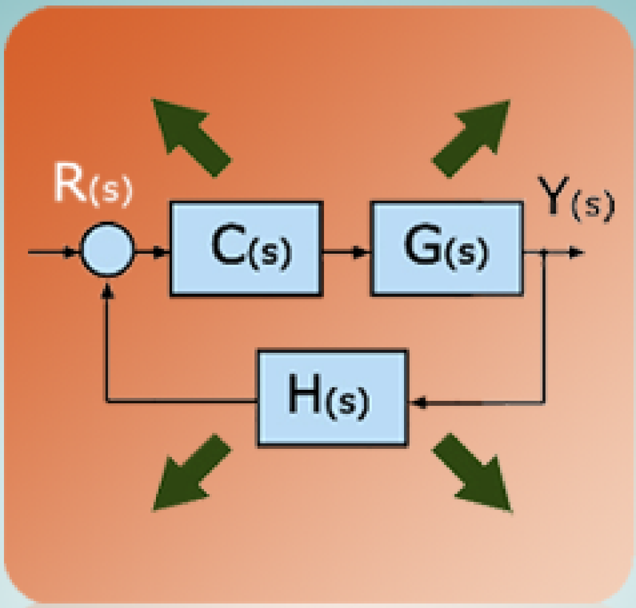
Automática

Capítulo 6. Lugar de las Raíces



José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

6

Lugar de las Raíces

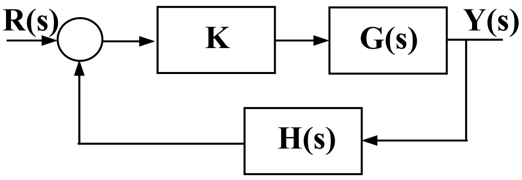
6.1. INTRODUCCIÓN

En capítulos anteriores se ha comprobado como el comportamiento del sistema, tanto en cuanto a estabilidad como en régimen transitorio y estático, dependen de la posición que ocupan las raíces de la ecuación característica (polos del sistema). De esta forma, las técnicas de control de sistemas pretenden modificar la posición de estas raíces a otras posiciones para las cuales la respuesta del sistema sea la deseada. Esto se puede hacer, por ejemplo y de la forma más simple, mediante la variación de algunos de los parámetros de la función de trasferencia de lazo abierto.

Así, el lugar de las raíces es una técnica que permite conocer la posición que ocupan las raíces de la ecuación característica, sobre el plano complejo s, a medida que se varía alguno de los parámetros de la función de transferencia de lazo abierto. Normalmente, el parámetro a variar es la ganancia estacionaria del sistema (lo que se conoce como "Lugar de las raíces") aunque también es posible observar la posición de estas raíces cuando varía un polo o cero de la función de transferencia de lazo abierto (lo que se denomina como "Contorno de las raíces").

6.2. CONDICIONES MÓDULO-ARGUMENTO

Suponiendo un sistema de control en lazo cerrado, tal como el de la figura siguiente:



La ecuación característica se puede expresar como:

$$1 + K \cdot G(s) \cdot H(s) = 0$$

Con lo cual:

$$K \cdot G(s) \cdot H(s) = -1$$

Si se separa en módulo y argumento pueden establecerse dos condiciones:

$$\boxed{\begin{array}{c} |G(s)H(s)| = 1 \\ \angle G(s)H(s) = \pm 180^0 (2q+1) \end{array}}$$

Donde: q= 0, ±1, ±2, ±3,...

Estas son las condiciones de módulo y argumento de la ecuación característica de lazo cerrado. Sin embargo, es también interesante ver cómo quedan estas condiciones en función de los valores de un parámetro K que aparece multiplicando a G(s) (control proporcional).

Considerando que el parámetro K aparece como factor multiplicador:

$$1 + K\frac{(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} = 0$$

Si esta expresión nuevamente se separa en módulo y argumento se obtiene:

Aplicando la condición del argumento:

$$\angle G(s)H(s) = \angle K + \sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j) = 180(2q+1)$$

Dependiendo de que el valor de K sea positivo o negativo se obtienen dos expresiones:

si k>0 la fase de K es 0º luego la expresión queda:

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j) = 180(2q+1)$$

si k<0 la fase de K es 180º luego la expresión queda:

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j) = 2q \cdot 180$$

La condición de módulo no va a verse afectada por el valor de K si se considera incluido en la G(s).

Por tanto, las condiciones de módulo y argumento quedarán:

$$\boxed{\begin{array}{l} |G(s)H(s)| = 1 \\ \angle\big(G(s)H(s)\big) = 180(2q+1) \quad \text{si } K\rangle 0 \\ \angle\big(G(s)H(s)\big) = 180(2q) \qquad \text{si } K\langle 0 \end{array}}$$

Donde: q= 0, ±1, ±2, ±3,...

De esta forma se tiene que los polos de la función de transferencia de lazo cerrado deben cumplir estas dos condiciones. Por tanto si se va variando el valor del parámetro K, los puntos que cumplen las condiciones de módulo y argumento serán los polos de lazo cerrado del sistema.

El lugar de las raíces representa la posición de los polos de lazo cerrado del sistema para cada valor del parámetro K. Es decir, es el lugar geométrico de las raíces del denominador de la función de transferencia de lazo cerrado.

De esta forma se puede ver gráficamente cual sería la posición de dichos polos de lazo cerrado al variar el valor de la ganancia K o la posición de los polos y ceros de lazo abierto. Conociendo los puntos donde se sitúan los polos de lazo cerrado puede conocerse la forma de la respuesta del sistema (especificaciones temporales).

6.3. PROCEDIMIENTO DE CONSTRUCCIÓN

1) Ecuación característica:

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

Es necesario que el parámetro de interés K aparezca como factor multiplicador, en la forma:

$$1 + K\frac{(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)} = 0$$

2) Puntos de comienzo y fin del lugar.

Considerando la condición modular de la forma:

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{K} \qquad \left|\frac{(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}\right| = \frac{1}{K}$$

Para el punto de comienzo del lugar de las raíces, K=0 se tiene que $|G(s)H(s)| \to \infty$, esto ocurre cuando el valor de s es igual a uno de los polos de la función de transferencia de lazo abierto, luego los puntos de comienzo son los polos de lazo abierto.

Para el punto de finalización del lugar de las raíces, K=∞ se tiene que $|G(s)H(s)| \to 0$, esto ocurre cuando el valor de s es igual a uno de los ceros de la función de transferencia de lazo abierto, luego los puntos de finalización son los ceros de lazo abierto.

Por tanto:

Comienza en los polos de la FTLA, F(s).
Finaliza en los ceros de la FTLA, F(s).

3) Número de ramas del lugar de las raíces:

Como se acaba de analizar, el lugar de las raíces comienza en cada uno de los polos de lazo abierto, luego como cada rama representa el lugar geométrico de uno de los polos de lazo cerrado, entonces el número de ramas será igual al número de polos de la FTLA.

4) Lugar de las raíces en el eje real.

Si se aplica el criterio del argumento a un punto sobre el eje real se tiene:

- La suma de los ángulos que formará con cada par de polos o ceros complejos conjugados de lazo abierto será siempre de 360º luego sobre el criterio del argumento tienen efecto nulo.
- Los polos y ceros de lazo abierto situados a la izquierda del punto considerado tiene ángulo cero.
- Los polos y ceros situados a la derecha contribuyen tendrán un ángulo de 180º cada uno.

Por tanto para saber si existe lugar sobre el eje real sólo influyen los polos y ceros situados a la derecha de punto del eje real analizado. Si el número de polos y ceros de lazo abierto es impar, su suma será un número impar de veces 180º y pertenecerá al lugar directo. Si el número de polos y ceros de lazo abierto es par su suma será un número par de veces 180º y por tanto pertenecerá al lugar inverso.

- Para el lugar directo, K>0, existirá lugar en un punto si éste tiene situados a su derecha un número impar de ceros y polos.

- Para el lugar inverso, K<0: existirá lugar en un punto si este tiene situados a su derecha un número par de ceros y polos.

5) Simetría del lugar de las raíces.

Si existen polos complejos conjugados éstos siempre son simétricos con respecto al eje real, por tanto todo el lugar de las raíces será simétrico respecto del eje real.

6) Asíntotas del lugar de las raíces.

Cuando el número de polos de lazo abierto es mayor que el número de ceros de lazo abierto, las ramas que no terminan en ningún cero, tienden asintóticamente a infinito.

Para calcular el ángulo de la asíntota se considera un punto de ella muy lejano de los polos y ceros de lazo cerrado. De esa manera los ángulos que tienen los polos y ceros de lazo abierto respecto a ese punto se pueden considerar todos iguales. Aplicando el criterio del argumento, donde a la suma de los ángulos de los polos se resta la suma de los ángulos de los ceros, si todos los ángulos se consideran iguales quedarán solamente los ángulos de la diferencia entre el número de polos y ceros:

$$\angle\big(G(s)H(s)\big) = 180(2q+1)$$

$$(n-m)\cdot\theta_a = 180(2q+1)$$

Y despejando el valor del ángulo:

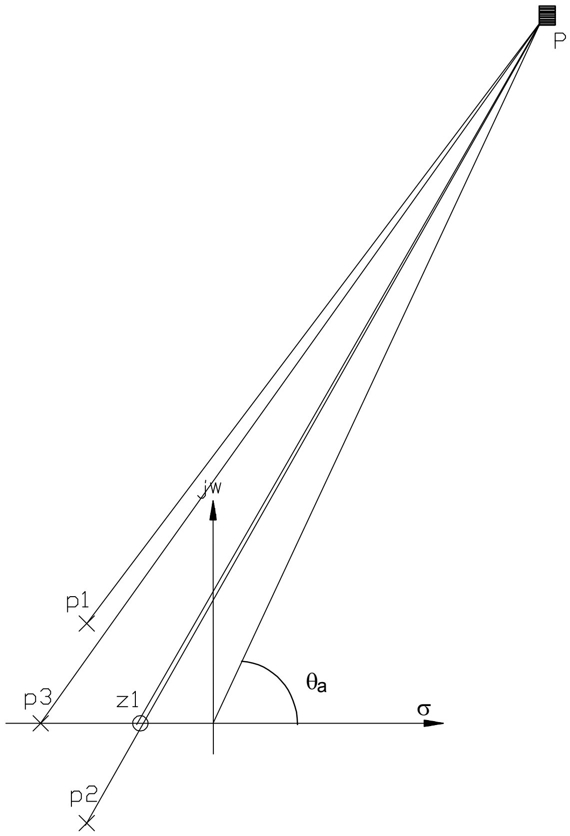
$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{n-m}$$

Por tanto los ángulos vendrán dados por la expresión:

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{n-m} \quad \text{para } k>0$$

$$\theta_a = \frac{180(2q)}{n-m} \quad \text{para } k<0$$

donde: q= 0, ±1, ±2, ±3,...



7) <u>Intersección de asíntotas con eje real (centroide)</u>

Todas las asíntotas cortarán al eje real en el centroide que es una especie de centro de gravedad de los polos y ceros.

Para el lugar directo e inverso:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de } F(s) - \sum \text{ceros de } F(s)}{n-m}$$

8) <u>Ángulos de salida de los polos y llegada a los ceros</u>.

Se puede calcular aplicando el criterio del argumento a un punto muy próximo al polo o cero del que se quiere calcular el ángulo. Si están muy próximos, la diferencia entre el ángulo obtenido para el punto y el ángulo del polo o cero a calcular será prácticamente nula.

Dos ecuaciones.

$$\sum \angle \text{ceros} - \sum \angle \text{polos} = 180(2q+1) \quad \text{Para } K>0$$

$$\sum \angle \text{ceros} - \sum \angle \text{polos} = 180(2q) \qquad \text{Para } K<0$$

9) Puntos de dispersión y confluencia de ramas en el eje real.

Un punto de dispersión existe cuando aparece lugar de las raíces en el eje real entre dos polos de lazo abierto, en este caso de cada polo nace una rama que se separan del eje real en el punto de dispersión. Y será de confluencia cuando el lugar en el eje real esté entre dos ceros de lazo abierto, en este caso al punto de confluencia llegan dos ramas que se dirigirán por el eje real cada una a uno de los ceros. Por tanto los puntos de desprendimiento y confluencia corresponden a raíces múltiples de la ecuación característica.

Si el lugar en el eje real está limitado por un polo y un cero de lazo abierto, no existirá punto de dispersión ni confluencia ya que la rama comienza en el polo y termina en el cero.

Como el lugar de las raíces es simétrico, los puntos de dispersión y confluencia deben aparecer en el eje real.

Existen dos métodos:

a) Por derivada e igualación a cero:

Solución directa para ecuaciones de hasta tercer orden.

Pasos:

- Despejar K= - 1/G(s).
- Derivar K respecto a s.
- Igualar a cero y calcular las raíces.

b) Por iteración:

Para el caso de F(s) sea mayor de tercer orden la resolución por el primer método conlleva calcular las raíces de un polinomio mayor de tercer grado. Una alternativa en esos casos es aplicar el método de iteración.

La formula a utilizar es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a - p_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a - z_j}$$

Pasos:

- El parámetro a toma el valor medio de la rama en el eje real.
- Este valor de a se pone en todas las fracciones menos en las correspondientes a los polos o ceros que limitan el lugar en el eje real a estudiar.
- Se calcula a y se vuelve a meter en la expresión anterior, recalculando hasta obtener una fidelidad suficiente.

Para el caso de polos complejos conjugados de la forma $P_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$, se puede poner de la forma siguiente:

$$\frac{2(a+\alpha)}{(a+\alpha)^2 + \beta^2}$$

10) Intersección del lugar de las raíces con el eje imaginario.

Los puntos de corte con el eje imaginario corresponden con el valor de ganancia K que lleva al sistema de lazo cerrado al límite de estabilidad. Esto se puede obtener mediante el criterio de estabilidad de Routh:

Plantear la tabla de Routh considerando el parámetro K y calcular su valor para que aparezca una fila de ceros.

Entrando en la ecuación auxiliar que se obtiene de la fila anterior de la tabla de Routh se obtienen los puntos de corte.

11) Cálculo de K en cualquier punto.

Para ello basta con aplicar el criterio del módulo al punto del lugar de las raíces s_k donde se desea conocer el valor de K.

$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^{n} |(s_k + p_j)|}{\prod_{i=1}^{m} |(s_k + z_i)|}$$

12) Suma de raíces.

La suma de las raíces es constante e igual al coeficiente del término s^{n-1}, cambiado de signo, de la ecuación característica, cuando el coeficiente de s^n es la unidad.

6.4. CANCELACIÓN DE LOS POLOS DE G(S) CON LOS CEROS DE H(S)

Si G(s) contiene polos idénticos a ceros de H(s), al obtener la función de transferencia de lazo abierto se cancelarán y no se tendrán en cuenta a la hora de dibujar el lugar de las raíces. Sin embargo ese polo que se ha cancelado es un polo de la función de transferencia de lazo cerrado del sistema. Por lo tanto para obtener el total de los polos de lazo cerrado se ha de añadir dicho polo a los obtenidos mediante el lugar de las raíces.

Ejemplo:

$$G(s) = \frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)}; \quad H(s) = \frac{(s+a)}{(s+d)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{(s+c)}{(s+b)(s+d)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{\dfrac{(s+c)}{(s+a)(s+b)}}{1 + \dfrac{(s+c)}{(s+b)(s+d)}} = \frac{(s+c)(s+d)}{(s+a)\left[(s+b)(s+d) + (s+c)\right]}$$

6.5. CONTORNO DE LAS RAÍCES

Para el cálculo del lugar de las raíces se consideraba la variación de un factor de ganancia K incluido en la cadena directa del sistema. En estas condiciones el lugar de las raíces nos indica la posición de los polos de lazo cerrado del sistema cuando se varía el valor de dicho parámetro K de 0 a ∞.

Pero puede ser interesante ver también la posición de polos de lazo cerrado del sistema cuando es otro parámetro del sistema el que varía. En este caso a la representación se le denomina Contorno de las raíces.

Para su representación se ha de obtener como denominador de la función de transferencia de lazo cerrado, es decir, como su ecuación característica, una expresión similar a la del lugar de las raíces pero donde el parámetro a modificar quede como factor común multiplicando a los términos de la cadena abierta de la ecuación característica resultante.

Por ejemplo, considerar cómo afecta la variación de la posición de un polo de la realimentación a los polos de lazo cerrado del sistema:

Ejemplo: Sea $G(s)=\dfrac{1}{s+a}$ y $H(s)=\dfrac{1}{s+b}$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema será:

$$M(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{1}{s+a}}{1+\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}}=\frac{s+b}{(s+a)(s+b)+1}=\frac{s+b}{s^2+as+bs+ab+1}$$

Para ver el efecto de variaciones de posición en el polo en s=-b de la realimentación.

$$M(s)=\frac{s+b}{s^2+as+1+b(s+a)}=\frac{\dfrac{s+b}{s^2+as+1}}{1+b\dfrac{s+a}{s^2+as+1}}\quad \text{Ec. Característica:}\ 1+b\frac{s+a}{s^2+as+1}=0$$

Dibujando el lugar de las raíces con esta ecuación característica se puede analizar la posición de los polos de lazo cerrado de M(s) para variaciones del parámetro b.

Si ahora se desea ver el efecto de variaciones de posición en el polo en s=-a de G(s).

$$M(s)=\frac{s+b}{s^2+bs+1+a(s+b)}=\frac{\dfrac{s+b}{s^2+bs+1}}{1+a\dfrac{s+b}{s^2+bs+1}}\quad \text{Ec. Característica:}\ 1+a\frac{s+b}{s^2+bs+1}=0$$

Dibujando el lugar de las raíces con esta ecuación característica se puede analizar la posición de los polos de lazo cerrado de M(s) para variaciones del parámetro a.

6.6. REGLAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

1) Ecuación característica.	$1+K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}=0$
2) Número de ramas.	Igual al número de polos de la FTLA, F(s)
3) Puntos de inicio y fin.	Comienza en los polos de F(s). Finaliza en los ceros de F(s).
4) Lugar en eje real	Directo: si a la dcha. tiene un número impar de polos y ceros. Inverso: si a la dcha. tiene un número par de polos y ceros.
5) Simetría.	El lugar directo y el inverso son simétricos respecto al eje real.
6) Asíntotas.	Directo: $\theta_a=\frac{180(2q+1)}{p - z}$ Inverso: $\theta_a=\frac{180(2q)}{p - z}$
7) Centróide:	$\sigma_0=\frac{\sum \text{polos de } F(s)-\sum \text{ceros de } F(s)}{p - z}$
8) Angulos de salida y llegada a los polos y ceros complejos conjugados.	Directo: $\sum \text{Angulos de ceros}-\sum \text{Angulos de polos}=180(2k+1)$ Inverso: $\sum \text{Angulos de ceros}-\sum \text{Angulos de polos}=180(2k)$
9) Llegada y salida del eje real.	Método 1: -Despejar K. -Derivar. - Igualar a cero y ver raíces. Método 2: $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a-p_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a-z_j}$; Complejos: $\frac{2(a+\alpha)}{(a+\alpha)^2+\beta^2}$
10) Intersección con eje Imaginario	- Routh. - Filas igual a cero. - Ver K. - Fila auxiliares ver punto.
11) Cálculo de K.	$\lvert K\rvert=\frac{\prod_{j=1}^{n}\lvert(s_k+p_j)\rvert}{\prod_{i=1}^{m}\lvert(s_k+z_i)\rvert}$ s_k es el punto del plano s donde se desea calcular K.
12) Suma de raíces.	La suma de las raíces es constante e igual al coeficiente del término s^{n-1}, cambiado de signo, de la ecuación característica, cuando el coeficiente de s^n es la unidad