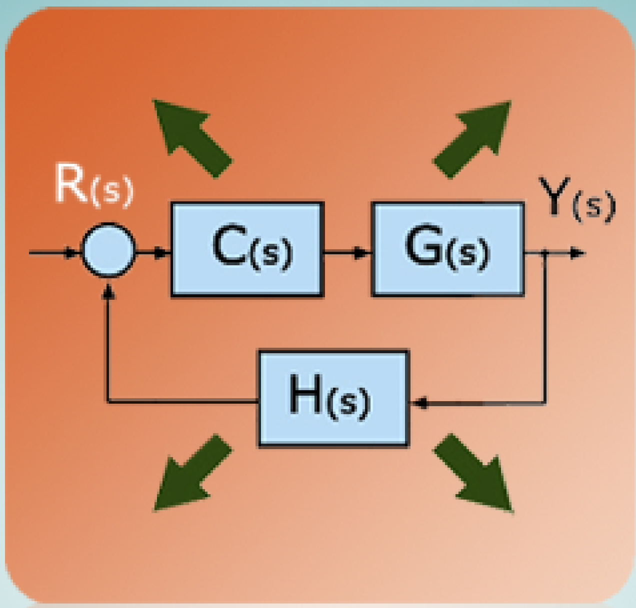
Automática

Capítulo 1. Modelado de Sistemas de Control



José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

1

Modelado de Sistemas de Control

1.1. INTRODUCCIÓN

Se puede definir el modelado de un determinado proceso como la obtención de un conjunto de funciones matemáticas que permiten representar, al menos de forma aproximada, el comportamiento de las variables de mayor interés del sistema bajo estudio.

Existen diferentes técnicas de modelado de sistemas dinámicos, pero de una forma muy esquematizada se pueden separar en dos grandes grupos: el modelado experimental y el modelado analítico. El modelado experimental hace uso de la respuesta del sistema ante determinadas entradas de prueba para obtener una función matemática que relaciona las variables de salida del sistema con las variables de entrada al mismo. Se puede decir que esta metodología de modelado ve al sistema a estudiar como una caja negra en la que no se analiza de ninguna forma el tipo de componentes que lo forman y que obtiene la expresión matemática que liga entradas y salidas sin conocer los elementos internos.

A lo largo del presente capítulo se presentarán diversas aplicaciones y ejemplos en los que se utiliza este tipo de modelado con el fin de asociar el sistema analizado a uno de los tipos más comunes. Los ejemplos de la aplicación de este modelado se pueden encontrar en el capítulo dedicado a la respuesta transitoria.

Por el contrario, el modelado analítico pretende obtener el conjunto de funciones matemáticas que representan el comportamiento del sistema, en base al estudio detallado de cada uno de los componentes que lo integran y sus interrelaciones. Esta metodología es la que proporciona un mayor volumen de información acerca del funcionamiento del sistema, del conjunto de variables así como de la interrelación entre las mismas.

Cabe señalar, sin embargo, que el volumen de trabajo a desarrollar por el ingeniero de control para conseguir el correcto modelado analítico es, en principio, mucho mayor que en el caso experimental debido a que es necesario conocer el funcionamiento de cada uno de los elementos que lo componen y describir éste de forma matemática. Si tenemos en cuenta, además, que un determinado proceso puede agrupar elementos de áreas tan dispares como electroválvulas neumáticas, estructuras mecánicas, motores eléctricos, muelles, reacciones químicas, filtros físicos, palancas, contrapesos, tiristores, etc., es posible hacerse una idea acerca del volumen de trabajo que requiere este tipo de modelado para un proceso complejo.

No es posible, por lo tanto, abordar todo el posible abanico de sistemas y procesos con los que un ingeniero puede encontrarse. Sin embargo, es interesante establecer una cierta clasificación de los diferentes tipos de sistemas, así como modelizar aquel conjunto que sea de interés, bien por su interés didáctico o bien porque se corresponda con un elemento de uso común en los sistemas de control.

Indicar, por último, que en aplicaciones de tipo práctico, el compromiso entre el modelado analítico y el modelado experimental suele ser el procedimiento general para la obtención del modelo aproximado deseado. Así mismo, es importante señalar que el modelado matemático de un sistema de control se puede expresar de formas diversas (modelo continuo, modelo discreto, en variables de estado, en función de transferencia), pero que a lo largo del presente texto únicamente se consideran modelos de sistemas continuos representados, bien mediante su ecuación integro-diferencial o bien mediante su función de transferencia.

1.2. CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DE CONTROL

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar de muchas formas pero, tal vez, la más interesante puede ser atendiendo a las variables físicas que manejan en:

- Mecánicos: Compuestos por masas, resortes, amortiguadores, etc.
- Eléctricos: Compuestos por resistencias, capacidades, inductancias, amplificadores operacionales, etc.
- Electromecánicos: como por ejemplo motores y generadores.
- Térmicos: En los que se producen transferencias de calor entre las sustancias, ya sea por conducción, convección o radiación.
- Hidráulicos: Aquellos sistemas cuyo funcionamiento conlleva un flujo de líquidos.
- Neumáticos: Aquellos sistemas que contiene fluidos a presión, tales como el aire.
- Químicos: en su funcionamiento se producen reacciones químicas.
- Etc.

1.3. ANALOGÍAS.

Antes de obtener modelos matemáticos de los elementos físicos que componen los sistemas de control, es interesante indicar que existen componentes que presentan cierto tipo de relación, aún cuando su aspecto físico y función puedan ser muy diferentes. En algunos casos, se observa que, aún siendo sus variables de diferente naturaleza, sus evoluciones en el tiempo presentan características comunes, de forma que se puede establecer una cierta analogía entre ambos sistemas, denominado estos como "sistemas análogos". Se dice que dos sistemas son análogos cuando las ecuaciones diferenciales que definen su comportamiento tienen igual forma matemática. De esta manera, comparando ambas ecuaciones pueden definirse también las variables análogas. Por tanto, matemáticamente la solución de ambas ecuaciones diferenciales será la misma y el comportamiento de las variables análogas será también idéntico.

Este principio de analogía se ha venido utilizando a lo largo de muchos años, especialmente cuando no existía la posibilidad de utilizar computadores digitales para simulación de procesos, para la obtención de circuitos eléctricos que permitan simular el comportamiento del sistema real. En concreto, se busca un circuito eléctrico cuyas ecuaciones tengan la misma forma que las ecuaciones que definen al sistema que se desea analizar. Para ello a partir de las ecuaciones que definen el comportamiento del sistema utilizando las variables análogas se obtienen las expresiones análogas para el circuito eléctrico y se representa dicho circuito. Esto permitía, por ejemplo, construir un circuito eléctrico análogo a un sistema mecánico determinado, y poder simular el comportamiento del sistema mecánico mediante el circuito eléctrico sin tener que fabricar los componentes mecánicos para cada una de las posibles condiciones de simulación.

Aunque el principio de analogía permite establecer relaciones entre sistemas de cualquier tipo, se pueden destacar como las de mayor relevancia, por su amplio uso, las que establecen relaciones entre los sistemas de tipo mecánico con los sistemas de tipo eléctrico. En este caso, es habitual utilizar los dos tipos de analogía que se indican a continuación.

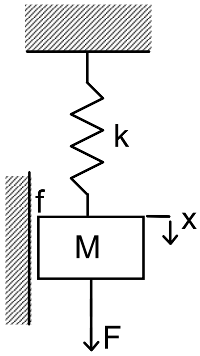
1.3.1. Analogía Fuerza-Tensión.

En este tipo de analogía, se consideran como variables análogas la fuerza en el circuito mecánico y la tensión en el circuito eléctrico se tendrán las variables análogas según la siguiente tabla:

Relaciones análogas en Fuerza - Tensión:	
Fuerza (Par)	Tensión (v)
Masa(Inercia)	Inductancia (L)
Fricción	Resistencia (R)
Elasticidad	Inversa de Capacidad (1/C)
Desplazamiento	Carga (q)
Velocidad	Intensidad (i)

EJEMPLO 1.1.

Modelar el circuito mecánico de la figura y calcular el circuito eléctrico análogo utilizando la analogía Fuerza - Tensión:



Para este sistema mecánico, la ecuación que lo modela es:

$$F(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f\frac{dx(t)}{dt} + kx(t)$$

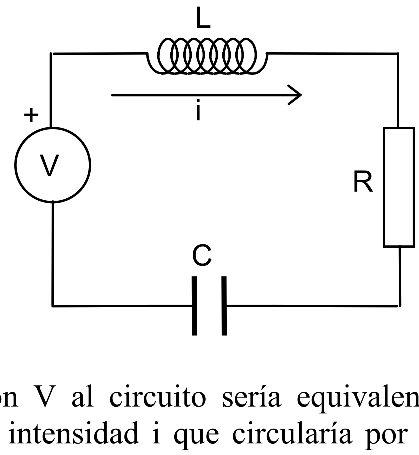
Aplicando las relaciones análogas en Fuerza - Tensión:

$$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t)$$

Como $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ el circuito análogo será:

$$\boxed{v(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt}$$

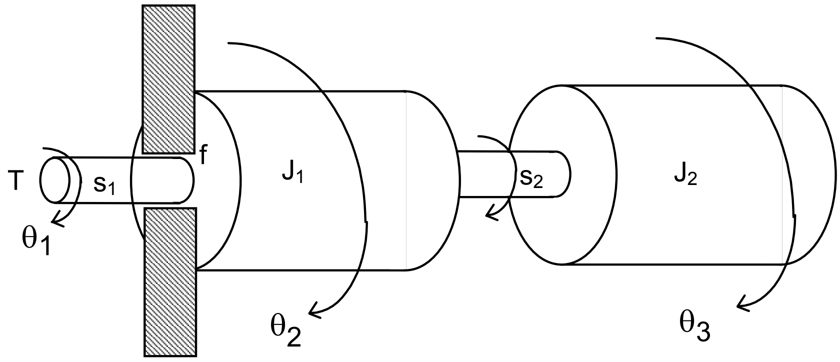
Al que corresponde la representación:



Luego el aplicar una tensión V al circuito sería equivalente a aplicar una fuerza F al sistema mecánico. Entonces la intensidad i que circularía por el circuito sería análoga a la velocidad que adquiriría la masa y la carga al desplazamiento de la masa.

EJEMPLO 1.2.

Modelar el sistema de la figura y calcular el circuito eléctrico análogo, utilizando la analogía fuerza - tensión:



Para este sistema mecánico de rotación, las ecuaciones vienen dadas de la siguiente forma:

$$T(t) = s_1(\theta_1(t) - \theta_2(t))$$

$$s_1(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = J_1 \frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} + f\frac{d\theta_2(t)}{dt} + s_2(\theta_2(t) - \theta_3(t))$$

$$s_2(\theta_2(t) - \theta_3(t)) = J_2 \frac{d^2\theta_3(t)}{dt^2}$$

Y aplicando la analogía fuerza-tensión de la tabla anterior:

$$v(t) = \frac{1}{C_1}(q_1(t) - q_2(t))$$

$$\frac{1}{C_1}(q_1(t) - q_2(t)) = L_1 \frac{d^2q_2(t)}{dt^2} + R\frac{dq_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_2}(q_2(t) - q_3(t))$$

$$\frac{1}{C_2}(q_2(t) - q_3(t)) = L_2 \frac{d^2q_3(t)}{dt^2}$$

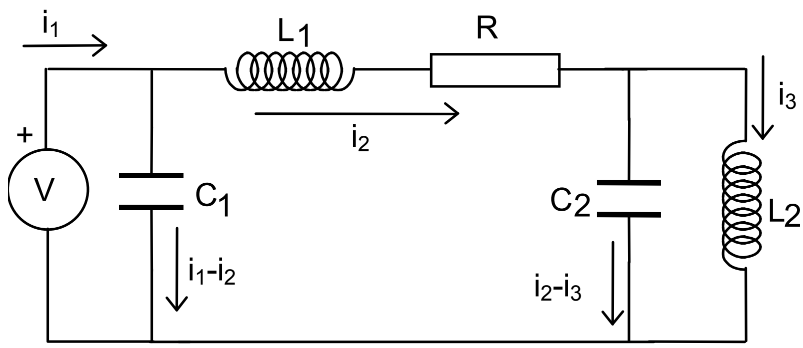
Como $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ se obtendrán las siguientes ecuaciones:

$$v(t) = \frac{1}{C_1}\int (i_1(t) - i_2(t))dt$$

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1(t) - i_2(t))dt = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + Ri_2(t) + \frac{1}{C_2}\int (i_2(t) - i_3(t))dt$$

$$\frac{1}{C_2}\int\left(i_2(t)-i_3(t)\right)dt = L_2\,\frac{di_3(t)}{dt}$$

En la figura se representa el circuito correspondiente a dichas ecuaciones.



Luego la tensión V aplicada al circuito sería equivalente al par T aplicado al sistema mecánico, las intensidades i_1 e i_2 sería análogas a la velocidades que adquirirían la masas y las cargas al desplazamiento de la masas.

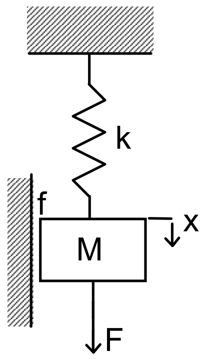
1.3.2. Analogía Fuerza-Corriente.

Considerando ahora como variables análogas la fuerza del circuito mecánico y la corriente del circuito eléctrico, se tendrán como variables análogas las representadas en la siguiente tabla.

Relaciones análogas en Fuerza - Corriente:	
Fuerza (Par)	Intensidad (i)
Masa(Inercia)	Capacidad (C)
Fricción	Inversa de Resistencia (1/R)
Elasticidad	Inversa de Inductancia (1/L)
Desplazamiento	Flujo Magnético (f)
Velocidad	Tensión (v)

EJEMPLO 1.3.

Para el sistema del Ejemplo 1.1. calcular el circuito eléctrico análogo utilizando la analogía Fuerza - Corriente:



Partiendo de las ecuaciones que modelan el sistema mecánico:

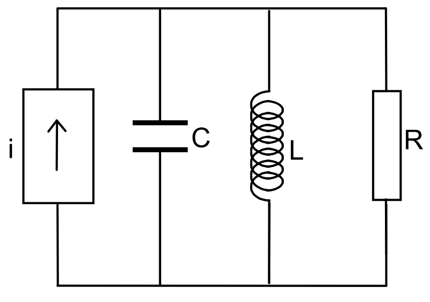
$$F(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f\frac{dx(t)}{dt} + kx(t)$$

Aplicando la analogía fuerza-corriente:

$$i(t) = C\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\phi(t)}{dt} + \frac{1}{L}\phi(t)$$

Como $v(t) = \dfrac{d\phi(t)}{dt}$ el circuito análogo será:

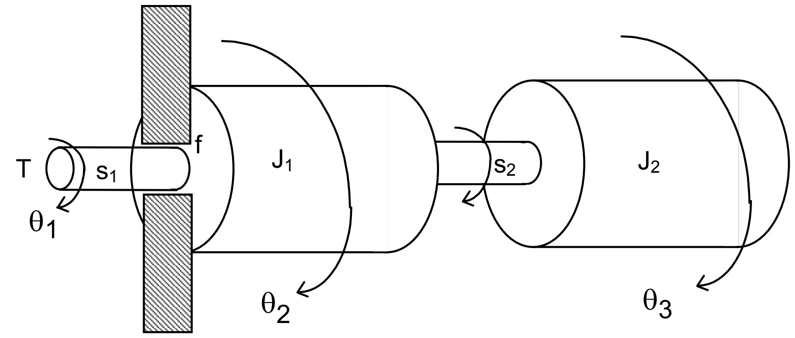
$$\boxed{i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) + \frac{1}{L}\int v(t)dt}$$



En este caso, la intensidad de la fuente es análoga a la fuerza aplicada, la tensión a la velocidad de la masa y el flujo al desplazamiento. De esta forma, no es necesario construir el sistema mecánico para observar su funcionamiento, sino que basta con realizar su circuito eléctrico equivalente. La ventaja de utilizar esta analogía es aún más relevante cuando se desea observar el funcionamiento del sistema mecánico con diferentes masas, rozamientos, etc.

EJEMPLO 1.4.

Para el sistema del Ejercicio 1.2. calcular el circuito eléctrico análogo, utilizando la analogía Fuerza - Corriente:



Las ecuaciones que modelan el sistema pueden verse en el ejercicio 1.2.

Aplicando la analogía fuerza-corriente:

$$i(t)=\frac{1}{L_1}\left(\phi_1(t)-\phi_2(t)\right)$$

$$\frac{1}{L_1}\left(\phi_1(t)-\phi_2(t)\right)=C_1\frac{d^2\phi_2(t)}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{d\phi_2(t)}{dt}+\frac{1}{L_2}\left(\phi_2(t)-\phi_3(t)\right)$$

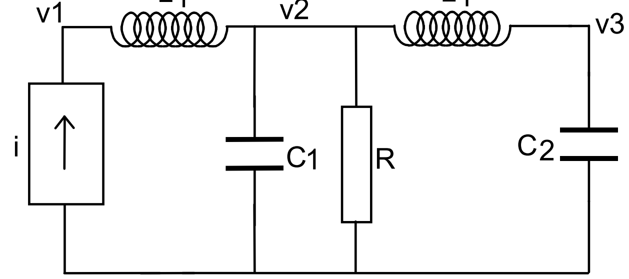
$$\frac{1}{L_2}\left(\phi_2(t)-\phi_3(t)\right)=C_2\frac{d^2\phi_3(t)}{dt^2}$$

Como $v(t)=\frac{d\phi(t)}{dt}$:

$$i(t)=\frac{1}{L_1}\int\left(v_1(t)-v_2(t)\right)dt$$

$$\frac{1}{L_1}\int\left(v_1(t)-v_2(t)\right)dt=C_1\frac{dv_2(t)}{dt}+\frac{1}{R}v_2(t)+\frac{1}{L_2}\int\left(v_2(t)-v_3(t)\right)dt$$

$$\frac{1}{L_2}\int\left(v_2(t)-v_3(t)\right)dt=C_2\frac{dv_3(t)}{dt}$$



1.4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Dadas las ecuaciones integro-diferenciales de un sistema, se denomina función de transferencia a un modelo matemático que relaciona las variables de salida y de entrada de un sistema por medio del uso de la transformada de Laplace. Esto es únicamente válido para ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo.

Se obtendrá tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas en cada una de las ecuaciones que relacionan las variables del sistema y representando la relación existente entre la variable de salida y la variable de entrada. Por tanto, despejando la variable de salida entre la variable de entrada, la función de transferencia vendrá dada por un cociente de dos polinomios en la variable compleja ‘s’. El grado del polinomio del denominador será el orden del sistema, a las raíces de este denominador se las denomina como "polos de la función de transferencia" o "polos", y a las raíces del numerador se las denomina como "ceros de la función de transferencia" o, simplemente, "ceros".

Además, tal y cómo se ha visto en las analogías, si se tienen dos sistemas análogos se obtendrán por tanto funciones de transferencia idénticas, aún siendo sistemas físicamente diferentes.

1.4.1. Linealización de ecuaciones

Puede ocurrir que alguna de las ecuaciones que rige el comportamiento de un sistema no sea lineal, es decir, que la relación entre las variables no pueda representarse como una combinación lineal.

Si el sistema funciona alrededor de unos valores concretos de las variables involucradas, es decir, entorno a un punto de funcionamiento, una posible solución para llegar a la función de transferencia puede ser linealizar dicha ecuación entorno a dicho punto de trabajo. De esta forma la ecuación lineal obtenida puede sustituir a la ecuación no lineal mientras que el valor de la variables no se desvíen demasiado de los valores de funcionamiento definidos al linealizar. Puede obtenerse dicha linealización utilizando el desarrollo en serie de Taylor de dicha función. Dada una función que depende de una única variable x:

$$y = g(x)$$

El desarrollo en serie de Taylor en torno al punto de equilibrio x_0 será:

$$y = g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots$$

Considerando únicamente los dos primeros términos de dicho desarrollo:

$$y = g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!}$$

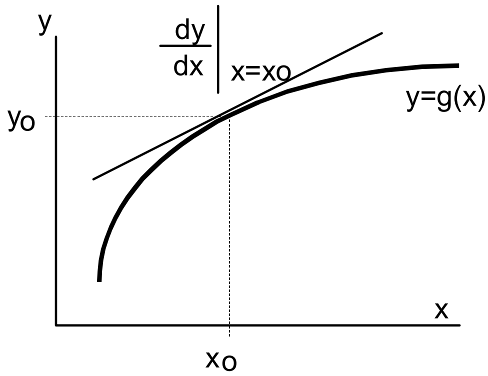
La función linealizada quedará como:

$$y - g(x_0) = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

Que puede ponerse como:

$$\Delta y = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x \,; \qquad \Delta y = m\,\Delta x$$

En la figura siguiente se puede ver, de forma gráfica, la aproximación realizada.



Gráficamente, para un sistema con una variable de entrada y una variable de salida, se puede ver como la sustitución de la curva que representa la relación entre ambas variables por la tangente a dicha curva en el punto de funcionamiento deseado. En este caso para pequeñas variaciones de dichas variables, la diferencia entre la curva y la tangente es también pequeña.

Para un sistema que dependa de dos variables:

$$z = g(x, y)$$

El desarrollo en serie de Taylor en torno al punto de equilibrio (x_0, y_0) será:

$$z = g(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \frac{(y-y_0)}{1!} + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \frac{(x-x_0)^2}{2!} +$$

$$+ \left.\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \frac{(y-y_0)^2}{2!} + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} (x-x_0)(y-y_0) + \ldots$$

Considerando únicamente los dos primeros términos de dicho desarrollo:

$$z = g(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \frac{(y-y_0)}{1!}$$

La función linealizada quedará como:

$$z - g(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} (x-x_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} (y-y_0)$$

$$\Delta z = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \cdot \Delta y$$