Ejercicios resueltos: ejemplos
Lectura 4

1.- La función $f(t) = \cos^2 t$ es periódica, de periodo 2π. Determinar su serie de Fourier. Indicación: este ejercicio es casi trivial utilizando identidades trigonométricas.

Solución: Efectivamente si recordamos que

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2},$$

nos podemos dar cuenta de que esta expresión nos proporciona, precisamente, la serie de Fourier de la función. Los únicos coeficientes de la serie de Fourier no nulos son entonces $a_0 = 1$ y $a_2 = 1/2$. En la figura se muestra la comparación del polinomio trigonométrico $\phi_2 = 1/2 + \cos(2t)/2$ con la función (coinciden exactamente, lógicamente).

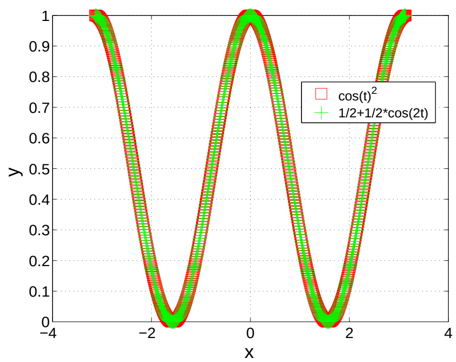

Figura 1: Ejercicio 1

2.- La función $f(t) = \sin^3 t$ es periódica, de periodo 2π. Determinar su serie de Fourier.

Solución:

Podemos darnos cuenta de que esta función es impar (dado que la función $\sin(t)$ lo es), por lo que sólo serán no nulos los coeficientes asociados a las funciones seno (de todos modos, se puede hacer el cálculo explícito de los coeficientes a_k como comprobación).

Los coeficientes que acompañan a la función seno vendrán dados por:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)\sin(kt)\,dt\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\frac{(1-\cos(2t))}{2}\sin(kt)\,dt\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\sin(kt)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(2t)\sin(kt)\,dt\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[I_1 - I_2\right]
\end{aligned}$$

Directamente, la primera de las integrales I_1 vale π si $k = 1$ y 0 en otro caso (recordemos que es una de las integrales trigonométricas incluidas en la Lectura 4). Para hacer la segunda integral consideramos que $\cos(u) - \cos(v) = -2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)$, de modo que:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\sin(kt)\cos(2t)\,dt = \frac{-1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left((k+1)t\right) - cos\left((k-1)t\right)\right]\cos(2t)\,dt = \\
&= \frac{-1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left((k+1)t\right)\cos(2t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} cos\left((k-1)t\right)\cos(2t)\,dt\right] = \frac{-1}{2}\left[I_{2,a} + I_{2,b}\right].
\end{aligned}
$$

Otra vez directamente, la integral $I_{2,a}$ vale π si $k = 1$ y 0 en otro caso; la segunda integral $I_{2,b}$ vale π si $k = 3$ y 0 en otro caso.

Resumiendo, obtenemos: $b_1 = 3/4$ y $b_3 = -1/4$ (el resto de coeficientes son cero). Luego

$$
f(t) = \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t).
$$

En la figura 2 se muestra la comparación entre ambas expresiones.

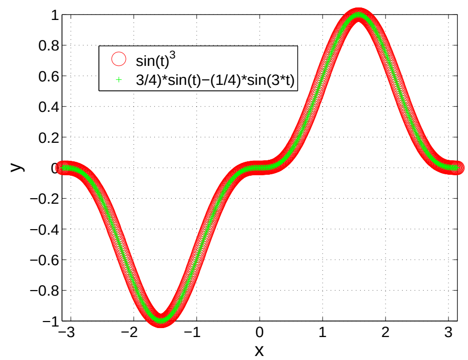

Figura 2: Ejercicio 2

$\blacksquare$