Ejercicios resueltos: ejemplos
Lectura 7

1.- Resolver el sistema: $\left\{\begin{array}{lcr} y_1^{(1} & = & 2y_1 \\ y_2^{(1} & = & 3y_1+2y_2 \\ y_3^{(1} & = & 5y_1-2y_2+y_3 \end{array}\right.$.

Solución:

Expresado matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \\ y_3^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Determinemos sus valores propios

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 5 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0 \rightarrow \lambda = \left\{\begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right.$$

Al valor propio $\lambda = -1$ le corresponde un vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{rl} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = z \end{array} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al valor propio $\lambda = 2$ le corresponde un vector propio $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -\frac{3}{2}z \end{array} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Al ser una raiz doble, buscamos una segunda solución de la forma

$$\Phi(x) = (\mathbf{v_3} + x\mathbf{v_2})\, e^{2x}$$

que ha de cumplir la condición

$$\Phi^{(1}(x) = \mathbf{v_2}e^{2x} + 2(\mathbf{v_3}+x\mathbf{v_2})\, e^{2x} = \mathbf{A}\Phi(x) = \mathbf{A}(\mathbf{v_3}+x\mathbf{v_2})\, e^{2x}$$

es decir

$$\mathbf{v_2} \quad = \quad (A-2I)\,\mathbf{v_3}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{array}{rcl} 3x & = & 3 \\ 5x-2y-3z & = & -2 \end{array} \to \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ 2y & = & 7-3z \end{array}$$

Por lo tanto la solución es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] e^{2x}$$

■

2.- Para el problema de contorno

$$\begin{cases} -u'' + \sin(x)u'(x) + u(x) = \cos^2(x), \quad x \in (0, \pi/2) \\ u(0) = 0 \\ u(\pi/2) = 0, \end{cases}$$

encontrar una discretización de diferencias finitas de orden 2 de nuestro problema y obtener $\{u_n\}_{n=0}^N$ para $N = 3$ (es decir, considerando 2 puntos interiores).

Solución:

En primer lugar, la partición que nos indica el enunciado consiste en los siguientes puntos: $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$, es decir, corresponde a un espaciado $h = \pi/6$.

En segundo lugar, la discretización de diferencias finitas que nos piden se traduce en la siguiente ecuación en el nodo i como:

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \sin(x_i)\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u_i = \cos^2(x_i). \tag{1}$$

Si hacemos $i = 1$, obtenemos:

$$u_2 \left(\frac{h}{2} \sin(x_1) - 1 \right) + u_1(2 + h^2) = h^2 \cos^2(x_1), \tag{2}$$

y para $i = 2$:

$$u_2(2 + h^2) + u_1 \left(-\frac{h}{2} \sin(x_2) - 1 \right) = h^2 \cos^2(x_2). \tag{3}$$

En las ecuaciones anteriores hemos hecho uso de las condiciones de contorno: $u_0 = 0 = u_3$. La expresión matricial de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} (2 + h^2) & \left(\frac{h}{2}\sin(x_1) - 1\right) \\ \left(-\frac{h}{2}\sin(x_2) - 1\right) & (2 + h^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 \cos^2(x_1) \\ h^2 \cos^2(x_2) \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores de h, x_1, x_2 y resolviendo el sistema se obtiene $u_1 \approx 0{,}1284$ y $u_2 \approx 0{,}0994$.

■