Ejercicios resueltos: ejemplos
Lectura 8

1.- Resolver de manera exacta los siguientes problemas de contorno. Obtener también una solución aproximada utilizando el método de elementos finitos considerando, en ambos casos, 4 subintervalos y las funciones sombrero completas $\phi_i,\ i = 1,\,2,\,3$:

a)

$$\begin{cases} -u'' = e^x, & x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left((1+x)\dfrac{du}{dx}(x)\right) = 1, & x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Solución: Apartado a)

En primer lugar, integrando dos veces la EDO y sustituyendo las condiciones de contorno, obtenemos la solución exacta del problema:

$$u(x) = -e^x + (e-1)x + 1.$$

Para utilizar el método de elementos finitos, necesitamos en primer lugar la forma débil del problema:

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dz}{dx}\,dx = \int_0^1 z e^x\,dx.$$

Discretizamos el espacio de soluciones de la función u en la forma débil, siguiendo el esquema de Galerkin, utilizando en este caso 3 funciones lineales sombrero: $u = U_1\phi_1 + U_2\phi_2 + U_3\phi_3$. las ecuaciones de elemento finitos se obtienen sustituyendo $z = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ sucesivamente.

Los elementos de la matriz de rigidez serán:

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\,dx$$

y las componentes del vector de carga serán en este caso:

$$F_i = \int_0^1 \phi_i e^x\,dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

El cálculo explícito de estos elementos nos proporciona para la matriz de rigidez:

$$K_{ii} = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} \frac{dx}{h^2} = \frac{2}{h} = 8,$$

y las componentes de las sub-diagonales superior e inferior:

$$K_{ii+1} = \int_{ih}^{(i+1)h} -\frac{dx}{h^2} = -\frac{1}{h} = -4 = K_{i+1i}.$$

Para el vector de carga:

$$F_i = \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{1}{h}(x-(i-1)h)\right) e^x\, dx + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{-1}{h}(x-(i+1)h)\right) e^x\, dx = \frac{e^{ih}}{h}\left(e^h + e^{-h} - 2\right). \blacksquare$$

En forma matricial

$$K = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

y

$$F = \frac{1}{h}\left(e^h + e^{-h} - 2\right)\begin{pmatrix} e^h \\ e^{2h} \\ e^{3h} \end{pmatrix}$$

La solución del sistema $KU = F$ es:

$$U_1 \approx 0{,}1455,\ U_2 \approx 0{,}2104,\ U_3 \approx 0{,}1717.$$

La comparación de la solución de elementos finitos $u_{ef} = U_1\phi_1 + U_2\phi_2 + U_3\phi_3$ con la solución exacta del problema se muestra en la figura (1).

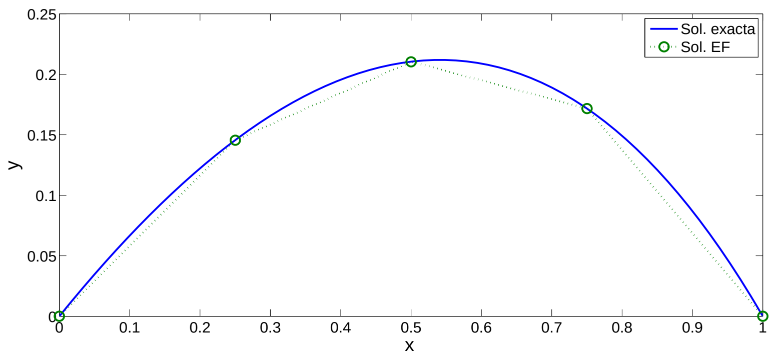

Figura 1:

$\blacksquare$

Solución: Apartado b)

La solución exacta del problema la obtenemos, de nuevo, integrando dos veces la EDO e imponiendo las condiciones de contorno:

$$u(x) = \frac{\log(1+x)}{\log(2)} - x.$$

La forma débil de este problema es

$$\int_0^1 (1+x)\frac{du}{dx}\frac{dz}{dx}\, dx = \int_0^1 z\, dx.$$

Los elementos de la matriz de rigidez vendrán dados por:

$$K_{ii} = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} \frac{(1+x)}{h^2}\, dx = \frac{2(ih+1)}{h},$$

y las componentes de las sub-diagonales superior e inferior:

$$K_{i+1i} = \int_{ih}^{(i+1)h} (1+x)\frac{1}{h}\frac{-1}{h}\, dx = -\frac{(h+2ih+2)}{2h}.$$

Para el vector de carga:

$$F_i = \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{1}{h}(x-(i-1)h)\right) dx + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{-1}{h}(x-(i+1)h)\right) dx = h.$$

En forma matricial y sustituyendo el valor $h = 1/4$:

$$K = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{11}{2} & 0 \\ -\frac{11}{2} & 12 & -\frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & 14 \end{pmatrix}$$

y

$$F = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema $KU = F$ es:

$$U_1 \approx 0{,}0715,\ U_2 \approx 0{,}0845,\ U_3 \approx 0{,}0571.$$

La comparación de la solución de elementos finitos $u_{ef} = U_1\phi_1 + U_2\phi_2 + U_3\phi_3$ con la solución exacta del problema se muestra en la figura (2).

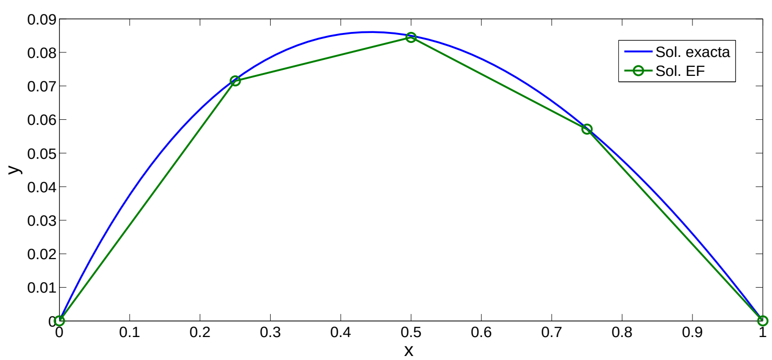

Figura 2:

■

2.- Encontrar la función $u(x,t)$ definida para $0 \le x \le \pi$ y $t \ge 0$ que satisface el problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0)=h(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

donde $h(x)$ viene dada por:

a) $h(x)=\sin(2x)$

b) $h(x)=\sin x+3\sin 2x-5\sin 3x$.

c) $h(x)=x(\pi-x)$.

Solución: **Apartado a)** Tal y como se describe en la Lectura 8, la solución de la ecuación de ondas en el intervalo $[0,\,\pi]$ y con condiciones de contorno en la variable x del tipo

$$u(x,0)=h_1(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=h_2(x),$$

vendrá dada por:

$$u(x,t)=(a_1\cos(t)+b_1\sin(t))\sin(x)+(a_2\cos(2t)+b_2\sin(2t))\sin(2x)+...$$

donde los coeficientes a_n corresponden a los de la serie de Fourier seno de $h_1(x)$ y los b_n satisfacen que:
$\frac{nc\pi}{L}b_n$ es el $n-$ésimo coeficiente de la serie de Fourier seno de $h_2(x)$.
En los tres apartados de este ejercicio, la función $h_2(x)=0$, de modo que todos los coeficientes b_n serán cero y únicamente tendremos coeficientes a_n.
Si $h(x)=\sin(2x)$ el único coeficiente no nulo de su serie de Fourier es $a_2=1$, por tanto la solución vendrá dada por

$$u(x,t)=\cos(2t)\sin(2x).$$

$\blacksquare$

Solución: **Apartado b)** En este caso, los tres primeros coeficientes de la serie de Fourier seno de $h(x)$ son, trivialmente,

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=-5,$$

y el resto son todos cero. De este modo:

$$u(x,t)=\sin x\cos t+3\sin 2x\cos 2t-5\sin 3x\cos 3t.$$

$\blacksquare$

Solución: **Apartado c)** La serie de Fourier seno de $h(x)$ vendrá dada por

$$h(x)=\frac{8}{\pi}\sin x+\frac{8}{27\pi}\sin(3x)+\frac{8}{125\pi}\sin(5x)+...$$

De este modo:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi}\sin x\cos t+\frac{8}{27\pi}\sin 3x\cos 3t+\frac{8}{125\pi}\sin 5x\cos 5t+...$$

$\blacksquare$