CAPITULO 9. TRANSFORMADA DE FOURIER

9.1. Transformada de Fourier

Sea una función definida en un intervalo finito y desarrollable en serie de Fourier, por tanto , la podemos representar como una superposición infinita de ondas armónicas. Podemos extender la función a toda la recta real mediante una prolongación periódica. Esto es, si f está definida en el intervalo (a, b), intervalo fundamental, de longitud T, entonces imponemos la condición

$$f(t + nT) = f(t), \quad t \in (a, b) \quad , \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Nuestro propósito es la representación de una función aperiódica. Veremos que, bajo ciertas condiciones, f se puede representar no mediante una serie de Fourier sino mediante una integral, la integral de Fourier

Supongamos que f (t) está definida en todo R, es aperiódica y goza de las siguientes propiedades

1. Lisa a trozos, es decir, la función y su derivada son continuas a trozos, en cualquier intervalo finito.

2. En los puntos singulares el valor de la función es la media aritmética de los límites laterales.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ es convergente.

Definimos la transformada de Fourier de f como

$$F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\, t}\, dt \qquad (1)$$

Decimos que $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función f (t) (también denominada imagen de Fourier de f (t))

Para la transformada de Fourier, existe una transformada inversa

$$f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\,\omega\, t}\, dt$$

Decimos que f (t) es la representación de la función en el dominio del tiempo, mientras $F(\omega)$ es la representación de la función en el dominio de frecuencias.

Otra notación frecuentemente utilizada es la siguiente:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-i\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\ dt$$

9.2. Propiedades de la transformada de Fourier

9.2.1. Linealidad. Se demuestra que si $G(\omega)$ y $H(\omega)$ son las transformadas de Fourier de las funciones g(t) y h(t) y {a, b} son constantes

$$F\ (a\ g(t) + b\ h(t)) = a\ G(\omega) + b\ H\ (\omega)$$

9.2.2. Transformada de la derivada .Se demuestra que si F (ω) es la transformada de Fourier de la función f(t) , se tiene

$$\boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t})\right] = (\boldsymbol{i}\ \omega)^{\boldsymbol{k}}\ \boldsymbol{F}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})] \quad , \qquad \boldsymbol{k} = \mathbf{1}\ ,\mathbf{2},\mathbf{3}\ ....$$

9.2.3. Propiedad del cambio de escala Se demuestra que si F (ω) es la transformada de Fourier de la función f (t), y $a\in R$, entonces se tiene

$$\boldsymbol{F}[\ \boldsymbol{f}(\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{t})] = \frac{\mathbf{1}}{|\ \boldsymbol{a}\ |}\ \mathbf{F}\ (\ \frac{\omega}{\boldsymbol{a}})$$

9.2.4. Simetría Se demuestra que si F (ω) es la transformada de Fourier de la función f (t), entonces se tiene

$$F[F(t)] = 2\ \pi\ f(-\ \omega).$$

9.2.5. Desplazamiento de frecuencia Se demuestra que si F (ω) es la transformada de Fourier de la función f (t), enfonces se tiene

$$F[e^{i\ \omega_0\ t}\ f\ (t)]=F(\omega\ -\ \omega_0\ )$$

9.2.6. Desplazamiento en el tiempo. Si $F[f(t)] = F(\omega)$, enfonces se tiene

$$F[f(t-t_0)] = e^{-i\ \omega t_0}\ F(\omega\ )$$

9.2.7. Se demuestra que si $F[f(t)] = F(\omega)$, entonces se tiene

$$F[f(-t)] = F(-\omega)$$

9.3. Convolución

Se define la convolución de dos funciones f (t) y g (t) como

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(t-s)ds$$

El teorema de convolución en el tiempo asegura que la transformada de una convolución es el producto ordinario de las transformadas individuales, es decir si $F[f(t)] = F(\omega)$ y $F[g(t)] = G(\omega)$, entonces se tiene

$$F[f * g] = F(\omega)\ G(\omega)$$

Observemos que cualquier función se puede escribir como la convolución de ella misma con la función delta

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t-u)du = f(t) * \delta(t)$$

9.4. Transformadas de Fourier en senos y cosenos

Vamos a obtener ahora una transformada definida solamente en el intervalo $[0, \infty)$. Suponemos f definida en toda la recta real.

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(\omega\, \mathrm{t}) - \mathrm{i\, sen}\ (\omega\, \mathrm{t})]\mathrm{dt}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) cos\omega\ t\ dt\ - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ sen\ \omega\ t\ dt$$

Si f (t) es una funcion real y par

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) cos\omega\ t\ dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t) \cos\omega t\ \ dt$$

Ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ sen\ \omega\ t\ dt = 0$$

De la misma forma si f(t) es impar

$$\mathrm{F}[f(t)] = -2\, i \int_0^{\infty} f(t) sen\, \omega t\, dt$$

Vamos a definir ahora la transformada de Fourier en cosenos como

$$F_C[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) cos\omega\, t\, dt = F_C(\omega)$$

Vamos a definir ahora la transformada de Fourier en senos como

$$F_S[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) sen\omega\, t\, dt = F_S(\omega)$$

Si esta integral en cosenos es igual a f en [0, ∞) se tiene

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_c\,(\omega) \cos \omega t\, dt$$

De la misma forma

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_S\,(\omega)\,\mathrm{sen}\, \omega t\, dt$$

Fórmulas de inversión para la transformada de Fourier en cosenos y senos

Ejemplo 1. Calculemos la transformada seno de la función f (t) = e $^{-t}$ definida en $[0,\infty)$

Transformada seno

$$\mathrm{F_s}(\omega) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sen}\ \omega\, t\, dt = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

La fórmula inversa nos asegura que

$$\mathrm{e}^{-t} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega\,\mathrm{sen}\ \omega\, t\ dt}{1+\omega^2}$$

Ejemplo 2. Dada la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq k \\ 0 & t > k \end{cases}$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^k \cos \omega t \, dt = \frac{sen\,(\omega k)}{\omega}$$

$$F_s[f(t)] = \int_0^k \operatorname{sen} \omega t \, dt = \frac{1}{\omega}\,[1 - \cos \omega k]$$

9.5. Transformadas de algunas funciones

9.5.1. Función Delta de Dirac

$$F(\delta(t - t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t}\, dt = e^{-i\omega t_0}$$

En particular: $F(\delta(t)) = 1$

La función δ se representa como

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos \omega t \, d\omega$$

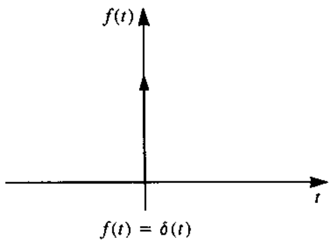

Fig 4. Función delta de Dirac

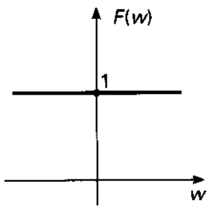

Fig.5.Espectro de amplitud de la función delta de Dirac

9.5.2. Función Periódica

$$F\left[e^{ikt}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(k-\omega)} dt = 2\pi\,\delta(k - \omega)$$

Con el resultado anterior podemos hallar la transformada de cualquier armónico

$$F[\operatorname{sen} k\,t] = \frac{1}{2i}\left[e^{ikt} - e^{-ikt}\right] = \frac{\pi}{i}\left[\delta(k-\omega) - \delta(k+\omega)\right]$$

$$F[\cos k\,t] = \frac{1}{2}\left[e^{ikt} + e^{-ikt}\right] = \pi\left[\delta(k-\omega) + \delta(k+\omega)\right]$$

Ahora sea f de período T y desarrollable en serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=} \alpha_n\, e^{i\,n\,\omega_0 t}$$

Donde $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ es la frecuencia fundamental. Hallemos su transformada

$$F[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\,\omega_0)$$

La transformada es una secuencia de pulsos equidistantes. La distancia entre dos pulsos consecutivos es ω_0. El espectro es discreto, por tratarse de una función periódica.

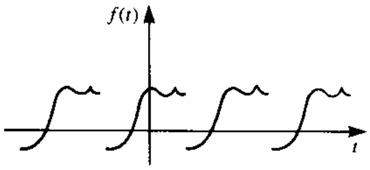

Fig.6.Función periódica

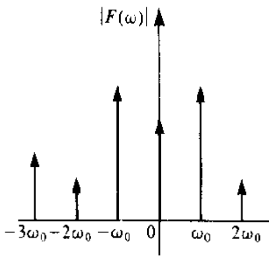

Fig.7.Espectro de amplitud de una función periódica

9.5.3. Pulso rectangular

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$$

$$F(\omega) = 2\int_0^a \cos\omega\, t\, dt = \frac{2\operatorname{sen}\omega\, a}{\omega}$$

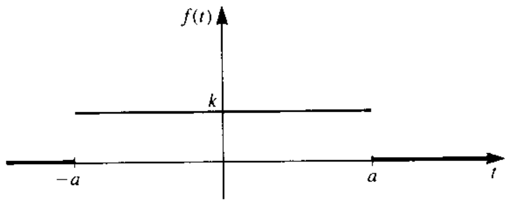

Fig 8.Función pulso rectangular

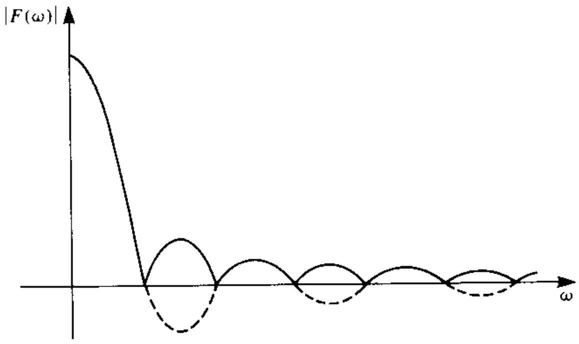

Fig. 9. Espectro de amplitud de un tren de pulsos rectangulares

9.5.4. Tren periódico de pulsos rectangulares

Supongamos que la anchura de cada pulso es 2a y T el período del tren. Los coeficientes de Fourier están dados por

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-a}^{a} e^{-in\,\omega_0 t}\,dt = \frac{2}{T}\int_0^a \cos n\omega_0\ t\ dt = \frac{2}{T}\int_0^a \cos n\ \omega_0\ t\ dt = \frac{sen\,n\ \omega_0\ a}{n\pi}$$

donde $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ es la frecuencia fundamental.

$$F[\mathrm{tren}] = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,n\,\omega_0\,a}{n}\ \delta(\omega - n\,\omega_0)$$

9.5.5. Tren infinito de impulsos

Definimos un tren infinito de impulsos como

$$\delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n\,T)$$

Al ser la función delta de Dirac periódica de periodo T , la expresamos por la serie de Fourier compleja

$$\delta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \; e^{i\,n\,\omega_0\,t}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_0^T \delta(t) e^{-i\,n\,\omega_0 t}\,dt$$

Ahora bien, por la propiedad de filtro de la función delta de Dirac

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\;e^0 = \frac{1}{T}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n\,T) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\; e^{in\,\omega_0\;t}$$

Por otra parte, sabemos que $F[1] = 2\,\pi\;\delta(\omega)$ y utilizando la propiedad de desplazamiento de la frecuencia, se tiene

$$F[\delta_T(t)] = F\left[\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\,n\,\omega_0\,t}\right] = \omega_0 \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\,\omega_0)$$

9.6. Teorema de Parseval

Sea F (ω) la transformada de Fourier de f (t) , entonces se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\boldsymbol{f(t)}]^2\,\boldsymbol{dt} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{F(\,\omega)}|^2\;\boldsymbol{d\omega}$$

El primer miembro de esta expresión representa la energía total de la señal f (t), $|\boldsymbol{F(\,\omega)}|^{\mathbf{2}}$ es el espectro de potencia de la señal.

Ejercicios propuestos

1. Calcular la transformada de Fourier de la función $\boldsymbol{f(t) = e^{-a\,|t|}}\,,\boldsymbol{a > 0}$

$$F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\;\; e^{-i\,\omega\,t} dt$$

$$F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\;\;(\cos\omega\,t - i\;sen\;\omega\,t)\,dt$$

Ahora bien, por la propiedad de filtro de la función delta de Dirac

$e^{-a|t|}$ cos ωt es una función par , $e^{-a|t|}$ sen ωt es una función impar , por tanto se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\, sen\ \omega t\ dt = 0$$

$$F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cos \omega t\ dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-a\,t} \cos \omega t\ dt = \frac{2\,a}{\omega^2 + a^2}$$

2. Calcular la transformada de Fourier de la función $\boldsymbol{f(t) = e^{-a\,t^2}}$

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\,t^2}\ e^{-i\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a\,t^2 + i\,\omega t)}\, dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\,a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

3. Calcular la transformada de Fourier de la función $f(t) = \begin{cases} \mathbf{1} & |\boldsymbol{t}| < \boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} & |\boldsymbol{t}| > \boldsymbol{a} \end{cases}$

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\,\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\,\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-\,i\,\omega t}}{-i\,\omega}\right]_{-a}^{a} = \frac{2\ sen\ \omega\, a}{\omega}$$