CAPITULO 7.SERIES DE FOURIER

La publicación por Fourier (1768- 1830) de la " Teoría analítica del calor ", fue de una influencia decisiva en las matemáticas posteriores. Se supone en ella que cualquier función puede desarrollarse en serie de senos y cosenos (serie de Fourier) .Ya Daniel Bernouilli había considerado series de este tipo en la resolución del problema de la cuerda vibrante y Euler (1707-1783) había obtenido los coeficientes de sen kx y cos kx en el desarrollo mencionado, pero fue a partir de Fourier cuando la posibilidad de expresar una función mediante una serie trigonométrica empezó a ser ampliamente discutida. El escepticismo de los que no veían clara la cuestión de convergencia se disipa cuando los desarrollos de Fourier de funciones sencillas para ciertos valores particulares conducen resultados numéricos conocidos como verdaderos por haber sumado ya Euler con anterioridad. Posteriormente Poisson (1781-1840) y Cauchy (1789-1857) intentaran justificar la convergencia, siendo el primer teorema valido de convergencia de series de Fourier debido a Dirichlet (1805-1859)

7.1. Sistemas de funciones ortogonales

Sea la sucesión de funciones definidas y continuas en el intervalo [a, b]

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

De forma que si m y n son números enteros positivos (0, 1,2,……) se verifica

$$\int_a^b f_m\ (x).\ f_n(x)dx = 0 \quad si \quad m \neq n$$

$$\int_a^b f_m\ (x).\ f_n(x)dx = k_n \quad si \quad m \neq n$$

La sucesión de funciones definidas por (1), forman un sistema ortogonal de funciones en el intervalo (a, b), cuando k_n =1, el sistema se llama normal .La normalización de un sistema de funciones ortogonales se consigue dividiendo cada función por $\sqrt{k_n}$

Supongamos definida una función f (x), por una serie uniformemente convergente en (a, b), f(x) será una función continua, ya que toda serie uniformemente convergente define una función continua en su intervalo de convergencia

$$f(x)= a_0f_0(x) + a_1f_1\ ,(x) + a_2f_2(x) + a_3f_3(x) +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Si las funciones $f_n(x)$, forman un sistema ortogonal de funciones, la serie (2) es un serie de Fourier de f (x), los coeficientes a_n, se obtienen multiplicando los términos de la ser (2) por $f_n(x)$ e integrando.

Ejemplo1. Las funciones trigonométricas (cos nx, sen nx) forman un sistema ortogonal de funciones en el intervalo $(-\pi, \pi)$ ya que se verifica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\, n\, x\ \ cosm\, x\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\, n^2\, x\ \ dx = \pi$$

Este sistema ortogonal de funciones se normaliza, dividiendo cada función por $\sqrt{\pi}$, luego el sistema

$$\{\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} cosn\, x\ ,\ \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen\, n\, x\ \}$$

es un sistema normal de funciones en (- π, π)

7.2. Aproximación de funciones por la suma de términos de un sistema ortogonal

Vamos a suponer que deseamos aproximar una función f(x), continua en [a, b] por medio de la funciones continuas dadas por $f_i(x)$ (i = 0, 1, 2,.. n). Consideremos la expresión

$$S_n(x) = a_0\, f_0(x) + a_2\, f_1(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n\, f_n(x)$$

Los coeficientes $a_0, a_1, \ldots \ldots a_n$ han de ser calculados con la condición de que la aproximado a f (x) sea la mejor posible, para calcular el error que se comete al aproximar la función, por S_n (x), vamos a aplicar el método de los mínimos cuadrados .El error que se comete será

$$E = \int_a^b (a_0\, f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots \ldots \ldots + a_n f_n(x) - f(x))^2 dx$$

La condición de que el error sea mínimo, nos lleva a las siguientes condiciones

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial a_0} = \int_a^b (a_0\, f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots \ldots \ldots + a_n f_n(x) - f(x))\, f_0\,(x)\, dx = 0$$

…………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial a_n} = \int_a^b (a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots \ldots .. + a_n f_n(x) - f(x))\, f_n(x)\, dx = 0$$

El sistema anterior adopta la forma

$$a_0 \int_a^b f_0(x) f_0(x) dx + a_1 \int_a^b f_0(x) f_1(x) dx + \cdots \ldots + a_n \int_a^b f_0(x) f_n(x) dx = \int_a^b f(x) f_0(x) dx$$

………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………….

$$a_0 \int_a^b f_0(x) f_n(x) dx + a_1 \int_a^b f_n(x) f_1(x) dx + \cdots \ldots + a_n \int_a^b f_n(x) f_n(x) dx = \int_a^b f(x) f_n(x) dx$$

El sistema de funciones es ortogonal, los coeficientes serán

$$a_0 = \frac{1}{k_0} \int_a^b f(x) f_0(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{k_n} \int_a^b f(x) f_n(x) dx$$

Fourier empleo el sistema (cos n x, sen n x) de funciones ortogonales para aproximar funciones periódicas, por lo que a los coeficientes a_n se les denomina coeficientes de Fourier de la función f(x) respecto al sistema ortogonal de funciones dado. Cuando $n \to \infty$, la función puede ser representada por la serie correspondiente que se obtiene y el sistema ortogonal de funciones se dice completo.

7.3. Series trigometricas o de Fourier

Se llaman series trigonométricas o de Fourier, a las series que se obtienen del sistema ortogonal de funciones 1, cos x, sen x, cos 2 x, sen 2 x..........

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos(2x) + b_2 \operatorname{sen}(2x) + \ldots\ldots\ldots + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \qquad (3)$$

Los coeficientes a_i ,b_i son constantes (i = 0, 1, 2…n), cuando la serie (3) es convergente representa una función de periodo 2 π . Si una función es finita y continua en (0, 2 π) o en (- π , π), siempre se puede desarrollar en una serie convergente de la forma (3)

Cuando f (x) presenta un intervalo de continuidad (a, b), podemos transformar dicho intervalo en el (0, 2 π) mediante el cambio de variable

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{t}{2\pi} \tag{4}$$

Este camino de variable, hace corresponder al intervalo (a, b) de x, el (0, 2π) de la nueva variable t. De la misma forma el cambio de variable:

$$\frac{2x-b-a}{b-a} = \frac{t}{\pi} \tag{5}$$

Hace corresponder al intervalo (a, b) el intervalo ($-\pi$, π)

La serie (3) no es aplicable para los valores límites: ($-\pi$, π) de x, para los cuales la serie toma el valor

$$\frac{a_0}{2} - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \tag{6}$$

Se demuestra que la suma de la serie dada por la expresión (6) es la media aritmética $\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$. Asimismo se demuestra que la serie obtenida al integrar (3) término a término es convergente y tiene por suma

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

7.4. Calculo de los coeficientes de las series de Fourier

Para, calcular a_0, multipliquemos los dos términos de la serie (3) por dx, e integremos de ($-\pi$, π), todas las integrales del segundo miembro de dicha serie, se anulan, excepto la que multiplica a_0.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi \ a_0 \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{7}$$

Para calcular a_n multipliquemos los dos términos de la serie, por cos nx e integremos de $(-\pi , \pi)$ todas las integrales del segundo miembro se anulan excepto el factor que multiplica a_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 \ n \, x \, dx = a_n \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx \ dx \tag{8}$$

ya que sabemos que si m y n son enteros positivos diferentes se verifica

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x \cos m x \, dx = 0$$

y si m y n son dos enteros positivos iguales o distintos se verifica

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} m x \cos n x \, dx = 0$$

Dando a n valores (0, 1, 2,3...) en (8), se obtienen todos los coeficientes de los cosenos. Análogamente, se obtiene b_n, multiplicando los dos términos de (3) por sen nx, e integrando se verifica

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} n x \, dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} sen^2 \; n \, x \, dx = b_n \pi \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen \; nxdx \tag{9}$$

Ya que sabemos que si m y n son dos enteros positivos diferentes se verifica

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} n x \operatorname{sen} m x \, dx=0$$

7.5. Procedimiento general para desarrollar una función en serie de Fourier

Condiciones suficientes para que f (x) sea desarrollable serie de Fourier: Teorema de Dirichlet

Si una función f (x) de periodo 2π es continua en (0, 2 π) o presenta en dicho intervalo a lo sumo un numero finito de discontinuidades finitas de primera especie, así como un numero finito de máximos y mínimos relativos ,la serie de Fourier, que se obtiene aplicando las formulas (7,8,9) es convergente y tiene por suma f (x) en los puntos en que es continua, en los puntos donde la función es discontinua la suma de la serie es la ordenada media del salto.

Observación. Si se busca la representación de f(x) en el intervalo total 2π , los coeficientes del desarrollo se determinaran de modo único, si se quiere hacer la representación en un intervalo menor, estos podrán obtenerse de infinitas maneras.

7.6. Representación de dos o más funciones por una misma serie

Sean $g_1(x)$, $g_2(x)$ dos funciones continuas en el intervalo (a, a + 2π) .Sea c un punto de dicho intervalo, elegido de forma que, una función auxiliar f (x), sea igual a $g_1(x)$ en (a, c) e igual a g_2 (x) entre (c, a+ 2π). Al ser f (x) continua en (a, c) así como en (c, a + 2π) salvo la posible discontinuidad en c, se podrá desarrollar en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se obtiene así una serie de Fourier, que en (a, c) representa a g_1 (x) y en (c, a $+2\pi$) representa a g_2 (x).Por tanto: Si se quiere representar una función en un intervalo menor que 2π , se puede obtener la representación de infinitas maneras. Así si se quiere representar g (x) en (0, 2π), siendo c < 2π, se considera una función auxiliar f (x) que sea idéntica a g (x) en (0, c) y adopte una forma arbitraria en (c, 2π). La representación de esta función por una serie de Fóurier, representa a g(x) en (0, c).

7.7. Desarrollo de una función en serie de senos o cosenos

Se trata de obtener una serie de Fóurier de cosenos en el intervalo total, para ello vamos a considerar una función par. Sea la función auxiliar f (x) tal que sea igual a la función g (x) entre (0,π) e igual a g (-x) entre (- π , 0). Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & 0 \le x \le \pi \\ g(-x) & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

Desarrollemos f (x) en serie de Fóurier, por ser una función par, $b_n = 0$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\,x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos n\,x\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

Luego para valores de x $\in$ (- π , π) se obtiene la serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \ldots.$$

Pero como f(x) es igual a g(x) entre 0 y π

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \ldots.$$

El resultado obtenido solo es válido en el intervalo (0, π)

De la misma forma se podrá obtener una serie solo de senos, si la función es impar se tiene

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad 0 \le x \le \pi \\ -g(-x) & , \ -\pi \le \ x \le 0 \end{cases}$$

En este caso por ser la función impar se verifica: $a_n = 0$, $a_0 = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\ n\ x\ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) sen\ n\ x\ dx$$

7.8. Casos particulares en que se simplifica el desarrollo en serie de Fourier

Primer caso. Si la función f (x) es impar: f (-x) = - f (x).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ cos\ n\ x\ dx = 0$$

La serie de Fourier, solo tiene términos en senos, es decir será de la forma

$$f(x) = b_1 sen\ x + b_2 sen\ 2x + b_3 sen\ 3\ x + \cdots ....$$

Segundo caso. Si la función f (x) es par: f (-x) = f (x)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ sen\ n\ x\ dx = 0$$

La serie de Fourier correspondiente solo tiene el término independiente y términos en coseno es decir será de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ...$$

Tercer caso. La función f (x) es alternada: es decir f(x $+\pi$)= - f(x), las cuales son un caso corriente en Electrotecnia. En este caso la serie de Fourier correspondiente solo tiene términos en senos y cosenos impares, ya que los pares se anulan, en efecto

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ cos\ 2\ n\ x dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x) cos2\ nx\ dx + \int_{0}^{\pi} f(x) cos2\ nx\ dx$$

Calculemos: $\int_0^{\pi} f(x)\, cos\, 2\, n\, x\, dx$

Cambio de variable: x= t+π

$$a_n = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x) cos2\ nx\ dx - \int_{-\pi}^{0} f(x) cos2\ nt\ dt) = 0$$

Operando de la misma forma con b_n, se obtiene

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\ 2\ n\ x\ dx = \frac{1}{\pi}\ (\int_{-\pi}^{0} f(x) sen2\ nx\ dx + \int_0^{\pi} f(x) sen2\ nx\ dx) = 0$$

Calculemos

$$\int_0^{\pi} f(x) sen2\ nx\ dx)$$

Cambio de variable: x = π+t

$$b_n\ = \frac{1}{\pi}\ (\int_{-\pi}^{0} f(x) sen\ 2\ n\ x\ dx + \int_{-\pi}^{0} f(t+\pi) sen\ 2\ n\ (t+\pi) dx=$$

$$\frac{1}{\pi}\ (\int_{-\pi}^{0} f(x) sen\ 2\ n\ x\ dx - \int_{-\pi}^{0} f(t) sen\ 2\ n\ tdt = 0$$

Análogamente se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx)$$

Calculemos

$$\int_0^{\pi} f(x) dx$$

Cambio de variable x = t +π

Luego si f(x) es alternada, el desarrollo solo consta de armónicos impares.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x) dx + \int_{-\pi}^{0} f(t+\pi) dt = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x) dx - \int_{-\pi}^{0} f(t) dt = 0$$

Luego si f(x) es alternada, el desarrollo solo consta de armónicos impares

$$f(x) = a_1\, cos\, x + b_1\, sen\, x + a_{31}\, cos3\, x + b_3\, sen\, 3\, x + \dots \dots \dots ....$$

7.9. Forma compleja de las series trigonométricas

En muchas cuestiones de la Física y de la Ingeniería, se presentan funciones periódicas desarrolladas en serie de Fourier del tipo

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 sen\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_1\right) + A_2 sen\left(\frac{2\pi}{T}2t + \alpha_2\right) + \cdots \ldots . + A_n sen\left(\frac{2\pi}{T}nt + \alpha_n\right) \qquad (10)$$

Estas series se transforman en las del tipo (3) haciendo: x = ($\frac{2\pi}{T}$) t, a_n=A_n sen α_n , b_n =A_n cos α_n. Siendo: A_n= amplitud, α_n = fase del referido armónico enésimo

Expresemos las series de Fourier del tipo (3) en forma exponencial imaginaria, sabemos que

$$cos\, x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad ; \; sen\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\, i}$$

Con lo cual la serie (3), adopta la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_n\, cos\, n\, x + b_n\, sen\, n\, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{b_n}{i})e^{i\, n\, x} + \sum_1^{\infty}\frac{1}{2}(a_n - \frac{b_n}{i})e^{-\, i\, n\, x}$$

Llamando: $\frac{a_0}{2} = c_0$, $c_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b_n}{i} \right)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{b_n}{i})$

Se puede escribir la serie en la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\, n\, x} \qquad (11)$$

El coeficiente c_n , se obtiene multiplicando por $e^{-i\, n\, x}$ la ecuación (11) e integrando, teniendo en cuenta que si: m $\neq$ n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\; m\, x} . e^{-i\, n\, x}\, d\, x = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,(m-n)x} . dx = 0, \text{ si } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\; m\, x} . e^{-i\, n\, x}\, d\, x = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,(m-n)x} . dx = 2\pi , \text{ si } m = n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{i\, n\, x}\, dx$$

Ejercicios resueltos

1. Desarrollar en serie de Fourier la función f(x) = - 2 x entre - π y π

Por ser f(x) una función impar, $a_0 = 0 = a_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\, nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-2\, x) sen\, nx\, dx =$$

$$b_n = \frac{4}{n\,\pi}\left[\frac{cosnx\,.\,\,x}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n} cos\, n\,\pi = \begin{cases} n\, par & , \quad b_n = \frac{4}{n} \\ para\;\; n = impar\,, & b_n = \frac{-4}{n} \end{cases}$$

Desarrollo de Fourier

$$f(x) = -2\,x = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\, sen\, n\, x$$

2. Desarrollar en serie de Fourier la función de periodo $2\,\pi$

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi \le x \le 0 \\ -x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Por ser f(x) una función par, $b_n = 0$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\;\; dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x\,)dx \;\; = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-\,x)\; dx \Rightarrow \frac{a_0}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\, cos\, n\, x\;\; dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x)\, cos\, n\, x\;\; dx \;\; = \frac{-2}{\pi\, n^2}[cos\, n\, x]_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi\, n^2}[(-1)^n - 1\,] \Rightarrow a_n =$$

$$\begin{cases} n\, par & a_n = 0 \\ n = impar & a_n = \frac{4}{\pi\;\; n^2} \end{cases}$$

$$f(x) = -\,\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2n-1)\,x}{(2n-1)^2}$$

3. Desarrollar en serie de Fourier la función periódica

$$f(x) = \begin{cases} \pi & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Por ser f(x) una función par, $b_n = 0$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi \; dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\, x\,) dx \quad = \frac{a_0}{2} = \frac{3\,\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi \, cos\, n\, x \;\; dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (x)\, cos\, n\, x \;\; dx \;\; = \frac{1}{\pi\, n^2}\,[cos\, n\, x]_0^{\pi} = a_n$$

$$= \begin{cases} n\; par & a_n = 0 \\ n\; impar & a_n = \dfrac{-2}{\pi \;\; n^2} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi \;\; sen\, n\, x \;\; dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (x)\, sen\, n\, x \;\; dx \;\; = \frac{1}{\pi\, n^2}\,[cos\, n\, x]_0^{\pi} = b_n = \;\frac{-1}{n}$$

Desarrollo de Fourier

$$f(x) = \;\frac{3\,\pi}{4} - \;\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2n-1)\, x}{(2n-1)^2} - \;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\; n\; x}{n}$$

4. Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x) = \; -x^2$ entre - π y π

Por ser una función par: $b_n = 0$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (-x^2\;)\; dx = \frac{a_0}{2} = - \;\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (-x^2)\; cos\, n\, x \;\; dx = a_n = -\frac{4}{\pi\, n^2}\,[cos\, n\, x]_0^{\pi} = \begin{cases} n \;\; par & a_n = \dfrac{-4}{n^2} \\ n \;\; impar & a_n = \dfrac{4}{n^2} \end{cases}$$

$$f(x) = - \;\frac{\pi^{\,2}}{3} + \; 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\, cos\, n\, x$$

5. Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x) = |sen\ \ x|$ entre - π y π

$$|sen\, x| = \begin{cases} sen\, x & 0 < x < \pi \\ -\, sen\, x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Por ser una función par: $b_n = 0$

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (sen\, x\,)\, dx = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\, x\ \ cos\, n\, x\ \ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\,cos(n+1)\,\pi + 1}{(n+1)} + \frac{-\,cos(n-1)\,\pi - 1}{(n-1)}\right]$$

$$= \begin{cases} n\ \ par & a_n = \dfrac{-4}{\pi(n^2-1)} \\ n\ \ impar & a_n = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\, 2\, n\, x}{(2n+1)(2n-1)}$$

6. Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x) = |cos\, x|$ entre 0 < x< $2\,\pi$

El intervalo de repetición es - $\frac{\pi}{2}$ < x < $\frac{\pi}{2}$. Vamos a transformar dicho intervalo en el intervalo - π < t< π , para ello utilizamos la transformación lineal x = m t +n

$$\left.\begin{aligned} \frac{-\pi}{2} &= m\,(-\pi) + n \\ \frac{\pi}{2} &= m\,(\pi) + n \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \quad , \qquad n = 0 \Rightarrow x = \frac{t}{2}$$

Desarrollemos la función $y = cos\frac{t}{2}$, en el intervalo - π < t < π. Al ser todos los valores positivos ya no se necesita poner el modulo .Por ser una función par: $b_n = 0$

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} cos\frac{t}{2}dt = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} cos\ \frac{t}{2} cos\, n\, t\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2\,n+1} sen\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{2}{(2n-1)} sen(n-\frac{1}{2})\pi\right]$$

$$= \begin{cases} n \quad par & a_n = \dfrac{-4}{\pi\,(2n+1)(2n-1)} \\ n \quad impar & a_n = \dfrac{-4}{\pi\,(2n+1)(2n-1)} \end{cases}$$

$$cos\frac{t}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{cos\, nt}{(2n+1)(2n-1)} \quad -\pi < t < \pi$$

Deshaciendo el cambio t = 2 x

$$|cos\, x\,| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\, 2\, n\, x}{(2n+1)(2\,n-1)} \qquad 0 < x < 2\pi$$

7. Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x) = x + \pi$ en el intervalo [-π , 0]

Hagamos el cambio de intervalo: -$\pi < x < \pi\ al$ intervalo - π < t< π , mediante la transformación lineal x = m t +n

$$\left.\begin{aligned} \pi &= m\,(-\pi) + n \\ 0 &= m\,(\pi) + n \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \quad , \qquad n = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{t+\pi}{2}$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{t+\pi}{2}\right) dt = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{t+\pi}{2}\right) cos\, n\, t\, dt = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{t+\pi}{2}\right) sen\ n\, t\, dt = \frac{-1}{n}\ cos\, n\,\pi \Rightarrow \begin{cases} n \quad par & b_n = -\dfrac{1}{n} \\ n \quad impar & b_n = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

$$\frac{t+\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\, n\, t}{n} \qquad -\pi < t < \pi$$

Deshaciendo el cambio se tiene

$$x + \pi = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \ (-1)^n \ \frac{sen\, n\,(2\,x + \pi)}{n}$$

$$x + \pi = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \ (-1)^n \ \frac{sen\, 2\, n\, x}{n}$$