Ejercicios resueltos: ejemplos
Lectura 5

1.- Dada la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$, resolverla interpretándola como:

a) Ecuación diferencial reducible a exacta mediante un factor integrante dependiente de x.

Solución

Si $\mu = \mu(x) \Rightarrow \delta\mu/\delta y = 0$ luego sustituyendo en $\mu\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = N\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - M\dfrac{\partial \mu}{\partial y}$ se tiene que $\dfrac{\delta\mu/\delta x}{\mu} = \dfrac{M'_y - N'_x}{N}$ depende sólo de x. En nuestro caso

$\dfrac{\delta\mu/\delta x}{\mu} = \dfrac{M'_y - N'_x}{N} = \dfrac{4y}{-2xy} = -2/x$ por tanto $\mu = e^{\int -2/x\,dx} = 1/x^2$. Multiplicando la ecuación, ésta se transforma en exacta $(1+\dfrac{y^2}{x^2})dx - \dfrac{2y}{x}dy = 0$.

Supongamos que su solución es $f(x,y) = c$ entonces

* como $\partial f/\delta x = P \Rightarrow f(x,y) = \int 1 + \dfrac{y^2}{x^2}\,dx = x - \dfrac{y^2}{x} + g(y)$

* como $\partial f/\delta y = Q \Rightarrow \dfrac{-2y}{x} + g'(y) = \dfrac{-2y}{x} \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = cte$ luego

Solución: $x - \dfrac{y^2}{x} = c \Rightarrow \dfrac{x}{x^2-y^2} = k$.

b) Ecuación diferencial de Bernouilli.

Solución

$(y' = p(x)y + q(x)y^n)$. Escribimos $y' = \frac{1}{2x}y + \frac{x}{2}y^{-1}$. Dividimos entre $y^n = y^{-1}$ y hacemos el cambio $\left\{\begin{array}{l} u = y^{1-n} = y^2 \\ u' = 2yy' \end{array}\right.$; sustituyendo

$u' - u/x = x$ lineal $(y' + p(x)y = q(x))$

calculamos $e^{\int p(x)dx} = e^{\int -1/x dx} = 1/x$, multiplicando a la ecuación y agrupando

$(u/x)' = 1 \Rightarrow u/x = x + a \Rightarrow y^2/x = x + a \Rightarrow \dfrac{x}{x^2-y^2} = k$

2.- Resolver el problema $y' = y - t^2 + 1,\ y(0) = 0{,}5$, para $t \in [0,1]$ utilizando el método del punto medio explícito y un paso $h = 0{,}2$.

Solución:

En primer lugar, podemos obtener la solución analítica del problema: nuestra EDO es lineal de primer orden, con término inhomogéneo. La solución general de la EDO es $y(t) = Ke^t + (1+t)^2$. Como la condición inicial que tenemos es $y(0) = 0{,}5$, el valor de la constante K resulta ser $K = -0{,}5$.

El método del punto medio (un ejemplo particular de método de Runge-Kutta) es:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2}f_n\right).$$

En nuestro problema, $f(t, y) = y - t^2 + 1$ e $y_0 = 0{,}5$. En la siguiente tabla se muestran los valores de las aproximaciones a la solución de nuestro problema que se obtienen en los distintos puntos de la partición del intervalo $[0,\ 1]$ con espaciado $h = 0{,}2$, así como el valor de la solución exacta en cada punto:

t_n	y_n	y_{exact}
0,0	0,500000	0,5000
0,2	0,828000	0,8293
0,4	1,211360	1,2141
0,6	1,644659	1,6489
0,8	2,121284	2,1272
1,0	2,633167	2,6409

$\blacksquare$