Ejercicios resueltos: ejemplos
Lectura 2

Ejercicio nº 1 *Calcular el volumen limitado por la superficie* $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = 3a^3xyz$, *que pertenece al primer octante.*

Solución:

Hagamos un cambio de variables a coordenadas esféricas.

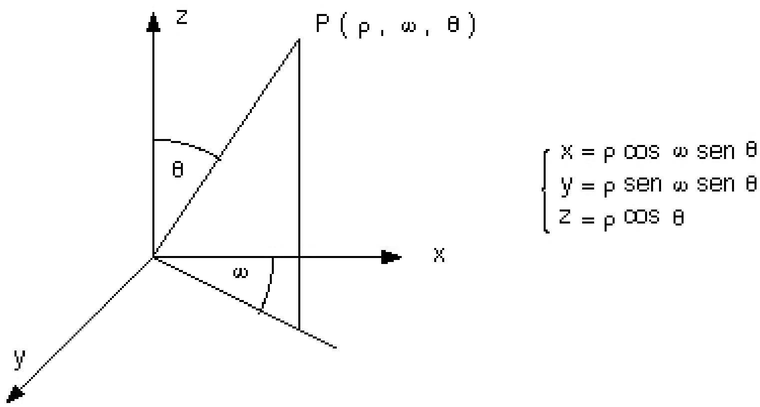

Figura 1:

El jacobiano de la transformación es,

$$\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(\rho,\theta,\omega\right)} = \begin{vmatrix} \cos\omega\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\omega\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\omega\cos\theta & \rho\cos\omega\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\operatorname{sen}\theta$$

y la ecuación de la superficie en esféricas,

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = 3a^3xyz \Rightarrow \rho^3 = 3a^3\cos\omega sen\theta sen\omega sen\theta\cos\theta$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V &= \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V \frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(\rho,\theta,\omega\right)} d\rho d\theta d\omega = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{3\cos\omega sen^2\theta\operatorname{sen}\omega\cos\theta}} \rho^2\operatorname{sen}\theta d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{a\sqrt[3]{3\cos\omega\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\omega\cos\theta}} d\theta = \\ &= a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\left[\cos\omega\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\omega\cos\theta\right] d\theta = \\ &= = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\operatorname{sen}\omega d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta d\theta = \\ &= = a^3\left[\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\operatorname{sen}^4\omega}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{8} \end{aligned}$$

■

Ejercicio nº 2 *Calcular* $I = \iiint\limits_V \left[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right] dxdydz$ *, siendo V el volumen determinado por el cilindro,* $y^2 + z^2 = 2pz$*, y las dos hojas del cono,* $x^2 - q^2\left(y^2 + z^2\right) = 0$*, siendo* $p, q > 0$*.*

Solución:

El cilindro tiene su eje paralelo al, eje O x, y su sección recta por el plano $x = 0$ es: $y^2 + (z-p)^2 = p^2$, por lo tanto su eje es: $y = 0$ y $z = p$, ver la figura 2.

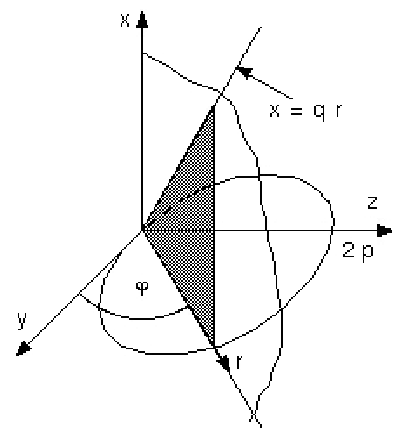

Figura 2:

El cono, circular, tiene como eje el eje Ox. La sección de estas dos superficies por un plano que pase por Ox y que forme un ángulo φ con el eje Oy, ver la figura 3,

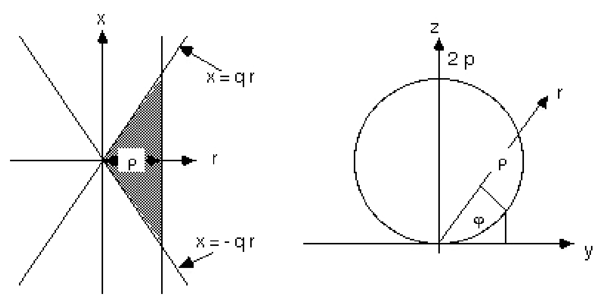

Figura 3:

El cambio de variable indicado será:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases} ; \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ 0 & \mathrm{sen}\,\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

siendo ahora la ecuación del cilindro: $y^2 + z^2 = 2pz \Rightarrow \rho = 2p\,\mathrm{sen}\,\varphi$ y la del cono: $x^2 - q^2\left(y^2+z^2\right) = 0 \Rightarrow x = \pm q\rho$. Por tanto

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_V \left[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right] \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \\ &= \iiint\limits_V \left[x^2\rho^2 + \rho^4\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\right]\,\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,x = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\,\varphi \int_0^{2p\,\mathrm{sen}\,\varphi} \rho^3 \,\mathrm{d}\,\rho \int_{-q\rho}^{q\rho} \left[x^2 + \rho^2 \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\right] \,\mathrm{d}\,x = \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\,\varphi \int_0^{2p\,\mathrm{sen}\,\varphi} \rho^3 \left[\frac{x^3}{3} + \rho^2 \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi x\right]_{-q\rho}^{q\rho} \mathrm{d}\,\rho = \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\,\varphi \int_0^{2p\,\mathrm{sen}\,\varphi} \rho^3 \left[2\frac{q^3\rho^3}{3} + 2q\rho^3 \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\right] \mathrm{d}\,\rho = \\
&= \int_0^{\pi} \left[2\frac{q^3}{3} + 2q \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\right] \left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^{2p\,\mathrm{sen}\,\varphi} \mathrm{d}\,\varphi = \\
&= 2\frac{q^3}{3}\frac{(2p)^7}{7} \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^7\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi + 2q\frac{(2p)^7}{7} \int_0^{\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^9\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi = \\
&= 2\frac{q^3}{3}\frac{(2p)^7}{7} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^7\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi + 2q\frac{(2p)^7}{7} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^9\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi = \\
&= \frac{2^9 q^3 p^7}{21}\frac{6\,!\,!}{7\,!\,!} + \frac{2^9 q p^7}{7}\frac{8\,!\,!}{11\,!\,!} = \frac{2^9 q p^7}{7}\frac{6\,!\,!}{7\,!\,!}\left[\frac{q^2}{3} + \frac{8}{11 \times 9}\right] = \\
&= \frac{2^9 q p^7}{21}\frac{6\,!\,!}{7\,!\,!}\left[q^2 + \frac{8}{33}\right] = \frac{2^{13} q p^7}{735}\left[q^2 + \frac{8}{33}\right]
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$