

Ejercicio

a) Resuelve la ecuación $(x \operatorname{sen} \frac{y}{x} - y \operatorname{cos} \frac{y}{x})dx + x(1 + \operatorname{cos} \frac{y}{x})dy = 0$

b) Resuelve la ecuación $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{4}{x}$

Solución:

Apartado a) Es homogénea

$$y' = \frac{y \operatorname{cos}(y/x) - x \operatorname{sen}(y/x)}{x(1 + \operatorname{cos}(y/x))} \Rightarrow y' = \frac{(y/x) \operatorname{cos}(y/x) - \operatorname{sen}(y/x)}{1 + \operatorname{cos}(y/x)}$$

Hacemos $u = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = ux \\ y' = u'x + u \end{cases}$ Sustituyendo $u'x + u = \frac{u \operatorname{cos} u - \operatorname{sen} u}{1 + \operatorname{cos} u} \Rightarrow x \frac{du}{dx} =$

$$\frac{u \operatorname{cos} u - \operatorname{sen} u}{1 + \operatorname{cos} u} - u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} u - u}{1 + \operatorname{cos} u} \Rightarrow \frac{1 + \operatorname{cos} u}{u + \operatorname{sen} u} du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(u + \operatorname{sen} u) = -\ln x +$$

$$\ln c \Rightarrow \frac{y}{x} + \operatorname{sen}(y/x) = \frac{c}{x}$$

Apartado b): Es e.d. Euler, escribimos $x^2 y'' + xy' - y = 4x$.

Supongamos que $x > 0$. Haciendo el cambio $x = e^t$ se cumple que $\begin{cases} xy' = D(y) \\ x^2 y'' = D(D-1)(y) \end{cases}$

sustituyendo $[D(D-1) + D - 1](y) = 4e^t \Rightarrow (D^2 - 1)(y) = 4e^t \Rightarrow y_t'' - y = 4e^t$.

Homogénea: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \Rightarrow y_h = ae^t + be^{-t}$.

Particular: Coeficientes Indeterminados: Ensayamos con $y_p = Ate^t$ entonces

$$y' = Ae^t(t+1); y'' = Ae^t(t+2). \text{ Sustituyendo en la ecuación } Ae^t(t+2) - Ate^t = 4e^t \Rightarrow 2Ae^t = 4e^t \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y_p = 2te^t.$$

Por tanto: $y_g = y_h + y_p = ae^t + be^{-t} + 2te^t$.

$$\text{Deshaciendo cambios } y(x) = a|x| + \frac{b}{|x|} + 2|x| \ln |x|$$

2. Sea el sistema lineal completo:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 2e^{2x} \\ y_2' = -4y_1 + 2y_2 \end{cases} \quad (1)$$

a) Resolver el sistema (1), expresando la solución en la forma matricial

$$\mathbf{Y}(x) = \Psi(x) \mathbf{C} + \mathbf{Y}_P(x) \quad \mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

b) Hallar la solución de (1) que verifique las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = -4$.

Solución

$$a) \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda I| = (2 - \lambda)^2 + 4 = 0 \implies \lambda = 2 \pm 2i,$$

$$\lambda = 2 + 2i \quad \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{u}(1, 2i)$$

$$\Psi_1(x) = \text{Real} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{2x} (\cos 2x + i \sin 2x) \right\} = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -2 \sin 2x \end{pmatrix}$$

$$\Psi_2(x) = \text{Imag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{2x} (\cos 2x + i \sin 2x) \right\} = e^{2x} \begin{pmatrix} \sin 2x \\ 2 \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{pmatrix} \quad \Psi(x)^{-1} = \frac{1}{2} e^{-2x} \begin{pmatrix} 2 \cos 2x & -\sin 2x \\ 2 \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_P = \Psi(x) \int \Psi(x)^{-1} \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} dx = \Psi(x) \int \begin{pmatrix} 2 \cos 2x \\ 2 \sin 2x \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

$$\mathbf{Y}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

b)

$$\mathbf{Y}(0) = \Psi(0) \mathbf{C} + \mathbf{Y}_P(0); \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

Ejercicio 4 (FINAL)

①

$$\Psi(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|, \quad 0 < x < 50$$

a) Serie de Fourier seno:

$$\Psi(x) = \begin{cases} x/5, & 0 < x < 25 \\ 10 - x/5, & 25 < x < 50 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Siendo $L = 50$ en este caso

luego

$$b_n = \frac{2}{50} \left[\int_0^{25} x/5 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx + \int_{25}^{50} (10 - x/5) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx \right] =$$

$$= \frac{40 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2 \pi^2}$$

Integrando
por partes

② La solución general vendrá dada por

↙ Antes de imponer las condiciones $u(x,0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$

$$u(x,t) = \left(a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{50}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi t}{50}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi x}{50}\right) \\ + \left(a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{50}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{50}\right) \right) \sin\left(\frac{2\pi x}{50}\right) \\ + \dots$$

Como $u(x,0) = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i$

Como $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n\pi}{50} \cdot b_n$ será el n -ésimo coeficiente de la serie de Fourier seno de $\Psi(x)$.

Entonces

$$\frac{n\pi}{50} b_n = \frac{40 \sin(n\pi/2)}{n^2 \pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[b_n = \frac{2000 \sin(n\pi/2)}{n^3 \pi^3} \right]$$

②

Entonces la solución del problema será:

$$u(x,t) = b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{50}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{50}\right) + b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{50}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{50}\right) + \dots$$

$$\text{con } \left[b_k = \frac{2000 \operatorname{sen}(k\pi/2)}{k^3 \pi^3} \right]$$

③ La discretización que nos piden corresponde a la siguiente partición:
 $x_0 = 0, x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30, x_4 = 40, x_5 = 50$
 es decir, $h = 10$.

La discretización de la EDO será

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + x_i u_i = \Psi(x_i)$$

$$\Rightarrow u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + h^2 x_i u_i = h^2 \Psi(x_i)$$

con $i = 1, 2, 3, 4$ (sabiendo que $u_0 = u_5 = 0$)

Condiciones
de contorno

Las ecuaciones de diferencias finitas serán:

$$\underline{i=1} : u_2 - 2u_1 + \cancel{u_0} + h^2 x_1 u_1 = h^2 \Psi(x_1) \quad // \quad x_1/5$$

$$\underline{i=2} : u_3 - 2u_2 + u_1 + h^2 x_2 u_2 = h^2 \Psi(x_2) \quad // \quad x_2/5$$

$$\underline{i=3} : u_4 - 2u_3 + u_2 + h^2 x_3 u_3 = h^2 \Psi(x_3) \quad // \quad (10 - x_3)/5$$

$$\underline{i=4} : \cancel{u_5} - 2u_4 + u_3 + h^2 x_4 u_4 = h^2 \Psi(x_4) \quad // \quad (10 - x_4/5)$$

después agrupando y sustituyendo los valores de x_1, x_2, x_3, x_4 y h , obtenemos:

$$(10^3 - 2)u_1 + u_2 = 10^2 \cdot 2$$

$$u_1 + (2 \cdot 10^3 - 2)u_2 + u_3 = 10^2 \cdot 4$$

$$u_2 + (3 \cdot 10^3 - 2)u_3 + u_4 = 10^2 \cdot 4$$

$$u_3 + (4 \cdot 10^3 - 2)u_4 = 10^2 \cdot 2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10^3 - 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cdot 10^3 - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \cdot 10^3 - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \cdot 10^3 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^2 \\ 4 \cdot 10^2 \\ 4 \cdot 10^2 \\ 2 \cdot 10^2 \end{pmatrix}$$