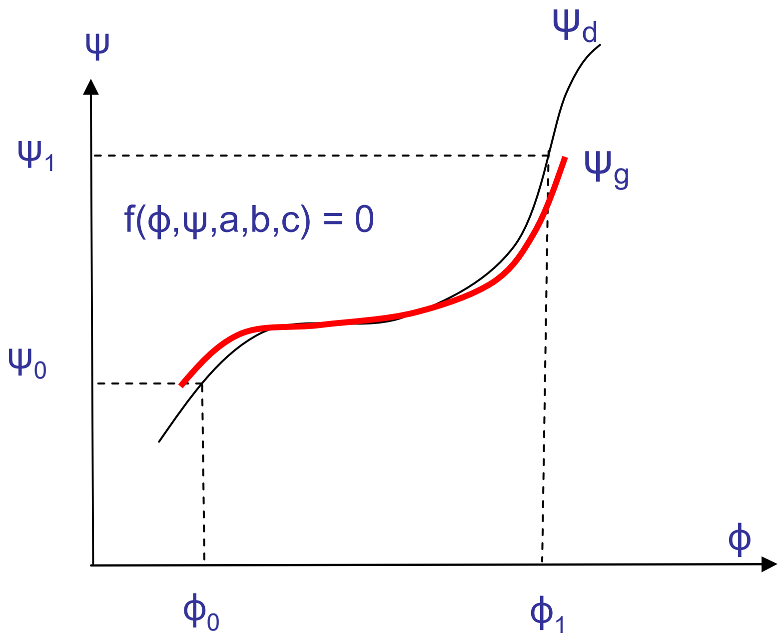


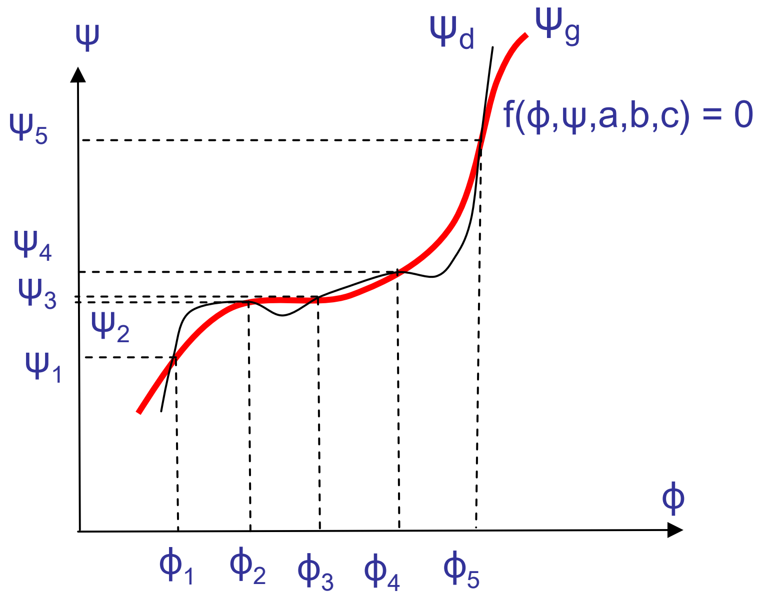


ϕ	ψ
ϕ_1	ψ_1
ϕ_2	ψ_2
ϕ_3	ψ_3
ϕ_4	ψ_4
…	…



Síntesis de generación de funciones





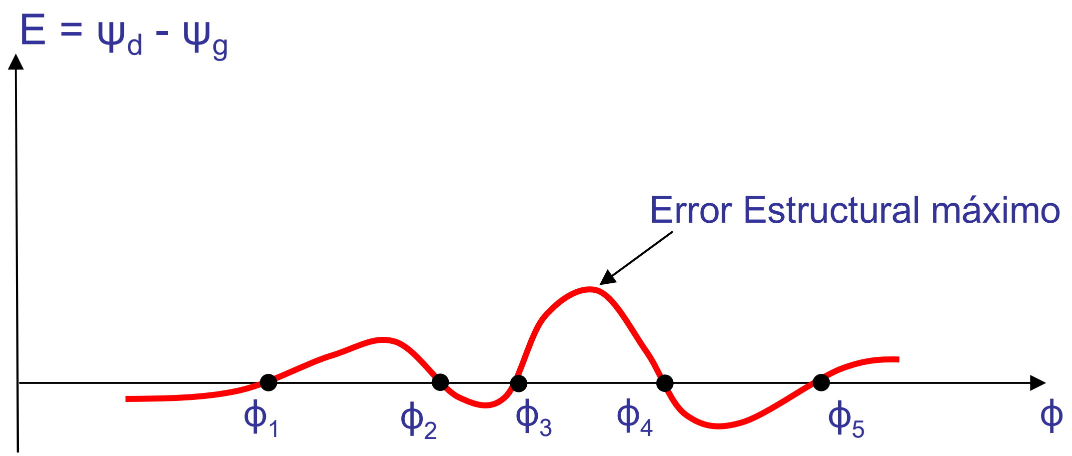
ψ_d: función deseada

ψ_g: función generada

ϕ	ψ
ϕ_1	ψ_1
ϕ_2	ψ_2
ϕ_3	ψ_3
ϕ_4	ψ_4
ϕ_5	ψ_5

Síntesis de generación de funciones

Función de Error Estructural



En mecanismos con 2 gdl esta función será una superficie y con más de 2 gdl una hipersuperficie.

Capítulo IV: Tema 1
Síntesis dimensional de mecanismos. Generación de funciones.

3. Ecuación de Freudenstein.

Ecuación de Freudenstein

La ecuación de Freudenstein ofrece la relación entre los ángulos de los elementos en un cuadrilátero articulado. Para obtener esta expresión empezamos escribiendo la ecuación de cierre del mecanismo considerando como sistema de referencia el indicado en la figura de la siguiente forma,

$$ae^{i\theta_2} + ce^{i\theta_3} = d + be^{i\theta_4}$$

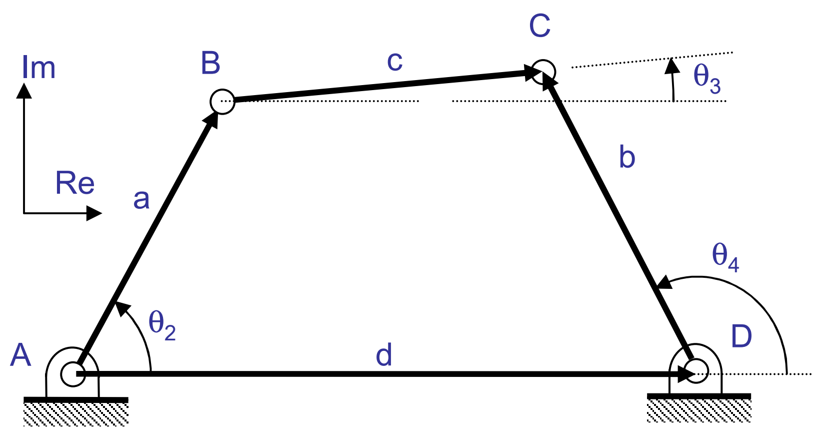
$$\left.\begin{aligned} a\cos\theta_2 + c\cos\theta_3 &= d + b\cos\theta_4 \\ a\mathrm{sen}\theta_2 + c\mathrm{sen}\theta_3 &= b\mathrm{sen}\theta_4 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} c\cos\theta_3 &= d + b\cos\theta_4 - a\cos\theta_2 \\ c\mathrm{sen}\theta_3 &= b\mathrm{sen}\theta_4 - a\mathrm{sen}\theta_2 \end{aligned}\right\}$$

$$c^2 = d^2 + a^2 + b^2 + 2bd\cos\theta_4 - 2ad\cos\theta_2 - 2ab\cos(\theta_4 - \theta_2)$$

$$K_1 = \frac{d}{a};\quad K_2 = \frac{d}{c};\quad K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

$$\boxed{K_1\cos\theta_4 - K_2\cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4)}$$

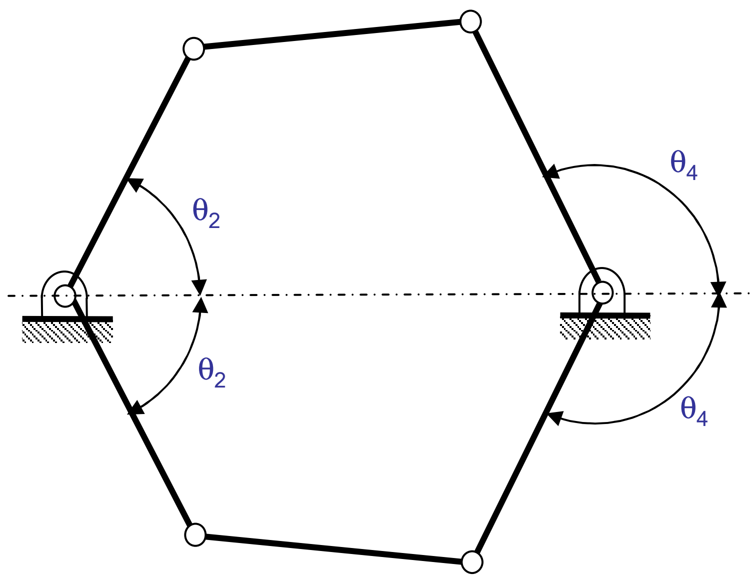


Expresión que se conoce con el nombre de *"Ecuación de Freudenstein"* y que resulta muy útil en síntesis de mecanismos.

Ecuación de Freudenstein

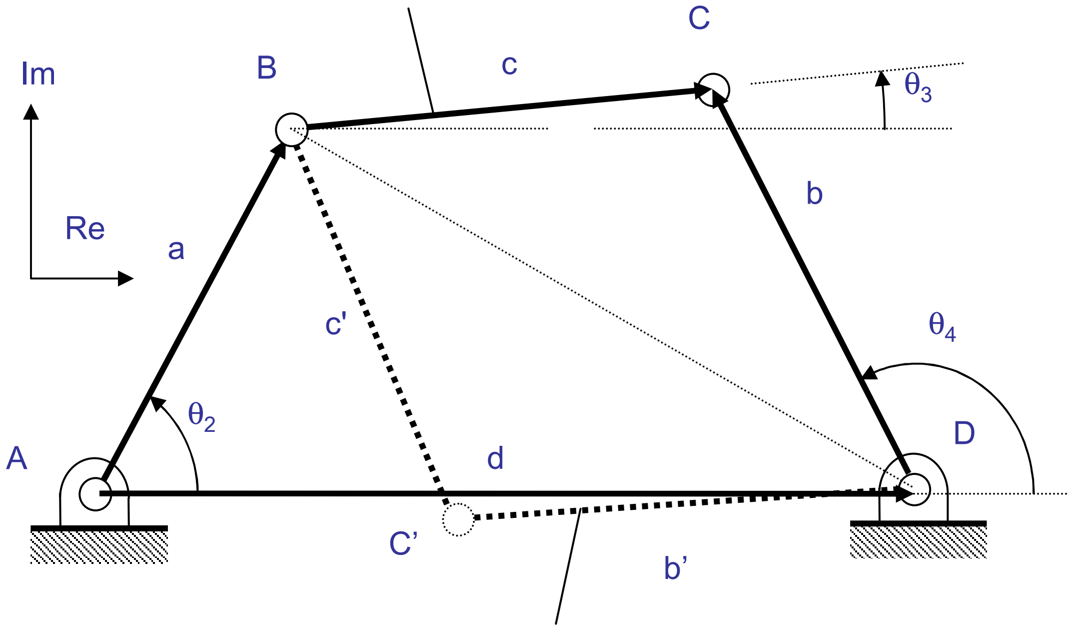
Esta ecuación presenta una serie de características que deben ser tenidas en cuenta. Estas son las siguientes:

- Si la ecuación se verifica para las coordenadas θ_2 y θ_4 y unos valores cualesquiera de las constantes K también se verifica para su imagen espejo respecto de la barra fija correspondiente a sustituir las coordenadas $(\theta_2-2\pi)$ y $(\theta_4-2\pi)$.



Ecuación de Freudenstein

- Para un determinado valor de las constantes K y de θ_2, existen dos valores de θ_4 que cumplen con la ecuación de *Freudenstein*. Estos valores se corresponden con las configuraciones abierta y cerrada del cuadrilátero articulado.



Ecuación de Freudenstein

- Si para un determinado valor de los ángulos θ_2 y θ_4 los valores resultantes de K son negativos debe de modificarse la ecuación ya que dichos valores negativos carecen de sentido físico (son módulos). Esta modificación puede consistir en sumar π radianes a los ángulos. Como están afectados por la función coseno, cambiará su signo pero no su valor absoluto.

$$(-K_1)\cos\theta_4 - (-K_2)\cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$-K_1\cos\theta_4 + K_2\cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$K_1\cos(\theta_4 + \pi) - K_2\cos(\theta_2 + \pi) + K_3 = \cos(\theta_2 + \pi - \theta_4 - \pi)$$

$$K_1\cos\theta'_4 - K_2\cos\theta'_2 + K_3 = \cos(\theta'_2 - \theta'_4)$$

Ecuación de Freudenstein

La ecuación de Freudenstein obtenida ofrece la coordinación existente entre los ángulos θ_2 y θ_4 del mecanismo. Se puede obtener una relación similar entre los ángulos θ_2 y θ_3 ó θ_3 y θ_4. Las ecuaciones en este caso son las siguientes:

$$\boxed{P_1 \cos\theta_2 + P_2 \cos\theta_3 - P_3 = \cos(\theta_2 - \theta_3)}$$

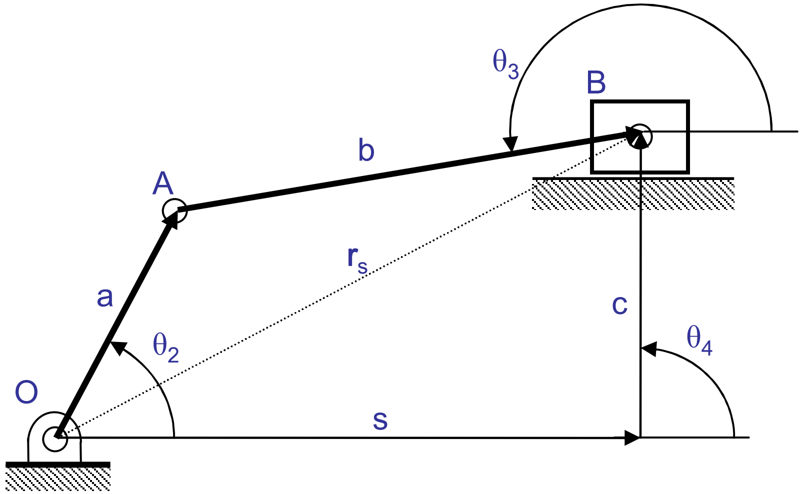
$$P_1 = \frac{d}{c}; \quad P_2 = \frac{d}{a}; \quad P_3 = \frac{a^2 + c^2 + d^2 - b^2}{2ac}$$

$$\boxed{R_1 \cos\theta_4 - R_2 \cos\theta_3 + R_3 = \cos(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$R_1 = \frac{d}{c}; \quad R_2 = \frac{d}{b}; \quad R_3 = \frac{d^2 + b^2 + c^2 - a^2}{2cb}$$

Ecuación de Freudenstein

La ecuación de Freudenstein se puede obtener para otros mecanismos distintos al cuadrilátero articulado como por ejemplo el mecanismo biela-manivela. Así, la ecuación de cierre generada por este mecanismo puede expresarse como sigue,



$$ae^{i\theta_2} + be^{i\theta_3} = d + ce^{i\theta_4}$$

$$\left.\begin{aligned} a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 &= s \\ a\mathrm{sen}\theta_2 + b\mathrm{sen}\theta_3 &= c \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} b\cos\theta_3 &= s - a\cos\theta_2 \\ b\mathrm{sen}\theta_3 &= c - a\mathrm{sen}\theta_2 \end{aligned}\right\}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumándolas posteriormente, se obtiene,

$$b^2 - a^2 - c^2 + 2as\cos\theta_2 + 2ac\mathrm{sen}\theta_2 = s^2$$

Agrupando los términos constantes se obtiene,

$$\boxed{K_1 s\cos\theta_2 + K_2 sen\theta_2 - K_3 = s^2}$$

$$K_1 = 2a; \quad K_2 = 2ac; \quad K_3 = a^2 + c^2 - b^2;$$

Capítulo IV: Tema 1 Síntesis dimensional de mecanismos. Generación de funciones.

4. Síntesis con tres puntos de precisión.

Síntesis de generación de funciones con 3 puntos de precisión

Procedimiento:

Definición del problema: obtener las longitudes de los elementos a, b, c y d de un cuadrilátero articulado para tres posiciones dadas:

ϕ	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3

Solución: Sustituyendo en la ecuación de Freudenstein los 6 valores conocidos se plantea el siguientes sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} K_1\cos\psi_1 - K_2\cos\phi_1 + K_3 &= \cos(\phi_1 - \psi_2) \\ K_1\cos\psi_2 - K_2\cos\phi_2 + K_3 &= \cos(\phi_2 - \psi_2) \\ K_1\cos\psi_3 - K_2\cos\phi_3 + K_3 &= \cos(\phi_3 - \psi_3) \end{aligned}\right\}$$

Síntesis de generación de funciones con 3 puntos de precisión

$$\begin{bmatrix} \cos\psi_1 & -\cos\phi_1 & 1 \\ \cos\psi_2 & -\cos\phi_2 & 1 \\ \cos\psi_3 & -\cos\phi_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\phi_1 - \psi_1) \\ \cos(\phi_2 - \psi_2) \\ \cos(\phi_3 - \psi_3) \end{Bmatrix}$$

$$[S]\{K_i\} = \{\cos(\phi_i - \psi_i)\}$$

$$\boxed{\{K_i\} = [S]^{-1}\{\cos(\phi_i - \psi_i)\}}$$

Síntesis de generación de funciones con 3 puntos de precisión

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{d}{a} \\ K_2 &= \frac{d}{c} \\ K_3 &= \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac} \end{aligned}\right\}$$

Sistema con tres ecuaciones y cuatro incógnitas

Para resolver este último sistema es necesario dar un valor arbitrario a una de las dimensiones. Esto significa que el problema puede tener infinitas soluciones. Evidentemente, el tamaño del mecanismo dependerá del valor arbitrario dado a uno de los elementos.

Se pueden especificar como máximo 3 puntos de precisión. Si se desea 2 puntos de precisión se fija uno arbitrariamente.

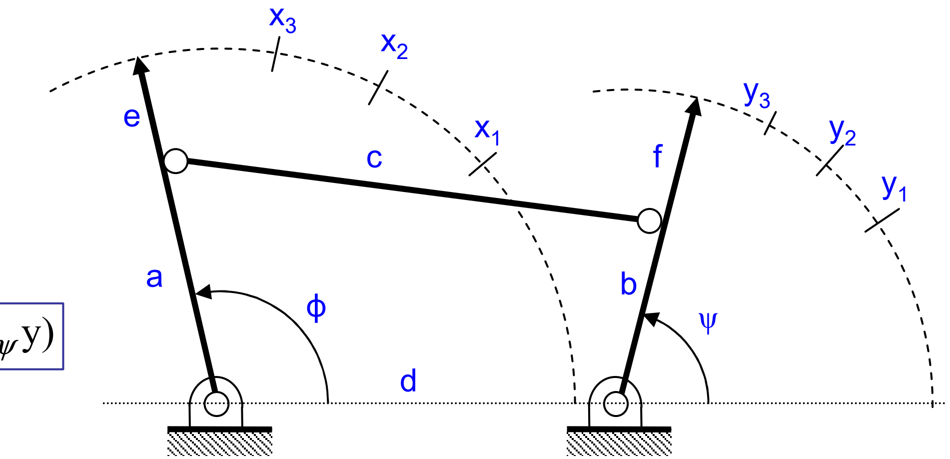
Universidad de Cantabria
Departamento de Ing. Estructural y Mecánica

Síntesis de generación de funciones con 3 puntos de precisión

$$\phi = \frac{x}{a+e} = K_\phi x \qquad K_\phi = \frac{1}{a+e}$$

$$\psi = \frac{y}{b+f} = K_\psi y \qquad K_\psi = \frac{1}{b+f}$$

$$\boxed{K_1 \cos(K_\psi y - K_2 \cos K_\phi x + K_3 = \cos(K_\phi x - K_\psi y)}$$

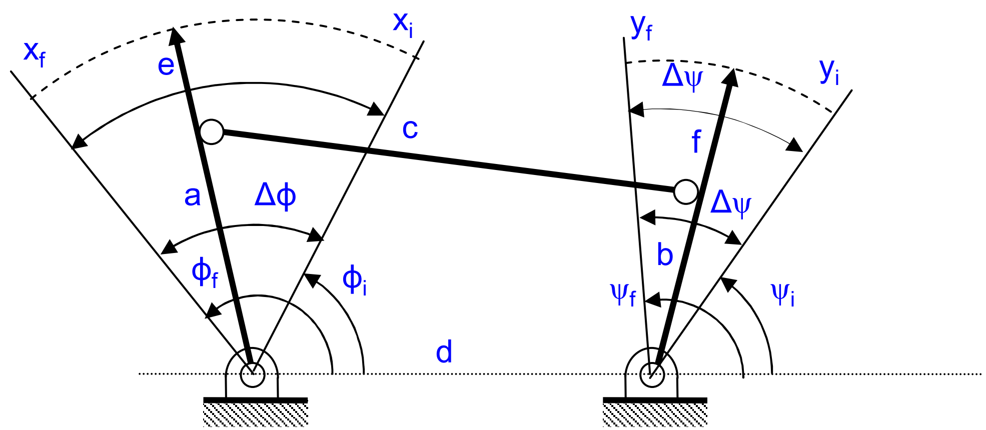


$$\Delta x = R\Delta\phi \qquad \Delta\phi = \frac{\Delta x}{a+e} = K_\phi \Delta x$$

$$\Delta y = R\Delta\psi \qquad \Delta\psi = \frac{\Delta y}{b+f} = K_\psi \Delta y$$

$$\boxed{K_\phi = \frac{\Delta\phi}{\Delta x}} \qquad \boxed{K_\psi = \frac{\Delta\psi}{\Delta y}}$$

Factores de escala



Síntesis de generación de funciones con 3 puntos de precisión

Procedimiento:

Definición del problema: obtener las longitudes de los elementos a, b, c y d de un cuadrilátero articulado para cumplir con la función:

$$y = f_d(x)$$

Solución:

1. Se establecen 3 puntos de precisión:

x	x_1	x_2	x_3
y	y_1	y_2	y_3

2. Se establecen los valores de los factores de escala. Esto puede hacerse de dos formas:
   - Fijando arbitrariamente las longitudes de las barras.
   - En función del rango de movimiento.

$$K_\phi = \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \frac{1}{a+e} \qquad K_\psi = \frac{\Delta\psi}{\Delta y} = \frac{1}{b+f}$$

Síntesis de generación de funciones con 3 puntos de precisión

3. Se plantean las ecuaciones (sistema de 3 incógnitas con 3 ecuaciones) y se resuelve:

$$\left.\begin{aligned}
K_1\cos(K_\psi y_1) - K_2\cos(K_\phi x_1) + K_3 &= \cos(K_\phi x_1 - K_\psi y_1)\\
K_1\cos(K_\psi y_2) - K_2\cos(K_\phi x_2) + K_3 &= \cos(K_\phi x_2 - K_\psi y_2)\\
K_1\cos(K_\psi y_3) - K_2\cos(K_\phi x_3) + K_3 &= \cos(K_\phi x_3 - K_\psi y_3)
\end{aligned}\right\}$$

4. Se obtienen las dimensiones: a, b, c y d, exactamente igual que en el procedimiento anterior.

5. Finalmente se obtienen los valores de e y f.

$$e = \frac{1}{K_\phi} - a \qquad f = \frac{1}{K_\psi} - b$$

Capítulo IV: Tema 1
Síntesis dimensional de mecanismos. Generación de funciones.

5. Aumento del número de puntos de precisión.

Aumento del número de puntos de precisión

El número de puntos de precisión puede aumentarse incluyendo más incógnitas en las ecuaciones planteadas. Sin embargo, el aumento del número de incógnitas aumenta también la dificultad del sistema de ecuaciones, conduciendo a sistemas fuertemente no lineales, difíciles de resolver incluso con la ayuda de un ordenador.

A continuación se muestran algunos ejemplos de cómo puede aumentarse el número de incógnitas (puntos de precisión), aunque los ejemplos presentados aquí no son los únicos procedimientos.

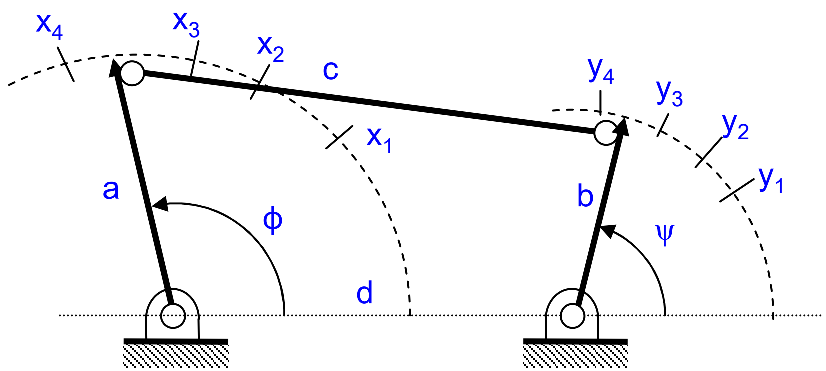
Aumento del número de puntos de precisión

4 puntos de precisión

Se eliminan las barras e y f.

$$\frac{d}{a}\cos\left(\frac{y}{b}\right)-\frac{d}{b}\cos\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{a^2-b^2+c^2+d^2}{2ac}=\cos\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

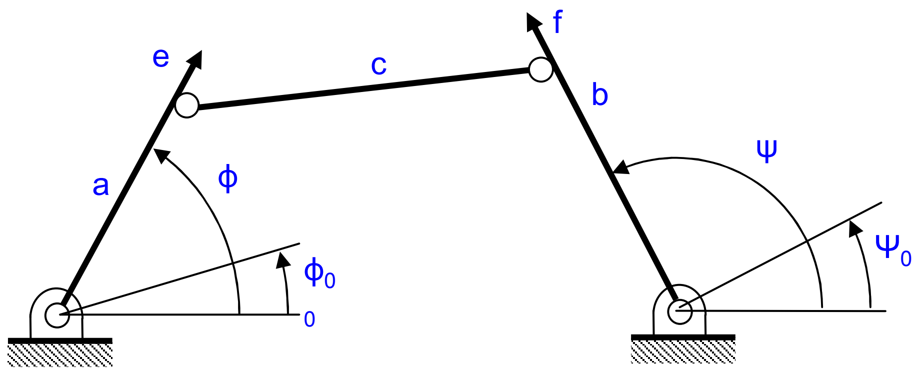
Incógnitas: a, b, c y d.



5 puntos de precisión

$$K_1\cos(\psi+\psi_0)-K_2\cos(\phi+\phi_0)+K_3=$$
$$\cos(\psi+\psi_0-\phi-\phi_0)$$

Incógnitas: K_1, K_2, K_3, ϕ_0, ψ_0.



Aumento del número de puntos de precisión

6 puntos de precisión

Se eliminan las barras e y f.

$$\frac{d}{a}\cos\left(\frac{y}{b}+\frac{y_0}{b}\right)-\frac{d}{b}\cos\left(\frac{x}{a}+\frac{x_0}{a}\right)+\frac{a^2-b^2+c^2+d^2}{2ac}=\cos\left(\frac{x}{a}-\frac{x_0}{a}-\frac{y}{b}-\frac{y_0}{b}\right)$$

Incógnitas: a, b, c, d, x_0 y y_0.

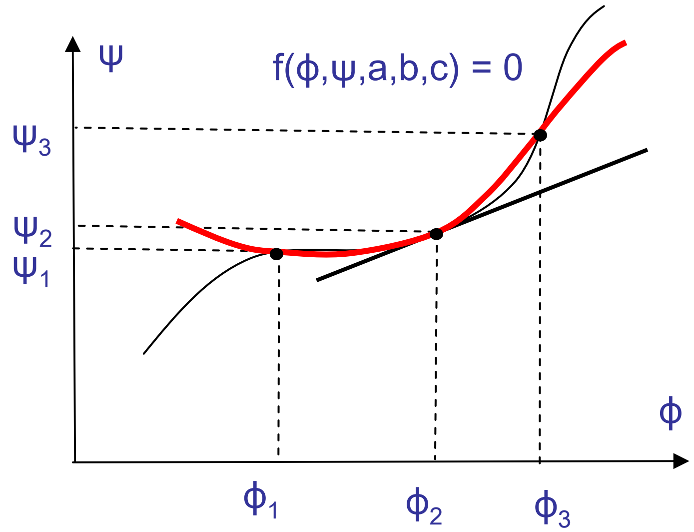
Capítulo IV: Tema 1
Síntesis dimensional de mecanismos. Generación de funciones.

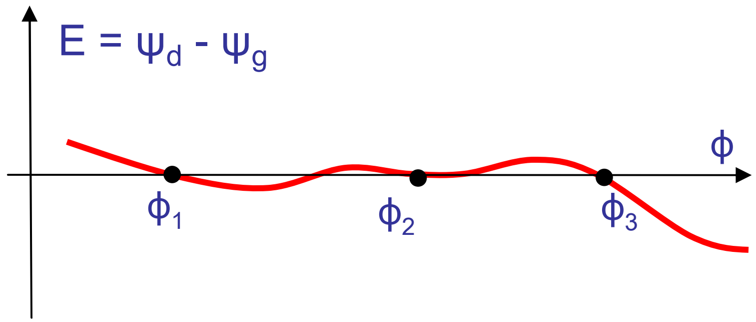
6. Derivadas de precisión.

Derivadas de precisión

Si se desea obtener mayor precisión en el problema de síntesis de generación de funciones se puede añadir como condición el tener en uno o varios puntos derivadas de precisión. A este criterio se le denomina síntesis de derivadas de precisión.

Cada imposición de derivada de precisión supone el planteamiento de una nueva ecuación. Como el número de parámetros de diseño (longitudes de las barras) permanece inalterado se debe reducir el número de puntos de precisión por cada una de las derivadas que se añadan al problema.





Derivadas de precisión

$$\psi = \psi(\phi)$$

$$\boxed{K_1 \cos\psi - K_2 \cos\phi + K_3 = \cos(\psi - \phi)}$$

Puntos de precisión

$$\boxed{K_1 \frac{d\psi}{d\phi} \operatorname{sen}\psi - K_2 \operatorname{sen}\phi = \left(\frac{d\psi}{d\phi} - 1\right) \operatorname{sen}(\psi - \phi)}$$

Derivadas 1ª de precisión

$$K_1 \frac{d^2\psi}{d\phi^2} \operatorname{sen}\psi + K_1 \left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)^2 \cos\psi - K_2 \cos\phi = \frac{d^2\psi}{d\phi^2} \operatorname{sen}(\psi - \phi) + \left(\frac{d\psi}{d\phi} - 1\right)^2 \cos(\psi - \phi)$$

Reordenando

$$\boxed{K_1 \left[\frac{d^2\psi}{d\phi^2} \operatorname{sen}\psi + \left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)^2 \cos\psi\right] - K_2 \cos\phi = \frac{d^2\psi}{d\phi^2} \operatorname{sen}(\psi - \phi) + \left(\frac{d\psi}{d\phi} - 1\right)^2 \cos(\psi - \phi)}$$

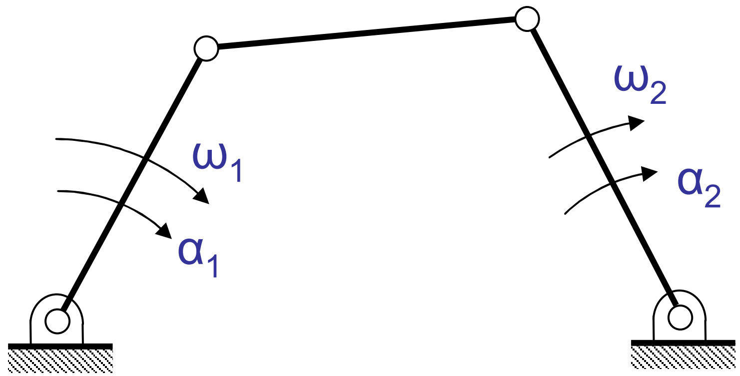
Derivadas 2ª de precisión

Derivadas de precisión

Las derivadas presentes en la formulación se pueden relacionar fácilmente con las magnitudes cinemáticas que intervienen en el problema. A continuación se expresan estas magnitudes en un mecanismo cuadrilátero articulado.

$$\omega_1 = \frac{d\phi}{dt} \qquad \alpha_1 = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\omega_2 = \frac{d\psi}{dt} \qquad \alpha_2 = \frac{d^2\psi}{dt^2}$$



$$\frac{d\psi}{d\phi} = \frac{d\psi}{dt}\frac{dt}{d\phi} = \frac{\dfrac{d\psi}{dt}}{\dfrac{d\phi}{dt}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = A$$

$$\frac{d^2\psi}{d\phi^2} = \frac{dA}{d\phi} = \frac{dA}{dt}\frac{dt}{d\phi} = dA\frac{1}{\omega_1} = \frac{d\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{\omega_1} = \frac{\alpha_2\omega_1 - \omega_2\alpha_1}{\omega_1^3} = \frac{\alpha_2 - A\alpha_1}{\omega_1^2} = B$$

Derivadas de precisión

Procedimiento:

Se desean obtener:

- n puntos de precisión.
- m puntos de derivadas 1ª de precisión.
- p puntos de derivadas 2ª de precisión.
- etc.

1. Se plantean:

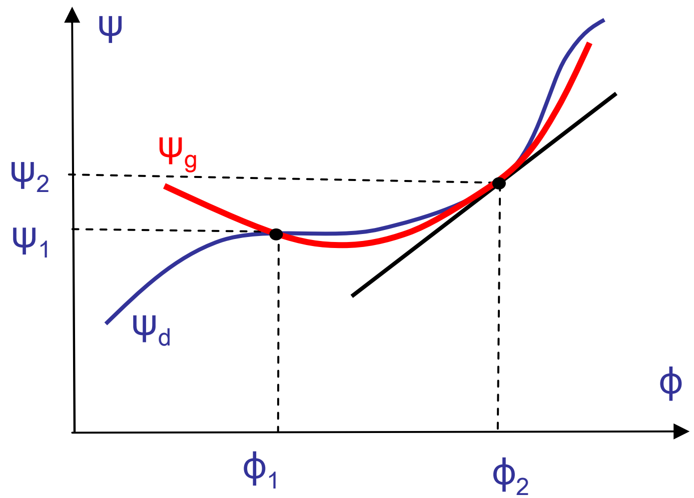
$$\left.\begin{array}{ll}
\text{n ecuaciones:} & K_1\cos\psi - K_2\cos\phi + K_3 = \cos(\psi-\phi) \\
\text{m ecuaciones:} & K_1\dfrac{d\psi}{d\phi}\operatorname{sen}\psi - K_2\operatorname{sen}\phi = \left(\dfrac{d\psi}{d\phi}-1\right)\operatorname{sen}(\psi-\phi) \\
\text{p ecuaciones:} & K_1\left[\dfrac{d^2\psi}{d\phi^2}\operatorname{sen}\psi + \left(\dfrac{d\psi}{d\phi}\right)^2\cos\psi\right] - K_2\cos\phi = \dfrac{d^2\psi}{d\phi^2}\operatorname{sen}(\psi-\phi) + \left(\dfrac{d\psi}{d\phi}-1\right)^2\cos(\psi-\phi) \\
\ldots &
\end{array}\right\}$$

Derivadas de precisión

2. Se resuelve el sistema de ecuaciones teniendo en cuenta que el número de incógnitas (parámetros de diseño) debe ser igual al número de ecuaciones planteadas en el sistema anterior. Esto es: n + m + p +…

Ejemplo: 2 puntos de precisión y 1 derivada 1ª de precisión en el punto 1:

$$\left.\begin{aligned}
&K_1 \cos\psi_1 - K_2 \cos\phi_1 + K_3 = \cos(\phi_1 - \psi_2) \\
&K_1 \cos\psi_2 - K_2 \cos\phi_2 + K_3 = \cos(\phi_2 - \psi_2) \\
&K_1 \left.\frac{d\psi}{d\phi}\right|_{\phi_1} \operatorname{sen}\psi_1 - K_2 \operatorname{sen}\phi_1 = \left(\left.\frac{d\psi}{d\phi}\right|_{\phi_1} - 1\right)\operatorname{sen}(\psi_1 - \phi_1)
\end{aligned}\right\}$$



Capítulo IV: Tema 1 Síntesis dimensional de mecanismos. Generación de funciones.

7. Generalización de la ecuación de Freudenstein.

Generalización de la ecuación de Freudenstein

Generalización de la ecuación de Freudenstein

La ecuación de Freudenstein no puede considerarse exclusiva de un determinado tipo de mecanismo, si no que puede aplicarse a cualquier tipo de mecanismo que cumpla una serie de requisitos. En general, si en un mecanismo cualquiera la relación entre la entrada y la salida puede expresarse linealmente en función de n parámetros de diseño, K_i (i=1,2,…,n), se puede plantear la siguiente expresión,

$$K_1 f_1(\theta_a,\theta_b) + K_2 f_2(\theta_a,\theta_b) + \ldots + K_n f_n(\theta_a,\theta_b) = G_1(\theta_a,\theta_b)$$

Siendo aplicables, pues, todos los conceptos relativos a la ecuación de Freudenstein vistos anteriormente y desarrollados en los apartados siguientes.