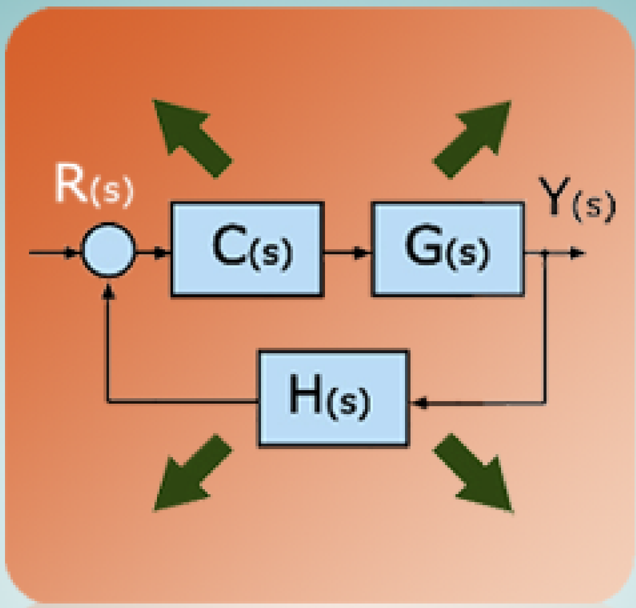
Automática

Capítulo 4. Respuesta de Régimen Transitorio



José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

4

Respuesta de Régimen Transitorio

4.1. INTRODUCCIÓN

Como se ha indicado previamente, la respuesta de un sistema dinámico estable, ante una señal de entrada limitada en amplitud, presenta dos zonas claramente diferentes. El capítulo anterior se enfocaba hacia la primera de ellas, el régimen permanente. Esto es, la zona de la respuesta en la que las señales se han estabilizado, de forma que toman valores constantes o crecimientos sostenidos. Este capítulo, por el contrario, se centra en la zona inmediatamente posterior a la introducción de la señal de entrada y donde, debido a esta entrada, se producirá una evolución de las diferentes señales del sistema hasta un nuevo estado. A esta zona se la denomina como "régimen transitorio" o "régimen dinámico".

Con objeto de comparar las características de los diferentes sistemas de control, se analiza el comportamiento de éstos ante señales típicas de prueba, tales como impulso, escalón y rampa. Además, es importante señalar que, básicamente, la respuesta de todos los sistemas dinámicos lineales puede dividirse en tres grandes grupos: sistemas de primer orden, sistemas de segundo orden y sistemas de orden superior, y que este último se puede obtener como agregación de los dos anteriores.

4.2. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

La función de transferencia de un sistema de primer orden tiene la forma siguiente:

$$\boxed{G(s) = \frac{K}{Ts+1}}$$

Donde:

T: Constante de tiempo del sistema.
K: Ganancia del sistema en estado estacionario.

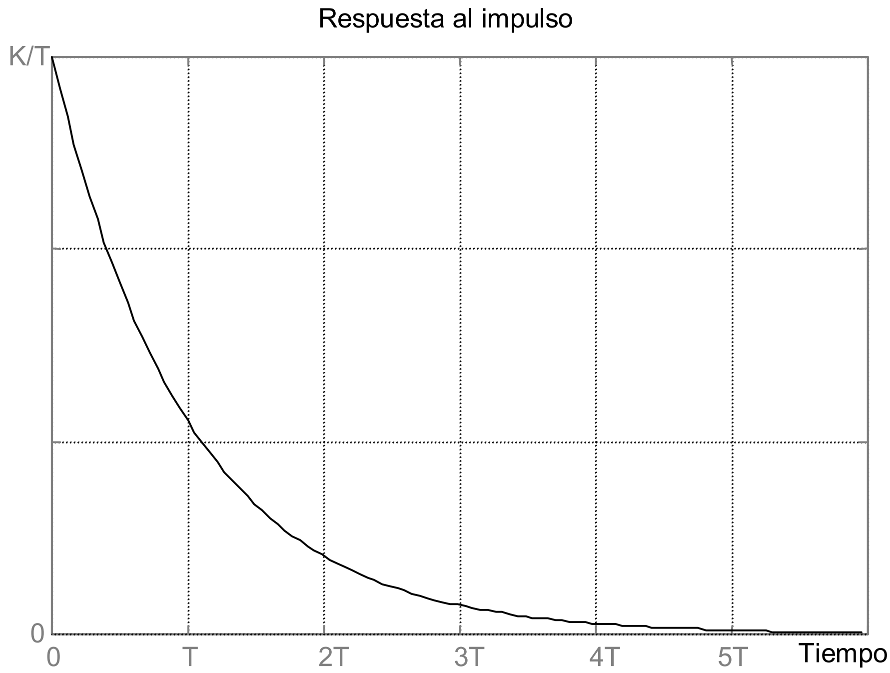
4.2.1. Respuesta al impulso:

$$Y(s) = G(s)\cdot\delta(s) = \frac{K}{Ts+1} = \frac{K/T}{s+1/T}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}}$$

$$\text{Valor inicial: } y(0) = \frac{K}{T}e^{0} = \frac{K}{T}$$

$$\text{Valor final: } y(\infty) = \frac{K}{T}e^{-\infty} = 0$$



4.2.2. Respuesta al escalón unitario:

$$Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s} = K\frac{1/T}{s(s+1/T)}$$

$$Y(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}\right)$$

Tomando transformadas inversas de Laplace se tendrá:

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)}$$

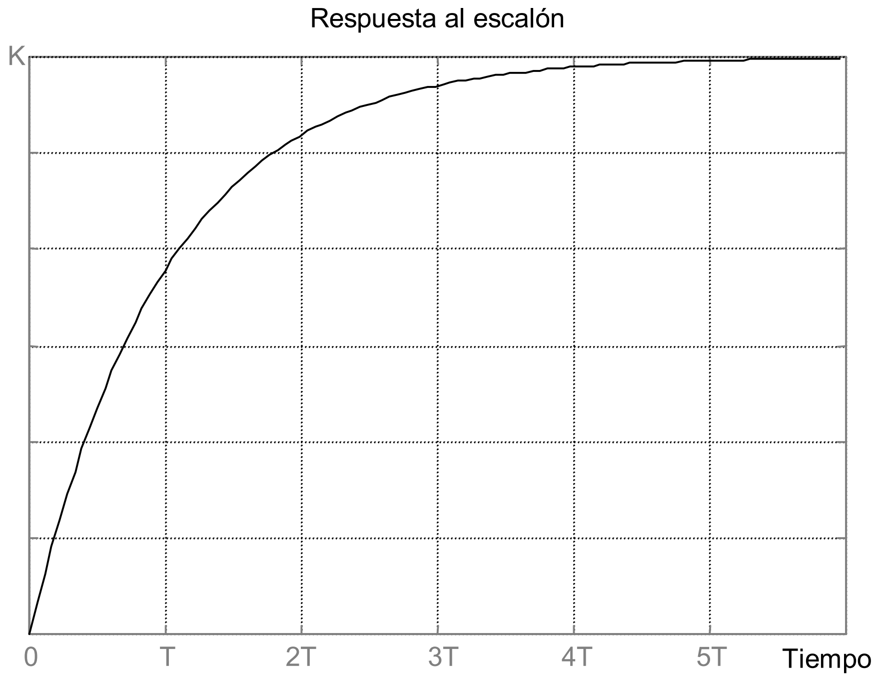
Valor inicial: $y(0) = K(1 - e^{-0}) = 0$

Valor final: $y(\infty) = K(1 - e^{-\infty}) = K$

Cuando t=T se alcanza el 63.2% del valor final de la respuesta:

$$y(T) = K(1 - e^{-1}) = 0.632K$$

Luego cuanto menor sea la constante de tiempo del sistema T, más rápido es el sistema.



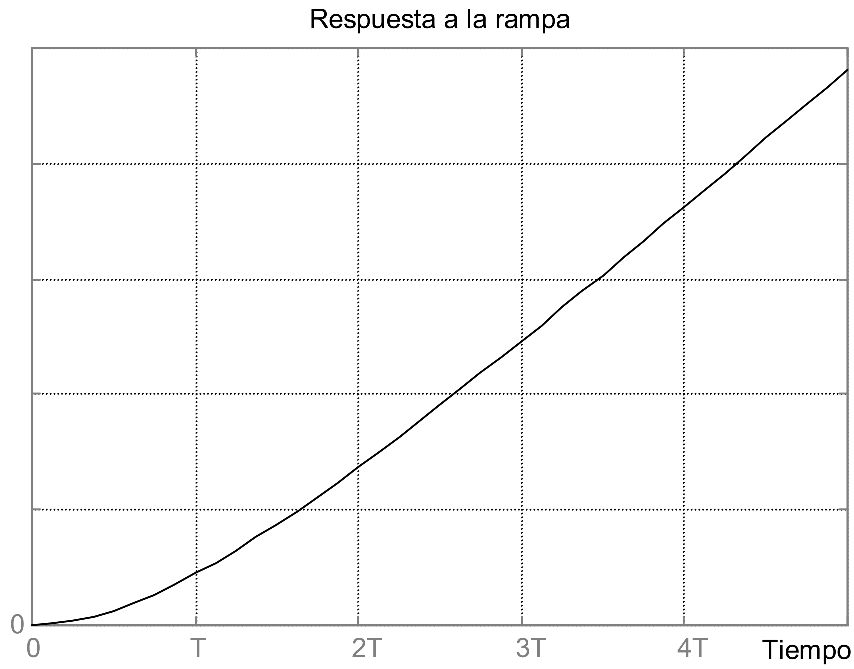
4.2.3. Respuesta a la rampa.

$$Y(s) = G(s)\cdot R(s) = \frac{K}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = K\frac{1/T}{s^2(s + 1/T)}$$

$$Y(s) = K\left(\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + 1/T}\right)$$

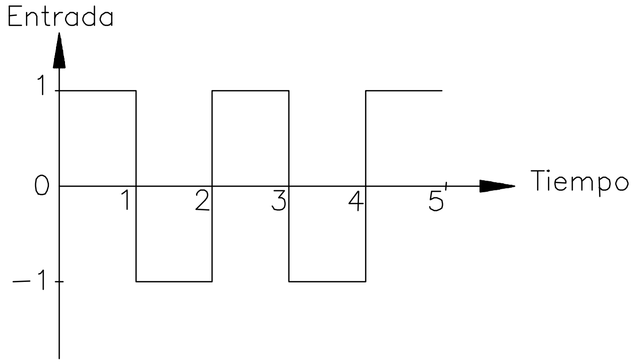
Tomando transformadas inversas de Laplace se tendrá:

$$\boxed{y(t) = K\left(t - T + Te^{-\frac{t}{T}}\right)}$$



EJEMPLO 4.1.

A un sistema cuya función de transferencia de lazo cerrado es $M(s) = \frac{1}{s+1}$ se le aplica una entrada como la de la figura:



Calcular y dibujar, de forma aproximada, la salida.

En t=0 sea aplica una entrada escalón unitario:

$$r(t) = 1 \quad \rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1} Y(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

Para t= 1 segundo: $y(1) = 1 - e^{-1} = 0.632$

En t= 1 segundo la entrada es de un escalón de amplitud -2:

$$r(t) = -2 R(s) = \frac{-2}{s}$$

$$Y(s) = \frac{-2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = -2 B = 2$$

$$y(t) = -2\left(1 - e^{-t}\right)$$

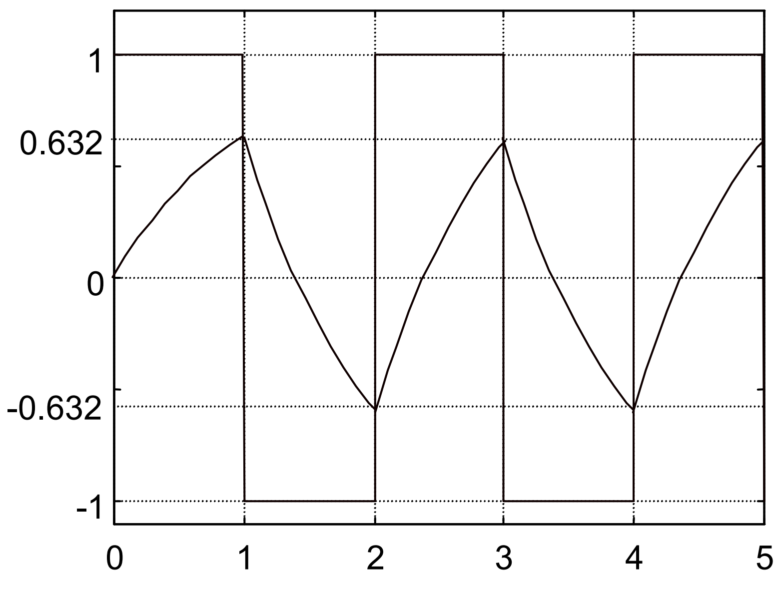
Para $t = 2$ segundos: $y(2) = 0.632 - 2\left(1 - e^{-1}\right) = -0.632$

En t = 2 segundos la entrada es un escalón de amplitud +2:

$$r(t) = 2R(s) = \frac{2}{s}$$

$$y(t) = 2\left(1 - e^{-t}\right)$$

Para $t = 3$ segundos: $y(3) = -0.632 + 2\left(1 - e^{-1}\right) = 0.632$



4.3. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Forma canónica de un sistema de segundo orden:

$$\boxed{G(s) = \frac{w^2{}_n}{s^2 + 2\delta w_n s + w^2{}_n}}$$

Ecuación característica:

$$s^2 + 2\delta w_n s + w^2{}_n = 0$$

$$s_{1,2} = -\delta w_n \pm w_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

$$s_{1,2} = -\delta w_n \pm j w_n\sqrt{1 - \delta^2}$$

Frecuencia natural amortiguada:

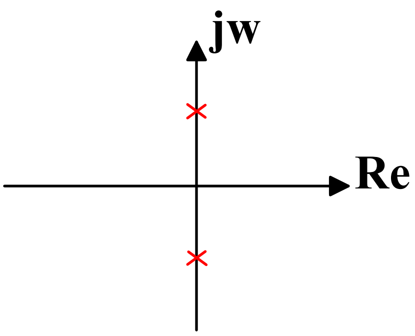
$$w_d = w_n\sqrt{1 - \delta^2}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\delta w_n \pm j w_d}$$

4.3.1. Sistema no amortiguado ($\delta = 0$)

Formado por dos polos imaginarios puros:

$$\boxed{s_{1,2} = \pm j w_n}$$



$$G(s) = \frac{w^2{}_n}{(s + jw_n)(s - jw_n)} = \frac{w^2{}_n}{s^2 + w_n^2}$$

Respuesta a un escalón unidad:

$$Y(s) = \frac{w^2{}_n}{(s^2 + w_n^2)s}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Ms + N}{s^2 + w_n^2}$$

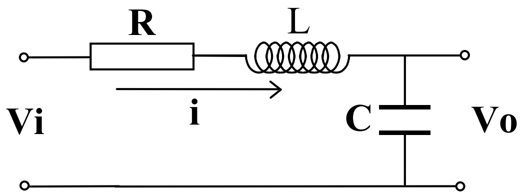
A=1; M=-1; N=0

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + w_n^2}$$

$$\boxed{y(t) = 1 - Cos(W_n t)}$$

EJEMPLO 4.2.

Para el sistema mostrado en la figura obtener la respuesta ante un escalón unitario.



Suponiendo: $L = 1Hr;\ C = 1F\ \ y\ \ R = 0\Omega$

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{w^2{}_n}{s^2 + 2\delta w_n s + w^2{}_n}$$

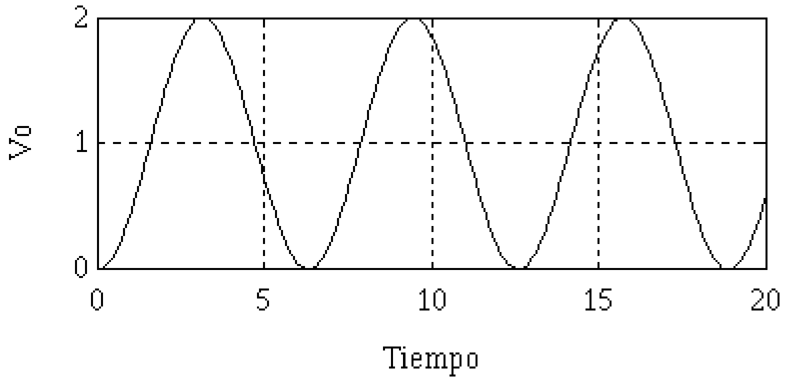
$$w_n = 1/\sqrt{LC}\ ; \quad \delta = R\sqrt{C}/\sqrt{4L}$$

Suponiendo: $L = 1Hr;\ C = 1F\ \ y\ \ R = 0\Omega$

$$w_n = 1\ ; \quad \delta = 0$$

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 + 1}\ ; \quad V_0(s) = \frac{1}{(s^2+1)s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

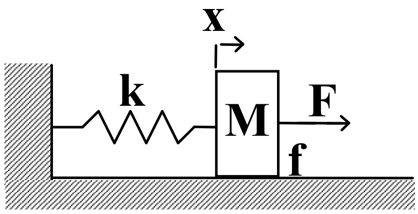
$$\boxed{v_o(t) = 1 - Cos(t)}$$



EJEMPLO 4.3.

Calcular la respuesta del sistema ante un escalón unitario suponiendo:

$$M = 0.25\text{Kg};\ k = 1\text{N/m} \quad y \quad f = 0\text{N/(m/s)}.$$



$$\frac{X(s)}{F(s)} = C\frac{w^2_n}{s^2 + 2\delta w_n s + w^2_n}$$

$$w_n = \sqrt{k/M}\,; \quad \delta = f\sqrt{M}\Big/\sqrt{4k}\,; \quad C = 1/k$$

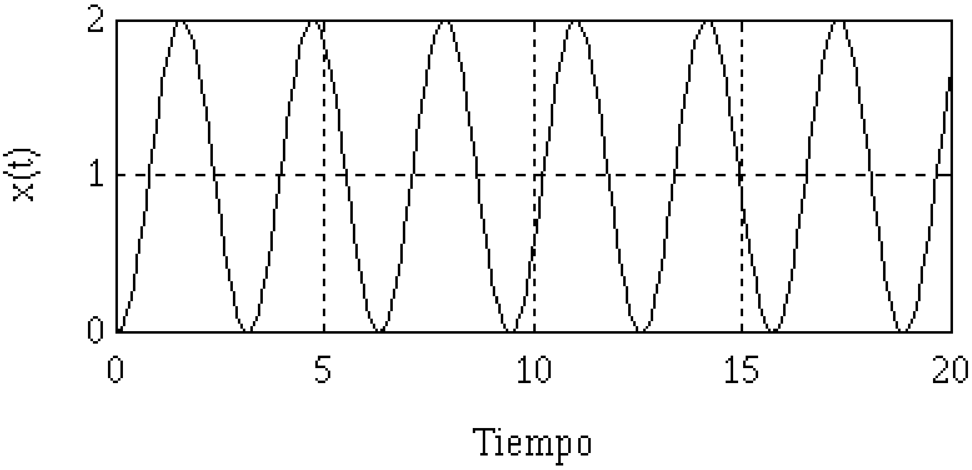
$$w_n = 2\,; \quad \delta = 0\,; \quad C = 1$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{4}{s^2 + 4}$$

$$\text{Escalón unitario: } F(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{4}{(s^2 + 4)s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\boxed{v_o(t) = 1 - \text{Cos}(2t)}$$

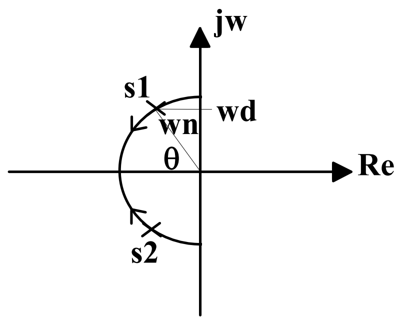


4.3.2. Sistema subamortiguado ($0 < \delta < 1$)

Formado por dos polos complejos conjugados.

$$\boxed{s_{1,2} = -\delta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

$$|s_1| = w_n ; \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)$$



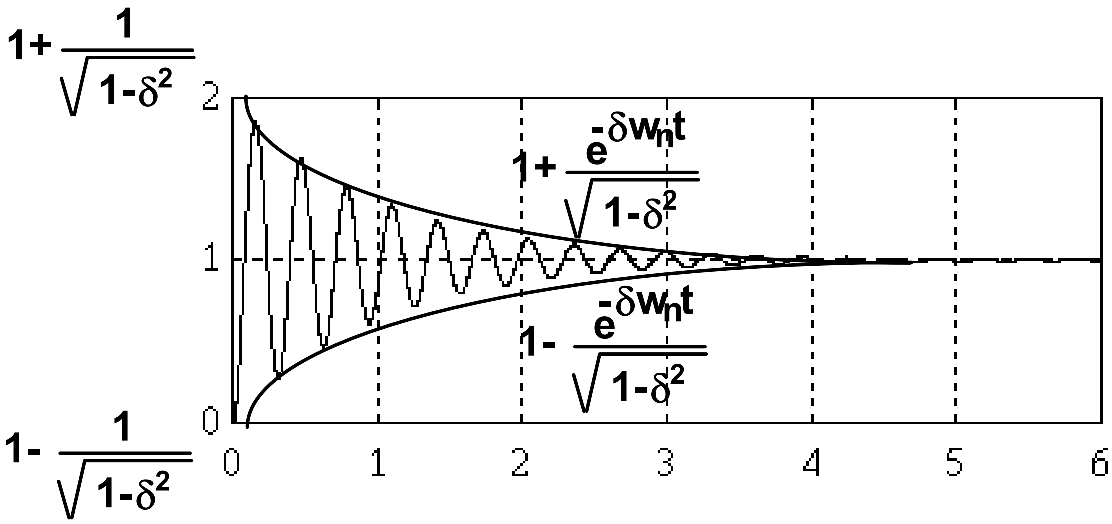
$$\boxed{\theta = \arccos(\delta)}$$

Respuesta a un escalón unidad:

$$Y(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2)s}$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n t} \operatorname{sen}(w_d t + \theta)$$

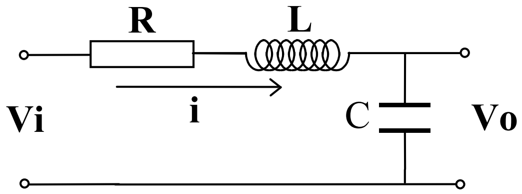
$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n t} \operatorname{sen}(w_d t + \theta)$$



EJEMPLO 4.4.

Calcular la respuesta del sistema de la figura al escalón unitario suponiendo:

$$L = 1\text{Hr};\ C = 1\text{F} \quad y \quad R = 0.6\Omega$$



$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2}$$

$$w_n = 1/\sqrt{LC}\,; \quad \delta = R\sqrt{C}/\sqrt{4L}$$

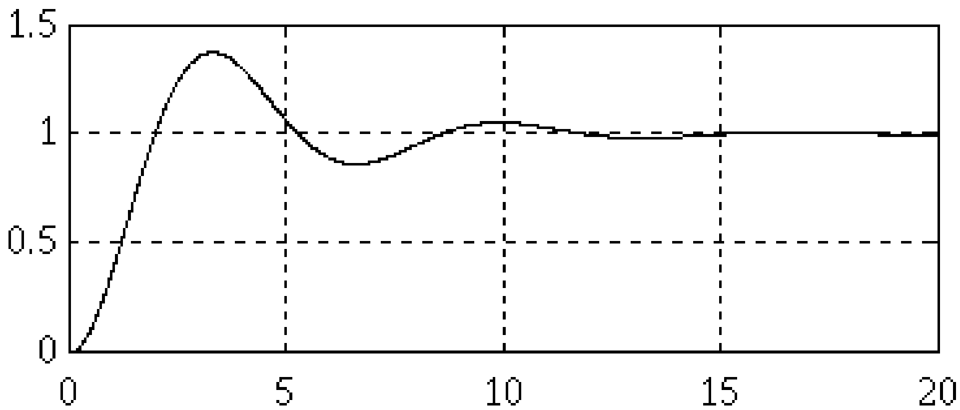
$$w_n = 1\,; \quad \delta = 0.3$$

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}$$

$$\text{Escaló unitario:} \quad V_i(s) = \frac{1}{s}$$

$$V_0(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.6s + 1)s}$$

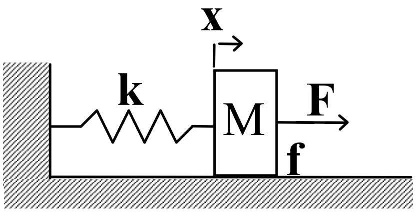
$$v_0(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 0.3^2}}\, e^{-0.3t}\, \text{sen}\left(0.954t + 72.54\right)$$



EJEMPLO 4.5.

Calcular la respuesta del sistema de la figura ante un escalón unitario suponiendo:

$$M = 0.25Kg;\ k = 1N/m \quad y \quad f = 0.125N/(m/s)$$



$$\frac{X(s)}{F(s)} = C\frac{w_n^2}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2}$$

$$w_n = \sqrt{k/M}\,; \quad \delta = f\big/(2\sqrt{Mk})\,; \quad C = 1/k$$

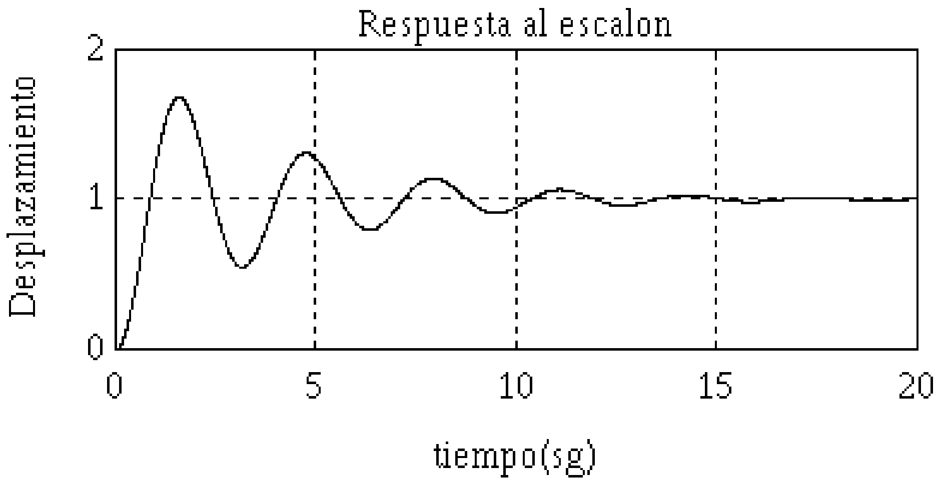
$$w_n = 2\,; \quad \delta = 0.125\,; \quad C = 1$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{4}{s^2 + 0.5s + 4}$$

$$\text{Escalón unitario: } F(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{4}{(s^2 + 0.5s + 4)s}$$

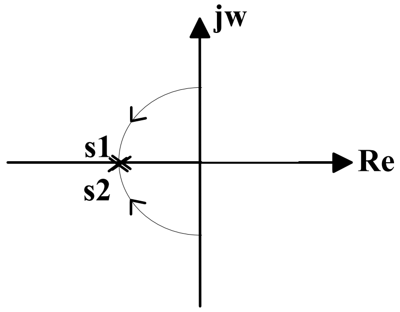
$$x(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 0.125^2}}\,e^{-0.25t}\,\mathrm{sen}(1.98t + 82.81)$$



4.3.3. Sistema con amortiguamiento crítico ($\delta = 1$)

Formado por un polo real doble.

$$s_{1,2} = -w_n$$



$$G(s) = \frac{w^2{}_n}{(s + w_n)(s + w_n)} = \frac{w^2{}_n}{(s + w_n)^2}$$

Respuesta a un escalón unidad:

$$Y(s) = \frac{w^2{}_n}{(s + w_n)^2 s}$$

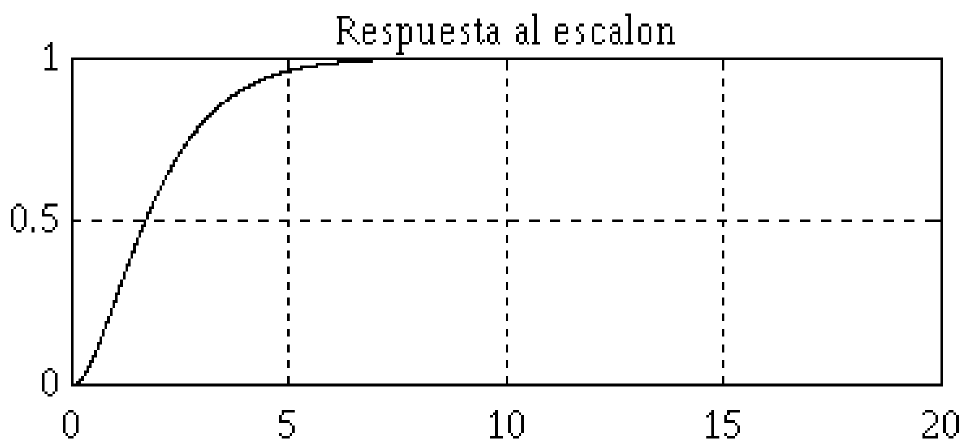
$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + w_n)^2} + \frac{C}{(s + w_n)}$$

$$A = 1; \quad B = -w_n; \quad C = -1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{w_n}{(s + w_n)^2} - 1\frac{1}{(s + w_n)}$$

$$y(t) = 1 - w_n t\, e^{-w_n t} - e^{-w_n t}$$

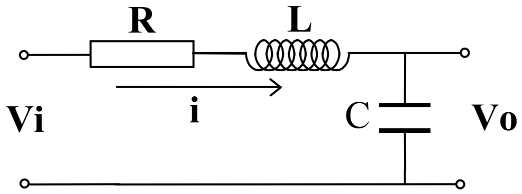
$$y(t) = 1 - (1 + w_n t)e^{-w_n t}$$



EJEMPLO 4.6.

Calcular la respuesta del sistema de la figura ante un escalón unitario suponiendo:

$$L = 1Hr;\ C = 1F \quad y \quad R = 2\Omega$$



$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2}$$

$$w_n = 1/\sqrt{LC}\,; \quad \delta = R\sqrt{C}/\sqrt{4L}$$

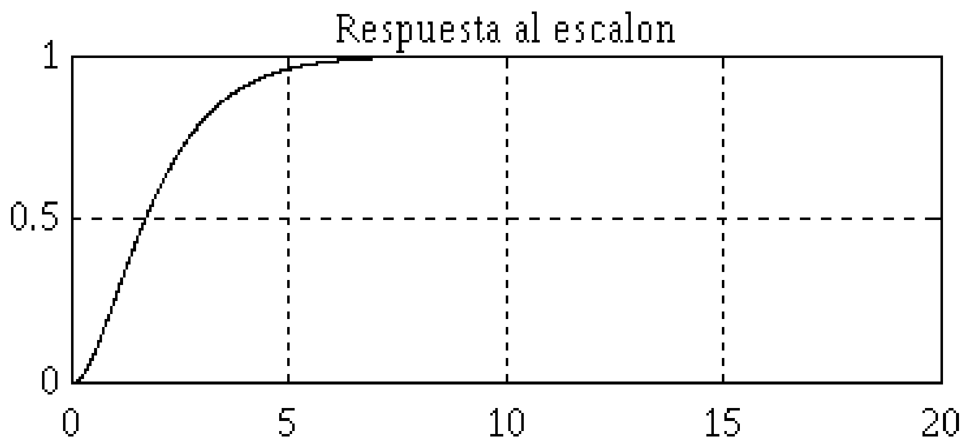
$$w_n = 1\,; \quad \delta = 1$$

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Escalón unitario: $V_i(s) = \frac{1}{s}$

$$V_0(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s}$$

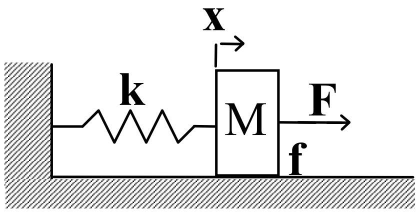
$$v_0(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$$



EJEMPLO 4.7.

Calcular la respuesta del sistema de la figura ante un escalón unitario suponiendo:

$$M = 0.25Kg;\ k = 1N/m \quad y \quad f = 1N/(m/s)$$



$$\frac{X(s)}{F(s)} = C\frac{w^2{}_n}{s^2 + 2\delta w_n s + w^2{}_n}$$

$$w_n = \sqrt{k/M}\,; \quad \delta = f\big/(2\sqrt{Mk})\,; \quad C = 1/k$$

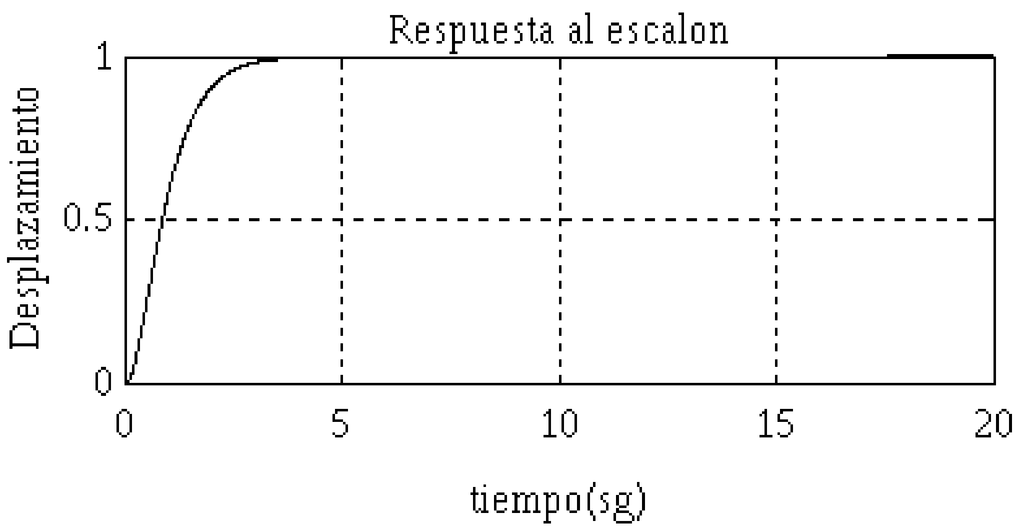
$$w_n = 2\,; \quad \delta = 1\,; \quad C = 1$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{4}{(s+4)^2}$$

$$\text{Entrada escalón:} \quad F(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{4}{(s+4)^2 s}$$

$$x(t) = 1 - (1 + 2t)e^{-2t}$$

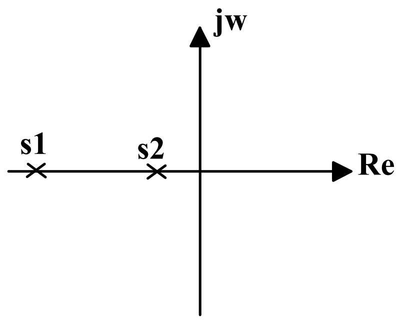


4.3.4. Sistema sobreamortiguado ($\delta > 1$)

Formado por dos polo reales.

$$s_{1,2} = -\delta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\delta^2}$$

$$s_{1,2} = -\delta w_n \pm w_n \sqrt{\delta^2 - 1}$$

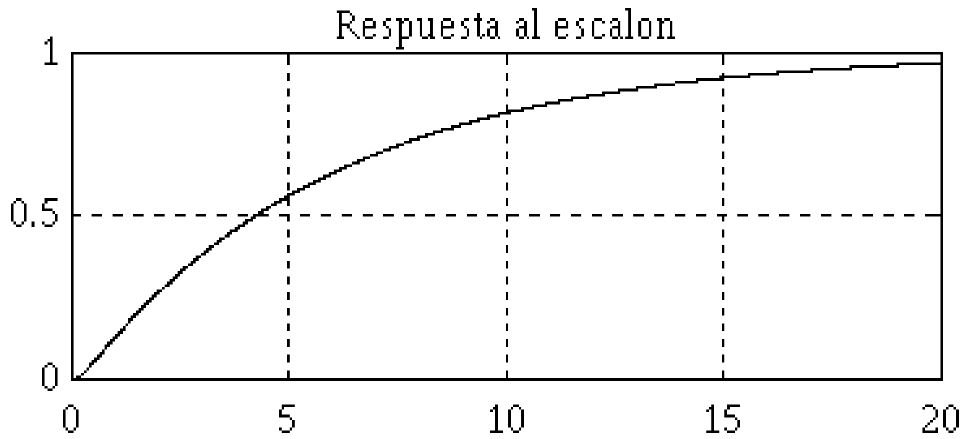


$$G(s) = \frac{w^2{}_n}{(s+s_1)(s+s_2)}$$

Respuesta a un escalón unidad:

$$Y(s) = \frac{w^2{}_n}{(s+s_1)(s+s_2)s}$$

$$y(t) = 1 + \frac{w_n}{2\sqrt{\delta^2-1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)$$



Si δ>>1 $|s_1| >> |s_2|$

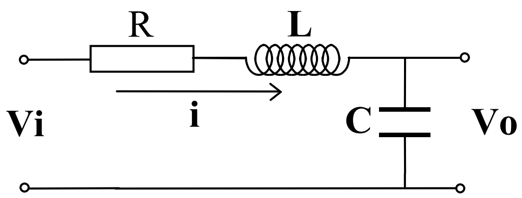
$$G(s) = \frac{s_2}{(s+s_2)}; \quad Y(s) = \frac{s_2}{s(s+s_2)}$$

$$y(t) = 1 - e^{-s_2 t}$$

EJEMPLO 4.8.

Calcular la respuesta del sistema ante un escalón unitario suponiendo:

$$L = 1Hr;\ C = 1F \quad y \quad R = 4\Omega$$



$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{w^2{}_n}{s^2 + 2\delta w_n s + w^2{}_n}$$

$$w_n = 1/\sqrt{LC}\,; \quad \delta = R\sqrt{C}/\sqrt{4L}$$

$$w_n = 1\,; \quad \delta = 2$$

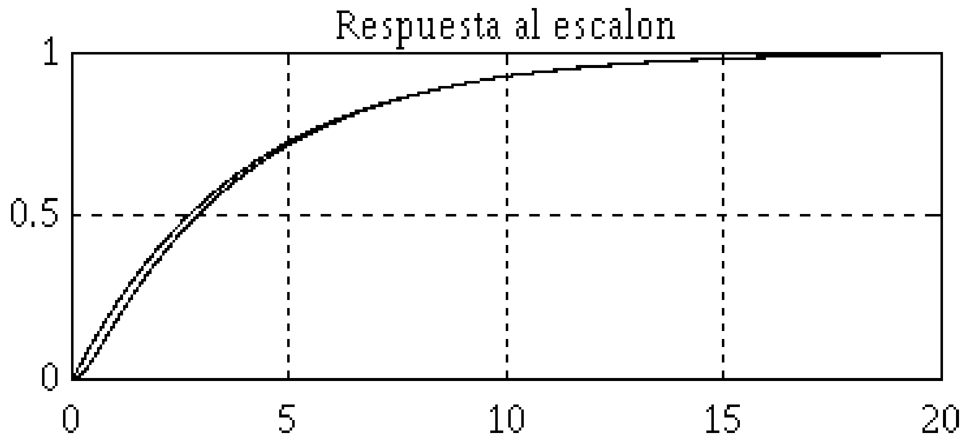
$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{(s+3.73)(s+0.26)}$$

Entrada escalón unitario: $V_i(s) = \dfrac{1}{s}$

$$V_0(s) = \frac{1}{(s+3.73)(s+0.26)s}$$

$$v_0(t) = 1 - 0.0773e^{-3.73t} - 1.07e^{-0.26t}$$

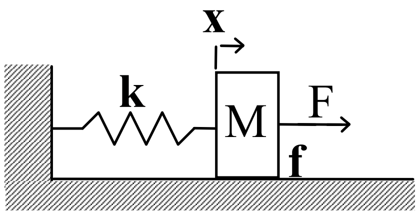
$$v_0(t) = 1 - e^{-0.26t}$$



EJEMPLO 4.9.

Calcular la respuesta del sistema mostrado en la figura suponiendo:

$$M = 0.25Kg;\ k = 1N/m \quad y \quad f = 4N/(m/s)$$



$$\frac{X(s)}{F(s)} = C\frac{w^2{}_n}{s^2 + 2\delta w_n s + w^2{}_n}$$

$$w_n = \sqrt{k/M}\,; \quad \delta = f\big/(2\sqrt{Mk})\,; \quad C = 1/k$$

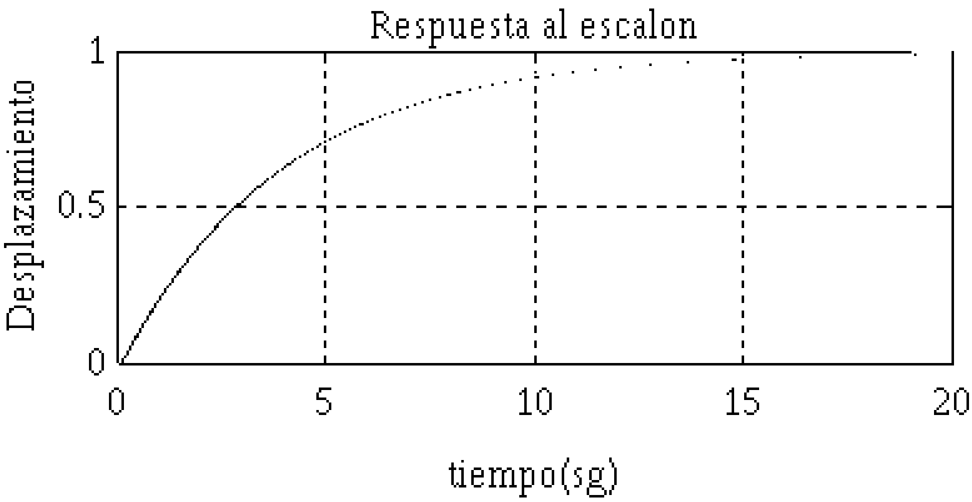
$$w_n = 2\,; \quad \delta = 4\,; \quad C = 1$$

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{4}{s^2 + 16s + 4} = \frac{4}{(s + 15.74)(s + 0.25)}$$

$$V_0(s) = \frac{4}{(s + 15.74)(s + 0.25)s}$$

$$v_0(t) = 1 - 0.0163e^{-15.74t} - 1.01e^{-0.254t}$$

$$v_0(t) = 1 - e^{-0.254t}$$



4.3.5. Especificaciones de la respuesta transitoria

Las características de la respuesta de un sistema de segundo orden ante una entrada escalón unitario son:

- Tiempo de retardo t_d:
  Tiempo necesario para alcanzar el 50% del valor final de la respuesta.

- Tiempo de subida t_r :
  Tiempo necesario para que la respuesta pase del 0 al 100%, del 10 al 90%, o del 5 al 95% del valor final. Para sistemas sobreamortiguados suele usarse del 10 al 90%. Para sistemas subamortiguados del 0 al 100%.

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}}$$

- Tiempo de pico t_p:
  Tiempo necesario para que la respuesta alcance el valor máximo.

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$$

- Tiempo de establecimiento t_s :
  Tiempo necesario para que la respuesta se estabilice dentro de un margen del 2 al 5% del valor final.

$$\boxed{t_s = \frac{\pi}{\delta \cdot \omega_n}}$$

- Máximo sobreimpulso M_p:
  Valor máximo de la respuesta en tanto por ciento del valor final.

$$M_p(\%) = \frac{y(t_p) - y_\infty}{y_\infty}$$

$$\boxed{M_p(\%) = 100 \cdot e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}}$$