Ejercicio 1 *Calcular* $I_c = \oint_{ABCA} z^2\,\mathrm{d}\,x + x^2\,\mathrm{d}\,y + y^2\,\mathrm{d}\,z$, *siendo*

$$A\,(a,0,0)\,,\qquad B\,(0,b,0)\,,\qquad C\,(0,0,c)\,,\qquad a,\;b,\;c\;>\;0$$

yendo de un punto al siguiente sobre la curva intersección del elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

con el correspondiente plano coordenado.

Solución:

En la figura A obsevamos

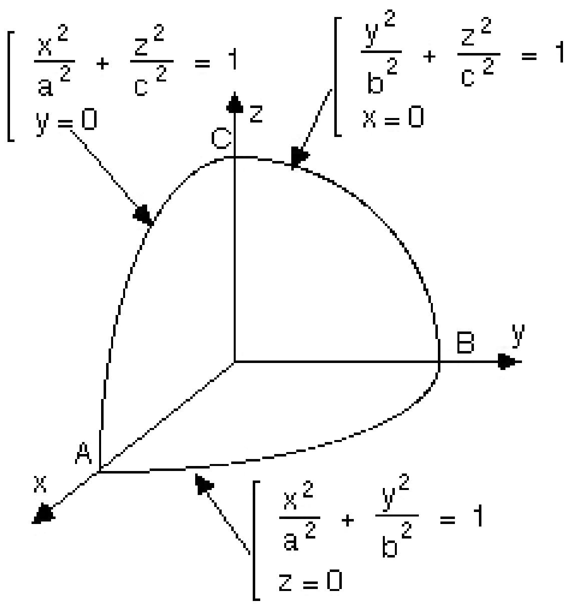

Figura A

$$\overline{AB}:\begin{cases}\dfrac{x\,\mathrm{d}\,x}{a^2}+\dfrac{y\,\mathrm{d}\,y}{b^2}=0;\\ \mathrm{d}\,z=0\end{cases}\qquad \overline{BC}:\begin{cases}\dfrac{y\,\mathrm{d}\,y}{b^2}+\dfrac{z\,\mathrm{d}\,z}{c^2}=0\\ \mathrm{d}\,x=0\end{cases}\qquad \overline{CA}:\begin{cases}\dfrac{x\,\mathrm{d}\,x}{a^2}+\dfrac{z\,\mathrm{d}\,z}{c^2}=0\\ \mathrm{d}\,y=0\end{cases}$$

y

$$\begin{aligned}
I_c &= \oint_{ABCA} = \oint_{AB} + \oint_{BC} + \oint_{CA} = \\
&= \oint_{AB} 0\,\mathrm{d}\,x + x^2\,\mathrm{d}\,y + y^2 0 + \oint_{BC} z^2 0 + 0\,\mathrm{d}\,y + y^2\,\mathrm{d}\,z + \oint_{CA} z^2\,\mathrm{d}\,x + x^2 0 + 0\,\mathrm{d}\,z = \\
&= \int_0^b a^2\left[1-\frac{y^2}{b^2}\right]\mathrm{d}\,y + \int_0^c b^2\left[1-\frac{z^2}{c^2}\right]\mathrm{d}\,y + \int_0^a c^2\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]\mathrm{d}\,x = \\
&= a^2\left[y-\frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b + b^2\left[z-\frac{z^3}{3c^2}\right]_0^c + c^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = \\
&= a^2\left[\frac{2b}{3}\right] + b^2\left[\frac{2c}{3}\right] + c^2\left[\frac{2a}{3}\right] = \frac{2}{3}\left[a^2b + b^2c + c^2a\right]
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $\boxed{2}$

a) Resuelve a ecuación $(x \operatorname{sen} \frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x})dx + x(1+\cos\frac{y}{x})dy = 0$

b) Resuelve la ecuación $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{4}{x}$

$\boxed{\text{Solución}}$:

Apartado a) Es homogénea

$$y' = \frac{y\cos(y/x) - x\operatorname{sen}(y/x)}{x(1+\cos(y/x))} \Rightarrow y' = \frac{(y/x)\cos(y/x) - \operatorname{sen}(y/x)}{1+\cos(y/x)}$$

Hacemos $u = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = & ux \\ y' = & u'x + u \end{cases}$ Sustituyendo $u'x + u = \frac{u\cos u - \operatorname{sen} u}{1+\cos u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u\cos u - \operatorname{sen} u}{1+\cos u} - u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} u - u}{1+\cos u} \Rightarrow \frac{1+\cos u}{u+\operatorname{sen} u}du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(u+\operatorname{sen} u) = -\ln x + \ln c \Rightarrow \frac{y}{x} + \operatorname{sen}(y/x) = \frac{c}{x}$

Apartado b): Es e.d. Euler ,escribimos $x^2y'' + xy' - y = 4x$.

Supongamos que $x > 0$. Haciendo el cambio $x = e^t$ se cumple que $\begin{cases} xy' = & D(y) \\ x^2y'' = & D(D-1)(y) \end{cases}$ sustituyendo $[D(D-1) + D - 1]\,(y) = 4e^t \Rightarrow (D^2-1)(y) = 4e^t \Rightarrow y''_t - y = 4e^t$.

Homogénea: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \Rightarrow y_h = ae^t + be^{-t}$.

Particular:Coeficientes Indeterminados: Ensayamos con $y_p = Ate^t$ entonces $y' = Ae^t(t+1); y'' = Ae^t(t+2)$. Sustituyendo en la ecuación $Ae^t(t+2) - Ate^t = 4e^t \Rightarrow 2Ae^t = 4e^t \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y_p = 2te^t$.

Por tanto: $y_g = y_h + y_p = ae^t + be^{-t} + 2te^t$.

Deshaciendo cambios $y(x) = a|x| + \frac{b}{|x|} + 2|x|\ln|x|$

3 Sea el sistema lineal completo:

$$\left\{ \begin{array}{rl} y_1' = & 2y_1 + y_2 + 2\,e^{2x} \\ y_2' = & -4y_1 + 2y_2 \end{array} \right. \tag{1}$$

a) Resolver el sistema (1), expresando la solución en la forma matricial

$$\mathbf{Y}(x) = \Psi(x)\,\mathbf{C} + \mathbf{Y_P}(x) \qquad \mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

b) Hallar la solución de (1) que verifique las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = -4$.

Solución

a) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} |A - \lambda\, I| = (2-\lambda)^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \pm 2i,$

$$\lambda = 2 + 2i \quad \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{u}(1, 2i)$$

$$\Psi_1(x) = Real \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{2x}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x) \right\} = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x \end{pmatrix}$$

$$\Psi_2(x) = Img \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{2x}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x) \right\} = e^{2x} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2x \\ 2\cos 2x \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix} \qquad \Psi(x)^{-1} = \frac{1}{2} e^{-2x} \begin{pmatrix} 2\cos 2x & -\operatorname{sen} 2x \\ 2\operatorname{sen} 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y_P} = \Psi(x) \int \Psi(x)^{-1} \begin{pmatrix} 2\,e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} dx = \Psi(x) \int \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ 2\operatorname{sen} 2x \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

$$\mathbf{Y}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

b)

$$\mathbf{Y}(0) = \Psi(0)\,\mathbf{C} + \mathbf{Y_P}(0); \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

Ejercicio 4 (FINAL) ①

$$\Psi(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|, \quad 0 < x < 50$$

a) Serie de Fourier seno:

$$\Psi(x) = \begin{cases} x/5, & 0 < x < 25 \\ 10 - x/5, & 25 < x < 50 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \Psi(x)\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Siendo $L = 50$ en este caso

Luego

$$b_n = \frac{2}{50}\left[\int_0^{25} x/5\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{25}^{50} (10 - x/5)\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx\right] =$$

$$= \boxed{\frac{40\, \text{sen}(n\pi/2)}{n^2\pi^2}}$$

Integrando por partes

De manera que la serie de Fourier seno contendrá sólo términos impares y de signos alternos. La expresión de la serie es:

$$\Psi(x) = b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{50}\right) + b_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{50}\right) + b_5 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{50}\right) + \cdots$$

donde los 3 1os coeficientes no nulos de la serie serán:

$$b_1 = 40/\pi^2 \, , \quad b_3 = \frac{-40}{9\pi^2} \, , \quad b_5 = \frac{40}{25\pi^2}$$

(2) La solución general vendrá dada por // Antes de imponer las condiciones $u(x,0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$

$$u(x,t) = \left(a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{50}\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{50}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{50}\right)$$

$$+ \left(a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{50}\right) + b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{50}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{50}\right)$$

$$+ \dots$$

Como $u(x,0) = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i$

Como $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n\pi}{50} \cdot b_n$ será el n-ésimo coeficiente de la serie de Fourier seno de $\Psi(x)$.

Luego

$$\frac{n\pi}{50} b_n = \frac{40 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2\pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{2000 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^3\pi^3}}$$

Luego la solución del problema será:

$$u(x,t) = b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{50}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{50}\right) + b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{50}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{50}\right) + \cdots$$

con $\left[b_K = 2000 \frac{\operatorname{sen}(K\pi/2)}{K^3\pi^3} \right]$

---

③ La discretización que nos piden corresponde a la siguiente partición:

$x_0 = 0,\ x_1 = 10,\ x_2 = 20,\ x_3 = 30,\ x_4 = 40,\ x_5 = 50$

es decir, $h = 10$.

La discretización de la EDO será

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + x_i u_i = \Psi(x_i)$$

$$\Rightarrow u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + h^2 x_i u_i = h^2 \Psi(x_i)$$

con $i = 1,2,3,4$ (sabiendo que $u_0 = u_5 = 0$)

Condiciones de contorno

Las ecuaciones de diferencias finitas serán:

$\underline{i=1}$: $$u_2 - 2u_1 + \cancel{u_0}^{\,0} + h^2 x_1 u_1 = h^2 \psi(x_1) \quad {}'' \ x_1/5$$

$\underline{i=2}$: $$u_3 - 2u_2 + u_1 + h^2 x_2 u_2 = h^2 \psi(x_2) \quad {}'' \ x_2/5$$

$\underline{i=3}$: $$u_4 - 2u_3 + u_2 + h^2 x_3 u_3 = h^2 \psi(x_3) \quad {}'' \left(10 - \frac{x_3}{5}\right)$$

$\underline{i=4}$: $$\cancel{u_5}^{\,0} - 2u_4 + u_3 + h^2 x_4 u_4 = h^2 \psi(x_4) \quad {}'' \left(10 - x_4/5\right)$$

Luego agrupando y sustituyendo los valores de x_1, x_2, x_3, x_4 y h, obtenemos:

$$(10^3 - 2)u_1 + u_2 = 10^2 \cdot 2$$

$$u_1 + (2 \cdot 10^3 - 2)u_2 + u_3 = 10^2 \cdot 4$$

$$u_2 + (3 \cdot 10^3 - 2)u_3 + u_4 = 10^2 \cdot 4$$

$$u_3 + (4 \cdot 10^3 - 2)u_4 = 10^2 \cdot 2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10^3-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cdot 10^3 - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \cdot 10^3 - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \cdot 10^3 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^2 \\ 4 \cdot 10^2 \\ 4 \cdot 10^2 \\ 2 \cdot 10^2 \end{pmatrix}$$