Lectura 7
Ampliación de Matemáticas. Grado en Ingeniería Civil

Curso Académico 2011-2012

Los **sistemas de ecuaciones diferenciales**, como su nombre indica, son **sistemas de ecuaciones en los que aparecen derivadas de funciones.** Estudiaremos los sistemas de EDOs lineales con cierto detalle y en particular los sistemas de EDOs lineales de primer orden.
Vamos a comenzar ilustrando con ejemplos la utilización de **métodos directos de sustitución**, así como la utilización de **operadores de derivada** ...

Métodos de sustitución directa

Consideremos el problema de obtener la solución general para dos funciones incógnita y, z, relacionadas entre si mediante dos EDOs lineales, por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + z' = 0 \\ y' - 2y + z'' - 2z = 0 \end{array} \right. .$$

Vamos a trabajar con el **método de sustitución directa** para resolver el sistema: en primer lugar, derivamos la segunda ecuación

$$y'' - 2y' + z^{3)} - 2z' = 0$$

y utilizando la primera de las ecuaciones, podemos sustituir z' y $z^{3)}$.

Es importante tener en cuenta que al operar sobre las ecuaciones se pueden introducir soluciones que no estaban en el sistema original, lo que nos obliga a comprobarlas.
Realizando pues la sustitución:

$$y'' - 2y' - y^{4)} + 2y'' = 0 \to y^{4)} - 3y'' + 2y' = 0$$

Se puede reducir el orden haciendo $u = y'$ y tenemos que

$$u^{3)} - 3u' + 2u = 0\,,$$

que es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes. Las raíces del polinomio característico son: $s = 1$ (doble) y $s = -2$ y por lo tanto

$$y' = (a + bx)e^x + ce^{-2x}.$$

E integrando:

$$y = (A + Bx)e^x + Ce^{-2x} + D$$

Utilizando que $z' = -y''$ tenemos que z debe tener la misma forma

$$z = (\alpha + \beta x)e^x + \gamma e^{-2x} + \delta,$$

donde α, β, γ, δ están relacionadas (se obtiene de integrar y'': $\alpha = -(A + B)$, $\beta = -B$, $\gamma = 2C$).

Método basado en operadores derivada

Un método más sistemático de proceder para resolver sistemas lineales lo proporciona el trabajar con la notación de **operador derivada**. Con esta notación, podemos escribir el sistema anterior como:

$$\begin{aligned} D^2 y + Dz &= 0 \\ (D-2)y + (D^2 - 2D)z &= 0 \end{aligned}$$

Llamando $P_{11}(D) = D^2$, $P_{12}(D) = D$, $P_{21}(D) = D - 2$, $P_{22}(D) = D^2 - 2D$, tenemos:

$$\begin{aligned} P_{11}(D)y + P_{12}(D)z &= 0 \\ P_{21}(D)y + P_{22}(D)z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Podríamos escribir matricialmente esta ecuación como $P(D)X = 0$.
Comentario: En sistemas de ecuaciones, para que la solución no sea trivial el determinante de la matriz de coeficientes ha de ser cero. Para sistemas de ecuaciones diferenciales ocurre algo análogo (en cierta forma), como ahora comprobaremos.
Si "multiplicamos" la primera de las ecuaciones en (1) por P_{22} y la segunda por P_{12} y restamos (todos los P_{ij} conmutan entre sí) tenemos que

$$(P_{11}(D)P_{22}(D) - P_{12}(D)P_{21}(D))y = 0$$

es decir, que

$$\det \begin{bmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{bmatrix} y = 0$$

y la misma ecuación obtendríamos para z, es decir, que **el determinante de la matriz de los operadores diferenciales es cero al actuar sobre el espacio de soluciones.**

En el caso del ejemplo:

$$(P_{11}(D)P_{22}(D)-P_{12}(D)P_{21}(D))y = [D^2(D^2-2D)-D(D-2)]y = 0$$

que es una **EDO de cuarto orden**, que podemos resolver. Lo mismo haríamos con z (que satisface la misma ecuación de cuarto orden). **Tendríamos entonces 8 constantes, que podemos reducir a 4 exigiendo que z e y satisfagan el sistema original.**

Comentario: **Para sistemas no homogéneos, se puede seguir con el paralelismo con sistemas de ecuaciones interpretando de forma correcta las relaciones entre operadores derivada. Siempre que los elementos de la matriz de operadores sean polinomios en D con coeficientes constantes, el sistema es lineal y todos los $P_{ij}(D)$ conmutan entre sí. El sistema resultante se puede resolver, en cierto sentido, como un sistema de Cramer.**

Es decir, supongamos que tenemos ahora:

$$\begin{aligned} P_{11}(D)y + P_{12}(D)z &= g_1(x) \\ P_{21}(D)y + P_{22}(D)z &= g_2(x) \end{aligned} \tag{2}$$

De nuevo, multiplicamos la primera ecuación por P_{22}, la segunda por P_{12} y restamos:

$$[P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}]y = P_{22}g_1 - P_{11}g_2,$$

que podemos escribir como ...

$$\det\begin{bmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{bmatrix} y = \det\begin{bmatrix} g_1(x) & P_{12}(D) \\ g_2(x) & P_{22}(D) \end{bmatrix}$$

donde en el miembro de la derecha siempre debemos interpretar que los operadores actúan sobre las funciones g_1 y g_2. De forma análoga, si multiplicamos la ecuación de arriba por P_{11}, la de abajo por P_{22} y restamos:

$$\det\begin{bmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{bmatrix} z = \det\begin{bmatrix} P_{11}(D) & g_1(x) \\ P_{21}(D) & g_2(x) \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: **Resolver el siguiente problema**

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x - 2y - t \\ y' = 2x - 3y - t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{array}\right. .$$

Sistemas lineales de primer orden. Método matricial (o "espectral")

Nos ocuparemos ahora con mayor detalle de los sistemas de la forma

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + ... + a_{1n}x_n(t) + g_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + ... + a_{2n}x_n(t) + g_2(t) \\ &\;\;.......... \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + ... + a_{nn}x_n(t) + g_n(t) \end{aligned}$$

que escribiremos matricialmente como

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t) + G(t) \tag{3}$$

donde $X(t) = \left[x_{(}t),\ x_2(t), \ldots, x_n(t)\right]^T$ y

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}.$$

Un par de resultados importantes referentes a este tipo de sistemas de EDOs son los siguientes:

Existencia y unicidad

Sea el sistema lineal anterior. Si todos los elementos de matriz de $A(t)$ y $G(t)$ son continuos sobre un intervalo (a, b) que contiene a t_0, entonces **existe una única solución** $X(t)$ **(**n **funciones solución) que satisface una determinada condición inicial** $X(t) = X(t_0)$ **(**n **condiciones, una para cada función** $x_i(t)$ **solución).**

Si $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son soluciones del sistema lineal anterior entonces **cualquier combinación lineal de ellas es también solución.**

En cuanto al **sistema homogéneo**, tenemos que ...

Dadas n funciones vectoriales independientes en cierto intervalo (a, b), es decir, tales que
$\det[X_1, ..., X_2] \equiv W[X_1, ..., X_n] \neq 0 \; \forall t \in (a, b)$, entonces **cualquier solución en el intervalo se puede expresar como combinación lineal de estas n funciones.**

Base del espacio de soluciones

Un conjunto de funciones vectoriales $\{X_i(t)\}_{i=1^n}$ como el descrito en el resultado anterior, se dice que es un **conjunto fundamental de soluciones o una base del espacio de soluciones**.

Comentario 1: Obsérvese que en este caso el Wronskiano de n soluciones vectoriales se define como el determinante de la matriz $n \times n$ formada por estas n funciones.

Comentario 2: La solución general de los sistemas inhomogéneos es, al igual que ocurría con las ecuaciones lineales, suma de la solución general de la homogénea mas una solución de la inhomogénea.
Restrinjámonos ahora al caso en que $A(t)$ sea una matriz constante A, entonces tenemos que:

Sea un sistema de EDOs lineal, homogéneo y de primer orden con matriz de coeficientes A constante. Entonces, **si X_1 es un vector propio de A con valor propio λ_1, $Y_1 = e^{\lambda_1 t} X_1$ es una solución particular del sistema.**

Efectivamente, por una parte tenemos que:

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda_1 t} X_1) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} X_1$$

y por otra

$$A(e^{\lambda_1 t} X_1) = e^{\lambda_1 t} A X_1 = e^{\lambda_1 t} \lambda_1 X_1 .$$

Por lo tanto, **ya sabemos como resolver el caso de que la matriz del sistema tenga asociados *n* vectores propios linealmente independientes:**

Si $X_1, ..., X_n$ son n vectores propios linealmente independientes con vectores propios $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (se pueden repetir) entonces la solución general se puede escribir como

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + ... + \alpha_n e^{\lambda_n t} X_n.$$

Dicho, de otra forma: **si *A* es diagonalizable el problema está resuelto. En el caso en que hayan valores complejos, se puede, al igual que para ecuaciones lineales, combinar las exponenciales complejas para obtener una solución explícitamente real.**

En el caso en que la matriz no sea diagonalizable, y tenga sólo m vectores propios l.i. ($m < n$), podemos recurrir a técnicas similares (que no idénticas) para encontrar las soluciones independientes que nos faltan.

Ejemplo 1 (sistema homogéneo): Resolver el problema

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\,\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = [3,\, 1,\, 4]^T\,,$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sol.

En primer lugar, determinamos los valores propios de la matriz A (que es simétrica, luego diagonalizable en R): la ecuación característica se obtiene a partir de $\det(A - \lambda I) = 0$*, lo que en este caso, nos lleva a* $P_\lambda = [(\lambda - 5)^2 - 16](\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 9) = 0$.

Continuación $\Rightarrow$

De modo que la matriz A tiene un valor propio doble ($\lambda = 1$) y uno simple ($\lambda = 9$). El espacio de vectores propios asociados a $\lambda = 1$ tendrá, entonces, multiplicidad 2 y es fácil comprobar que está caracterizado por la ecuación $x_1 + x_2 = 0$ (es decir, es un plano). Una base ortonormal de este espacio vectorial estaría formada por los vectores $\boldsymbol{u}_1 = (0, 0, 1)$ y $\boldsymbol{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

El espacio de vectores propios asociado al valor propio $\lambda = 9$ estará caracterizado por las ecuaciones $x_1 - x_2 = 0$, $x_3 = 0$ (es decir, es un espacio de dimensión 1). Por tanto, un vector característico (de norma unidad) de la base de esta espacio será $\boldsymbol{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Por tanto, la solución general del sistema será:

$$\boldsymbol{x}(t) = \alpha_1 e^t \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 e^t \boldsymbol{u}_2 + \alpha_3 e^{9t} \boldsymbol{u}_3.$$

Continuación $\Rightarrow$

Si consideramos ahora $t = 0$*, tenemos que* $\boldsymbol{x}(0) = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{u}_3$*, lo que nos permitirá obtener las constantes que satisfacen la condición inicial del problema; dichas constantes* α_1, α_2, α_3 *se obtienen calculando los productos escalares del vector* $\boldsymbol{x}(0)$ *por cada uno de los elementos de la base ortonormal. De este modo, obtenemos:*

$$\alpha_1 = 4, \; \alpha_2 = \sqrt{2}, \; \alpha_3 = 2\sqrt{2}.$$

Por tanto, la solución buscada es:

$$\boldsymbol{x}(t) = 4e^t \boldsymbol{u}_1 + \sqrt{2}e^t \boldsymbol{u}_2 + 2\sqrt{2}e^{9t} \boldsymbol{u}_3.$$

Veamos ahora con un ejemplo que el mismo tipo de técnicas “espectrales” pueden utilizarse para resolver sistemas inhomogéneos:

Ejemplo 2 (sistema inhomogéneo): Resolver el problema

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t),\;\; \boldsymbol{x}(0) = [0,\,0]^T\,,$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\;\; \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

Sol.

En primer lugar y al igual que antes, determinamos los valores y vectores propios de la matriz A (que es simétrica, luego diagonalizable en R): $\lambda_1 = 0$, *con vector propio asociado* $\boldsymbol{u}_1 = (1/\sqrt{2},\,-1/\sqrt{2})^T$, *mientras que el vector propio* $\boldsymbol{u}_2 = (1/\sqrt{2},\,1/\sqrt{2})^T$ *está asociado al valor propio* $\lambda_2 = 2$.

Continuación $\Rightarrow$

Como $\boldsymbol{u}_1$ *y* $\boldsymbol{u}_2$ *forman una base ortonormal de* R^2*, podremos expresar* $\boldsymbol{f}(t)$ *en términos de estos vectores:*

$$\boldsymbol{f}(t) = c_1(t)\boldsymbol{u}_1 + c_2(t)\boldsymbol{u}_2,$$

donde los coeficientes c_1 *y* c_2 *serán, lógicamente, funciones de* t *y los obtendremos proyectando* $\boldsymbol{f}$ *sobre* $\boldsymbol{u}_1$ *y* $\boldsymbol{u}_2$*, respectivamente:*

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \boldsymbol{f}(t).\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(t) - \sin(t)\right) \\ c_2(t) &= \boldsymbol{f}(t).\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(t) + \sin(t)\right). \end{aligned}$$

Continuación $\Rightarrow$

Por otra parte, sabemos que la solución del sistema de EDOs también podrá escribirse como

$$\boldsymbol{x}(t) = a_1(t)\boldsymbol{u}_1 + a_2(t)\boldsymbol{u}_2,$$

y al ser la solución del sistema, se ha de verificar que

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - A\,\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(t),$$

por lo que los coeficientes $a_1(t)$ y $a_2(t)$ han de satisfacer, lógicamente, que

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{da_i(t)}{dt} - \lambda_i a_i(t)\right)\boldsymbol{u}_i = c_1(t)\boldsymbol{u}_1 + c_2(t)\boldsymbol{u}_2.$$

Continuación $\Rightarrow$

La igualdad anterior será cierta sólo si:

$$\begin{aligned} \left(\frac{da_1(t)}{dt} - \lambda_1 a_1(t)\right) &= c_1(t), \\ \left(\frac{da_2(t)}{dt} - \lambda_2 a_2(t)\right) &= c_2(t), \end{aligned}$$

y sustituyendo los valores de λ_1 *y* λ_2*, junto con las expresiones de* $c_(t)$ *y* $c_2(t)$*, obtenemos*

$$\begin{aligned} \frac{da_1(t)}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(t) - \sin(t)\right), \\ \frac{da_2(t)}{dt} - 2a_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(t) + \sin(t)\right), \end{aligned}$$

que son dos EDOs inhomogéneas de primer orden que sabemos resolver! (se han de satisfacer también las condiciones $a_1(0) = 0$*,* $a_2(0)$*, que corresponden a la condición inicial de nuestro sistema).*

Continuación $\Rightarrow$

Las soluciones de ambas EDOs, que se determinan fácilmente, son:

$$a_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(t) + \cos(t) - 1\right),$$
$$a_2(t) = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(3e^{2t} - 3\cos(t) - \sin(t)\right)$$

Finalmente, obtenemos:

$$\boldsymbol{x}(t) = a_1(t)\boldsymbol{u}_1 + a_2(t)\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\left(2\cos t + 4\sin t + 3e^{2t} - 5\right) \\ \frac{1}{10}\left(-8\cos t - 6\sin t + 3e^{2t} + 5\right) \end{bmatrix}.$$

Si nos fijamos éste es un método de **variación de parámetros** *(análogo al que se introdujo para EDOs escalares), denominación ésta que se utiliza con frecuencia.*

Comentario: Si $A(t)$ no es una matriz constante el problema no será, por lo general, analíticamente resoluble. En esto, los sistemas presentan una diferencia esencial respecto a las ecuaciones de primer orden que eran todos resolubles en forma de cuadraturas.

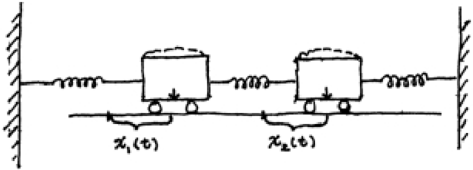
Para finalizar el tema de sistemas lineales vamos a ver un ejemplo físico: un **sistema mecánico de masas y muelles.**

Los sistemas mecánicos de masas y muelles conectados conducen con frecuencia a problemas de valores iniciales de la forma:

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = A\boldsymbol{x}, \;\; \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{f}, \;\; \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{0},$$

siendo A una matriz simétrica y $\boldsymbol{f}$ un vector constante. Estos problemas pueden resolver mediante una técnica similar a la que acabamos de discutir.

Consideremos, por ejemplo, el sistema mecánico de la figura:



Tenemos dos compartimentos móviles (que, asumimos, se mueven sobre una plataforma sin fricción) cada uno de ellos de masa m y que están unidos entre sí por tres muelles de constantes k_1, k_2 y k_3, respectivamente.
Sean:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \text{posición del primer compartimento a la derecha de su} \\
&= \text{posición de equilibrio} \\
x_2(t) &= \text{posición del segundo compartimento a la derecha de su} \\
&= \text{posición de equilibrio} \\
F_1 &= \text{fuerza que actúa sobre el primer compartimento} \\
F_2 &= \text{fuerza que actúa sobre el segundo compartimento}
\end{aligned}
$$

donde los valores positivos de F_1 y F_2 indican que las fuerzas actúan hacia la derecha.

Supongamos que cuando los compartimentos están en equilibrio, los muelles están también en equilibrio y no ejercen ninguna fuerza sobre los compartimentos. En este caso, es posible deducir que:

$$F_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \quad F_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2.$$

Como, por otra parte, la segunda ley de Newton nos dice que $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, obtenemos el sistema de EDOs:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= k_2(x_1 - x_2) - k_3x_2 = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2. \end{aligned}$$

Podemos escribir este sistema de forma matricial como $m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = A\boldsymbol{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) \end{pmatrix}$$

.

Tomemos, por ejemplo, los valores $m = k_1 = k_2 = k_3 = 1$. En este caso, el sistema de EDOs es

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

.

Los valores propios de la matriz del sistema son fácilmente calculables: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$.

Un vector propio asociado al valor propio -1 es $\boldsymbol{b}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$, mientras que $\boldsymbol{b}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$, genera el espacio de autovectores correspondiente al valor propio -3.

De modo que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

diagonalizará el sistema de EDOs. De hecho, si definimos un nuevo sistema de coordenadas $(y_1,\ y_2)$ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

conseguimos transformar nuestro sistema de EDOs en uno donde las componentes incógnita del problema están separadas:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -y_1, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -3y_2. \end{aligned}$$

Si utilizamos la notación $w_1 = 1$, $w_2 = \sqrt{3}$, el sistema ahora adopta la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + w_1^2 y_1 &= 0, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + w_2^2 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

que es la correspondiente a un sistema de dos **osciladores armónicos desacoplados.**
La solución general del sistema transformado es:

$$y_1 = a_1 \cos w_1 t + b_1 \sin w_1 t, \;\; y_2 = a_2 \cos w_2 t + b_2 \sin w_2 t.$$

En las variables originales, la solución general del sistema es:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \cos w_1 t + b_1 \sin w_1 t \\ a_2 \cos w_2 t + b_2 \sin w_2 t \end{pmatrix}$$

,

Es decir, el movimiento de los compartimentos de nuestro sistema mecánico puede ser descrito por la superposición de dos modos de oscilación, de frecuencias $\frac{w_1}{2\pi}, \frac{w_2}{2\pi}$.

Dejamos en este punto el estudio de técnicas particulares para sistemas de EDOs y pasemos a continuación a estudiar problemas que involucran ecuaciones diferenciales y condiciones en la frontera de su dominio de integración ...

Vamos a abordar la resolución de lo que se denominan *problemas de contorno*, para los que las condiciones sobre la solución se establecen en puntos distintos. Un ejemplo de este tipo puede ser:

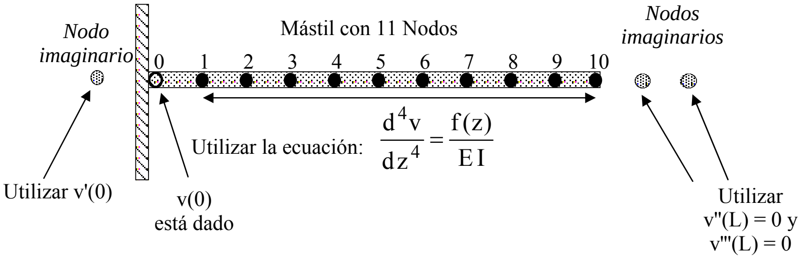
Problema de flexión de un mástil de longitud L

El desplazamiento respecto a la posición de equilibrio de un mástil se puede modelizar mediante la siguiente EDO de cuarto orden:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{f(z)}{EI},$$

siendo v: desplazamiento (flecha) respecto a la posición de equilibrio, E: módulo de elasticidad, I: momento de inercia, $f(z)$: cargas (fuerzas) a lo largo del eje del mástil.
Condiciones de contorno:
Base: $v(0) = 0$; $v'(0) = 0$; **Parte superior**: $v''(L) = 0$; $v'''(L) = 0$.

Veremos en prácticas que el problema se puede resolver numéricamente utilizando un **esquema de diferencias finitas**:



Por simplicidad, para establecer las ideas básicas de las técnicas de **diferencias finitas** vamos a considerar problemas de contorno para EDOs de segundo orden. Un ejemplo de este tipo puede ser:

Resolver $y'' = f(x, y, y')$ en $a \leq t \leq b$ con las condiciones $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

El tipo de condiciones de contorno anteriores se denominan *condiciones Dirichlet*.
Podemos asimismo considerar condiciones de contorno sobre las derivadas (*condiciones Neumann*) o condiciones mixtas (*condiciones Robin*), del estilo $y(a) + \gamma y'(a) = \alpha$, por ejemplo.

El método de **diferencias finitas** consiste, en general, en sustituir la ecuación diferencial por una ecuación en diferencias finitas que resulta de tomar aproximaciones de las derivadas por cocientes de incrementos finitos:
Para el problema de contorno lineal,

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x) \\ m_1 y(a) + n_1 y'(a) = \alpha_1 \\ m_2 y(b) + n_2 y'(b) = \alpha_2 \end{cases}$$

discretizamos las derivadas como sigue:

- $y'(x_0) \approx \dfrac{1}{2h}[y(x_0 + h) - y(x_0 + h)]$
- $y''(x_0) \approx \dfrac{1}{h^2}[y(x_0 + h) - 2y(x_0) + y(x_0 + h)]$

Nótese que usando la fórmula de Taylor se obtiene

$$y'(x_0) = \frac{1}{2h}[y(x_0+h) - y(x_0-h)] - \frac{1}{6}h^2 y'''(\xi)$$

,

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}[y(x_0+h) - 2y(x_0) + y(x_0-h)] - \frac{1}{12}h^2 y^{iv)}(\xi)$$

.

Con estas observaciones pasamos a obtener el esquema en diferencias finitas para el problema anterior con $m_1 = 1 = m_2$ y $n_1 = 0 = n_2$ (**condiciones de contorno Dirichlet**):

- Elegimos el numero de pasos N y definimos la malla:

  $x_i = a + hi \equiv x_{i-1} + h, \quad h = \dfrac{b-a}{N}$

- Definimos

  $y_0 = \alpha_1$

  $-(1+\frac{1}{2}hp(x_i))y_{i-1} + (2+h^2q(x_i))y_i + (\frac{1}{2}hp(x_i)-1)y_{i+1} = -h^2r(x_i)$

  $y_{N+1} = \alpha_2$

- Definiendo
  $a_i = -(1 + \frac{1}{2} h p(x_i))$, $d_i = 2 + h^2 q(x_i)$, $c_i = \frac{1}{2} h p(x_i) - 1$, $b_i = -h^2 r(x_i)$, el esquema en diferencias finitas se escribe en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & . & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{N-1} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & a_N & d_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1\alpha_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N - c_N\alpha_2 \end{pmatrix}$$

  El sistema lineal resulta ser tridiagonal y se puede resolver de forma eficiente mediantes estrategias computacionales adecuadas para este tipo de sistemas.

Condiciones de contorno tipo Robin:
Si en el problema inicial los parámetros n_1 y n_2 no son nulos, llamaremos $\lambda = \frac{m_1}{n_1}$ y $\gamma = \frac{m_2}{n_2}$. Ahora no se conoce el valor de la función en $x = a$ y $x = b$, es decir, hemos de *discretizar también las condiciones de contorno*.

- Como en el caso de las condiciones Dirichlet, elegimos el numero de pasos N y definimos la malla:

$$x_i = a + hi \equiv x_{i-1} + h, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

- Las incognitas son $y_0, y_1, \ldots, y_{N+1}$
- En $x_0 = a$ se toma la discretización de las derivadas como sigue,

$$y''(x_0) \approx \frac{y'(x_0 + h/2) - y'(x_0)}{h/2} \qquad y'\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \approx \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}.$$

- Sustituyendo en la ecuación y usando la condición de contorno en $x_0 = a$ en nuestro problema resulta

$$y_1 - y_0 + h\lambda y_0 - h\alpha_1 = \frac{h^2}{2}(p(x_0)(\alpha_1 - \lambda y_0) + q(x_0)y_0 + r(x_0))$$

que podemos rescribir como,

$$(1 - h\lambda + \frac{h^2}{2}(-p(x_0)\lambda + q(x_0))\,y_0 - y_1 = -h\alpha_1 - \frac{h^2}{2}(p(x_0)\alpha_1 + r(x_0))$$

- Procediendo de forma similar en $x_{N+1} = b$ obtenemos

$$\begin{aligned} -y_N + (1 + h\gamma + \tfrac{h^2}{2}(-p(x_{N+1})\gamma + q(x_{N+1}))\,y_{N+1} = \\ = h\alpha_2 - \tfrac{h^2}{2}(p(x_{N+1})\alpha_2 + r(x_{N+1})). \end{aligned}$$

- Si $i = 1, 2, ..., N$ obtenemos como en el caso de las condiciones Dirichlet

$$-(1 + \frac{1}{2}hp(x_i))y_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i))y_i + (\frac{1}{2}hp(x_i) - 1)y_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

- Definiendo para $i = 1, 2, ...N$,

  $a_i = -(1 + \frac{1}{2} hp(x_i))$

  $d_i = 2 + h^2 q(x_i)$

  $c_i = \frac{1}{2} hp(x_i) - 1$

  $b_i = -h^2 r(x_i)$

  y

  $$d_0 = 1 - h\lambda + \frac{h^2}{2}(-p(x_0)\lambda + q(x_0)),$$

  $$b_0 = -h\alpha_1 - \frac{h^2}{2}(p(x_0)\alpha_1 + r(x_0))$$

  $$d_{N+1} = \left(1 + h\gamma + \frac{h^2}{2}(-p(x_{N+1})\gamma + q(x_{N+1})\right),$$

  $$b_{N+1} = h\alpha_2 - \frac{h^2}{2}(p(x_{N+1})\alpha_2 + r(x_{N+1}))$$

Escrito en forma matricial el esquema en diferencias finitas resulta ser,

$$\begin{pmatrix} d_0 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_1 & d_1 & c_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 1 & d_2 & c_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & d_3 & . & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{N-1} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & a_N & d_N & c_N \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & -1 & d_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \\ y_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \\ b_{N+1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

que, de nuevo, es un sistema tridiagonal aunque ahora de $N+2$ ecuaciones con $N+2$ incognitas.

Ejercicio: Encontrar una discretización en diferencias finitas (del mismo orden) del siguiente problema de contorno y resolverlo considerando sólo 2 puntos interiores:

$$\begin{cases} -u'' + \sin(x)u'(x) + u(x) = \cos^2(x), \quad x \in (0, \pi/2) \\ u(0) = 0 \\ u(\pi/2) = 0. \end{cases}$$