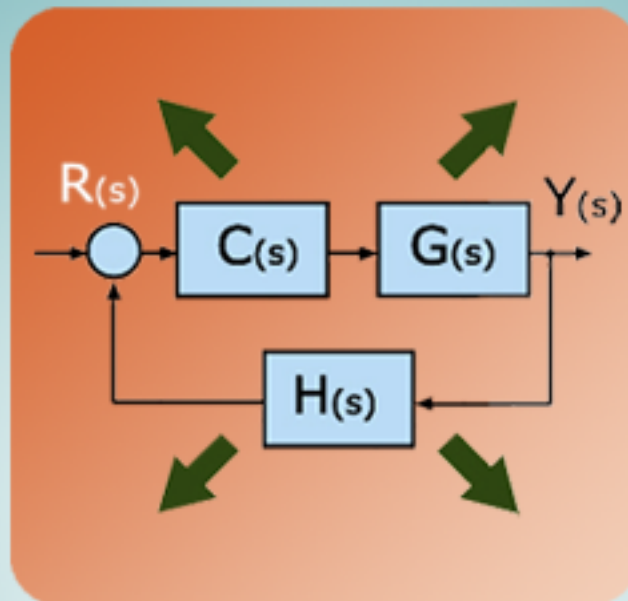


Automática

Capítulo 7.1. Análisis Frecuencial (Parte 1)



José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)



7

Análisis Frecuencial

7.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha analizado el comportamiento de los sistemas de control en el dominio temporal y en el plano complejo s , presentando ambas características muy interesantes para el posterior diseño de controladores. En este capítulo, se analiza una metodología de análisis y diseño de sistemas de control muy potente y que aporta gran información acerca de las características del sistema.

Esta metodología, se conoce como "Análisis frecuencial" o como "Análisis de la respuesta en frecuencia", y presenta la característica de que permite obtener información acerca de cómo afecta sobre la respuesta, no sólo la forma o tipo de señal de entrada, sino también la frecuencia de la misma. Dentro de esta metodología, existe un conjunto de técnicas, que serán tratadas en este capítulo y que permiten conocer la respuesta en frecuencia en lazo abierto y efectuar el diseño de controladores (Diagramas de Bode y Diagramas polares), calcular la respuesta en frecuencia en lazo cerrado (Diagrama de Nichols) así como, realizar análisis de estabilidad (Nyquist).

7.2. DIAGRAMA DE BODE

Representa la respuesta en régimen permanente de un sistema lineal invariante en el tiempo cuando la entrada es una señal senoidal donde se va variando el valor de la frecuencia hasta cubrir el rango de frecuencias que se desea analizar.

La representación de la respuesta en frecuencia del sistema en lazo abierto se hace mediante dos gráficas.

- Gráfica para magnitud (escala logarítmica).
- Gráfica para fase (escala lineal).

La gráfica total se obtiene como suma de las aportaciones de todos los términos.

Comprobación:

$$G(j\omega) = \frac{\vec{s}_1 \vec{s}_2}{\vec{s}_3} = \frac{r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2}}{r_3 e^{j\theta_3}} = \frac{r_1 r_2}{r_3} e^{j(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)}$$

$$\angle G(j\omega) = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3$$

$$|G(j\omega)| = \frac{r_1 r_2}{r_3}$$

Tomando escala logarítmica para el módulo:

$$\text{Log}_{10}|G(j\omega)| = \text{Log}_{10}\left(\frac{r_1 r_2}{r_3}\right) = \text{Log}_{10}r_1 + \text{Log}_{10}r_2 - \text{Log}_{10}r_3$$

Ganancia de potencia mediante decibelios:

$$|G|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

Y la ganancia de tensión es:

$$|G|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1}$$

Medida normalmente utilizada en Bode.

Ejes del diagrama de Bode:

- Amplitud:.....Decibelios.
- Fase:.....Lineal.
- Frecuencia:.....Logarítmico.

¿Porqué utilizar escala logarítmica para la frecuencia?.

- Espectro de frecuencia más amplio.
 - Aportaciones de módulo de los polos y ceros pueden ser aproximadas por líneas rectas.
-

Ventajas de Bode:

- Las gráficas de los sistemas en serie se suman.
- Amplio espectro del comportamiento en frecuencia.
- Las gráficas se pueden obtener experimentalmente.
- Se pueden diseñar compensadores a partir de las gráficas de Bode.

Cambio de s por jw

Dado un sistema definido por su transformada de Laplace:

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Si se desea hacer un análisis en frecuencia aplicando la transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Puede verse que si $f(t)$ solo existe para $t \geq 0$, los límites son iguales y para pasar de una a otra sólo es necesario realizar el cambio $s = j\omega$.

Por tanto, la respuesta en estado estable de un sistema ante una entrada senoidal de frecuencia ω se obtiene directamente de la función de transferencia del sistema en transformada de Laplace sustituyendo s por $j\omega$.

7.3. MÉTODO DE OBTENCIÓN DE LAS APORTACIONES DE CADA TÉRMINO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO AL DIAGRAMA DE BODE

Existirán cuatro tipos de términos diferentes:

- Ganancia: K .
- Polos y Ceros en el origen: $(j\omega)^{\pm n}$.
- Polos y Ceros en el eje real: $(1 + j\omega T)^{\pm n}$.
- Polos y Ceros complejos conjugados: $(1 + 2\delta(j\omega / \omega_n) + (j\omega / \omega_n)^2)^{\pm n}$.

Cambiar s por $j\omega$.

Poner la función de transferencia de lazo abierto de la forma siguiente:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_j (1 + 2\delta_j(j\omega / \omega_{n_j}) + (j\omega / \omega_{n_j})^2)}{(j\omega)^n \prod_k (1 + j\omega T_k) \prod_m (1 + 2\delta_m(j\omega / \omega_{n_m}) + (j\omega / \omega_{n_m})^2)}$$

7.3.1. Ganancia: K.

MÓDULO:

$$M = 20 \log K = \text{cte}$$

FASE:

$$\text{Arg} = \arctg\left(\frac{0}{K}\right) = 0^0$$

Recta horizontal de valor constante para la magnitud y argumento nulo para la fase.

7.3.2. Polos y ceros en origen: $(jw)^{\pm n}$.

MÓDULO:

$$\text{Cero: } M = 20 \log |(jw)^n| = 20n \log(w). \quad (+20n \text{ dB/dc}).$$

$$\text{Polo: } M = 20 \log |(jw)^{-n}| = -20n \log(w). \quad (-20n \text{ dB/dc}).$$

FASE:

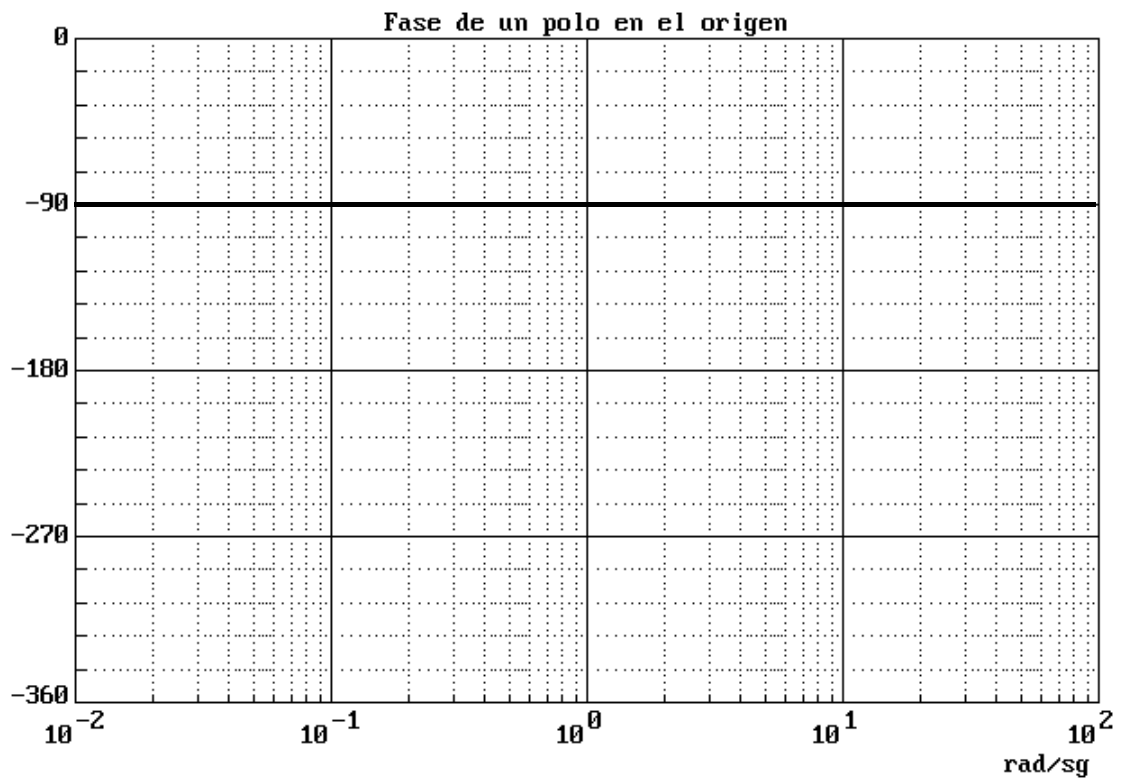
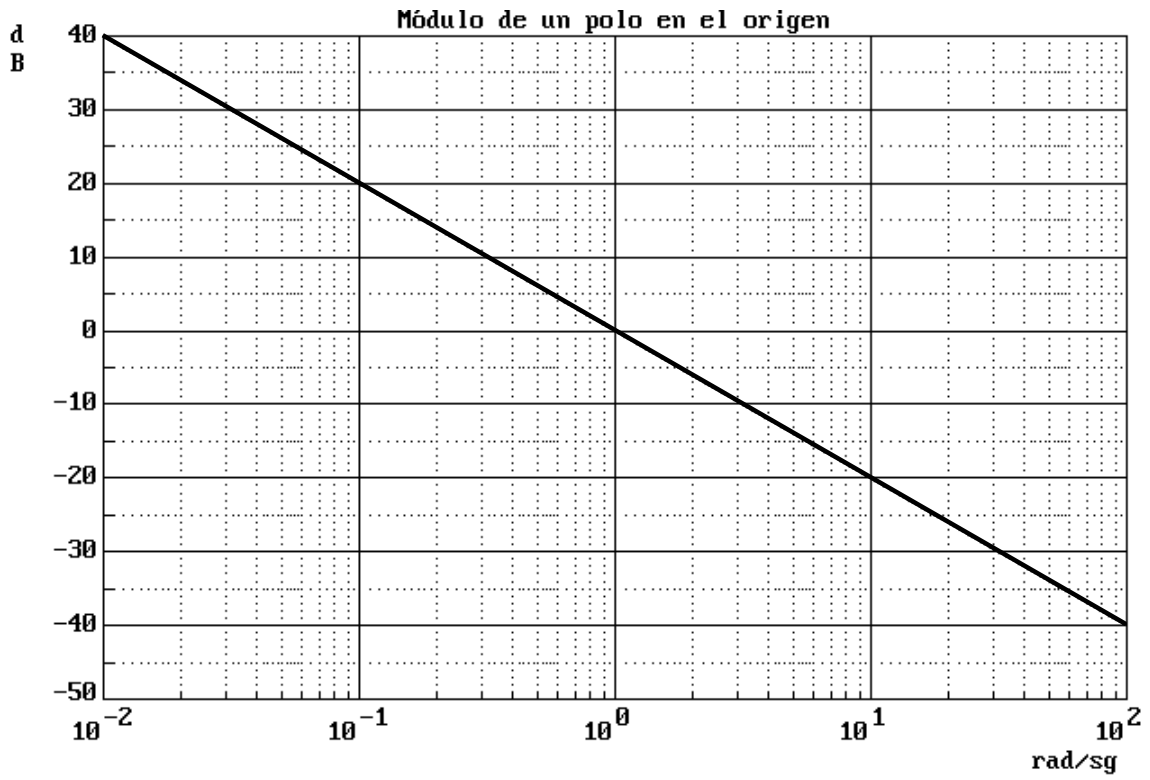
$$\text{Cero: } \text{Arg} = \arctg\left(\frac{w}{0}\right) = 90^0$$

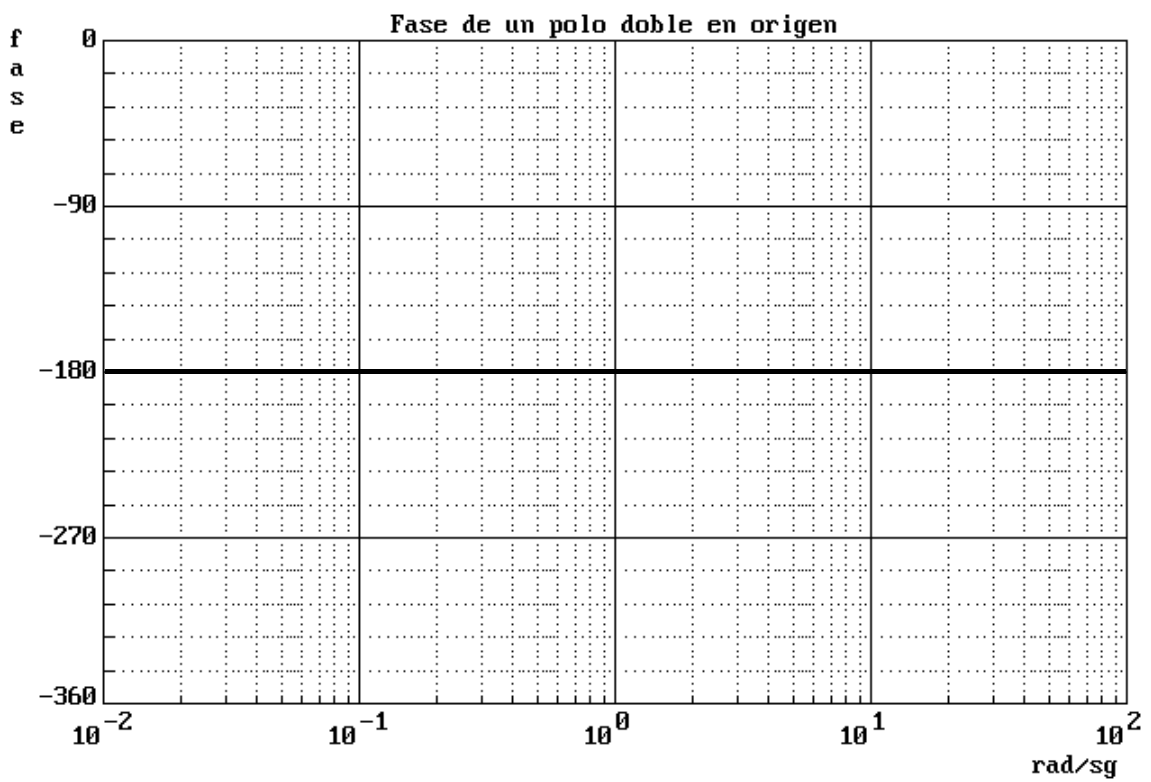
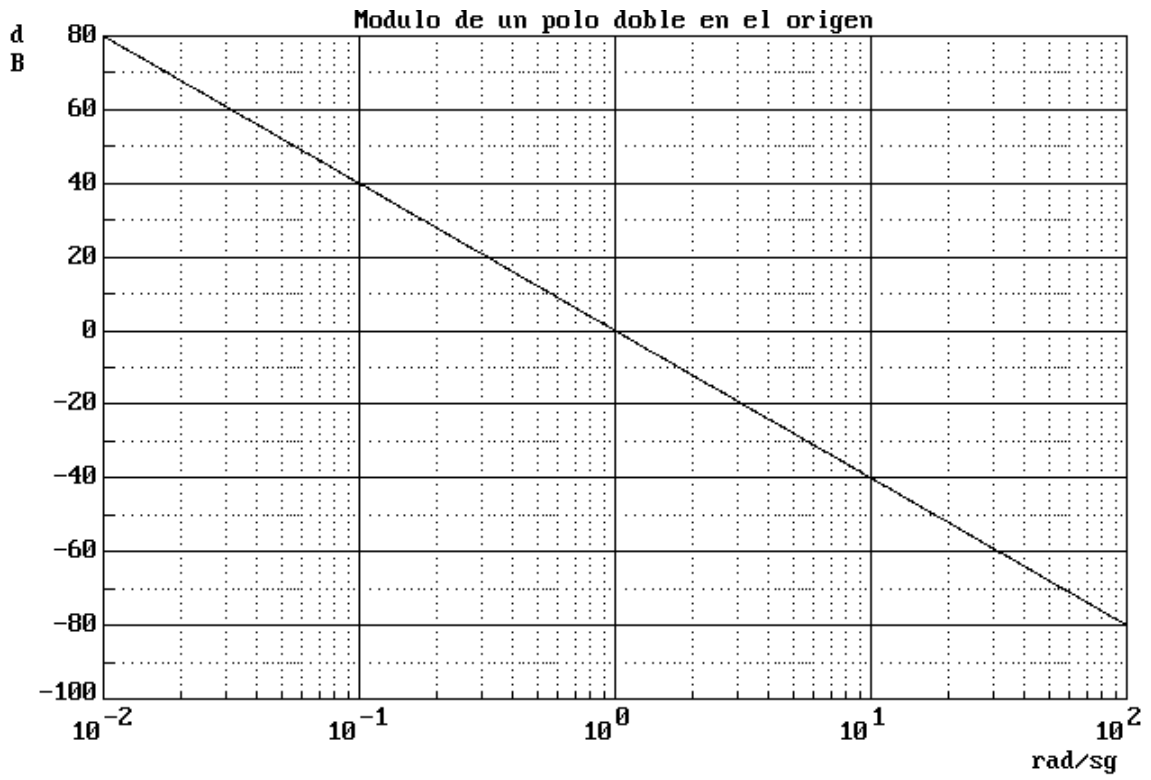
$$\text{Polo: } \text{Arg} = -\arctg\left(\frac{w}{0}\right) = -90^0$$

Frecuencia esquina : 1 rad/sg.

Cero: Una línea recta de pendiente +20n dB/dec en módulo y una recta horizontal de +90° en fase.

Polo: Una línea recta de pendiente -20n dB/dec en módulo y una recta horizontal de -90° en fase.





7.3.3. Polos y Ceros en eje real $(1 + j\omega T)^{\pm n}$ MÓDULO:Cero:

$$M = 20 \log |(1 + j\omega T)^n| = 20n \log(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = 10n \log(1 + \omega^2 T^2)$$

- $\omega T \ll 1$: $M \cong 0$. (0dB/dc)
- $\omega T \gg 1$: $M \cong 20n \log(\omega)$. (+20dB/dc).
- $\omega = \omega_{\text{esq}} = 1/T$:

$$M = 10n \log(1 + \omega^2 T^2) = 10n \log(2) = 3\text{dB}$$

Polo:

$$M = 20 \log |(1 + j\omega T)^{-n}| = -20n \log(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = -10n \log(1 + \omega^2 T^2)$$

- $\omega T \ll 1$: $M \cong 0$. Son (0dB/dc)
- $\omega T \gg 1$: $M \cong -20n \log(\omega)$. (-20dB/dc).
- $\omega = \omega_{\text{esq}} = 1/T$:

$$M = -10n \log(1 + \omega^2 T^2) = -10n \log(2) = -3\text{dB}$$

FASE:Cero:

$$\text{Arg} = n \arctg\left(\frac{\omega T}{1}\right)$$

- $\omega T \ll 1$: $\text{Arg} = 0$.
- $\omega T \gg 1$: $\text{Arg} = 90^\circ n$.
- $\omega = \omega_{\text{esq}} = 1/T$: $\text{Arg} = \arctg(1) = 45^\circ n$

Polo:

$$\text{Arg} = -n \arctg\left(\frac{\omega T}{1}\right)$$

- $\omega T \ll 1$: $\text{Arg} = 0$.
- $\omega T \gg 1$: $\text{Arg} = -90^\circ n$.
- $\omega = \omega_{\text{esq}} = 1/T$: $\text{Arg} = -\arctg(1) = -45^\circ n$.

Frecuencia esquina: $\omega_{\text{esq}} = 1/T$.

Los ceros en el eje real proporcionan:

a) En módulo:

Dos asíntotas:

Una de 0 dB/dc (por debajo de ω_e).

Otra de +20n dB/dc (por encima de ω_e).

Modificaciones (afectados por n):

+3dB para la frecuencia esquina.

+1dB una octava por debajo de ω_e ($\omega_e/2$).

+1dB una octava por encima de ω_e ($2\omega_e$).

+0,04 dB una década por debajo ($\omega_e/10$).

+0,04 dB una década por encima (ω_e*10).

b) En fase:

Línea que va desde los 0° para bajas frecuencias hasta los $90^\circ n$ para las altas, pasando por $45^\circ n$ en la frecuencia esquina.

Una década por encima y por debajo de la frecuencia esquina corrección de $+6n^\circ$ y $-6n^\circ$, respectivamente.

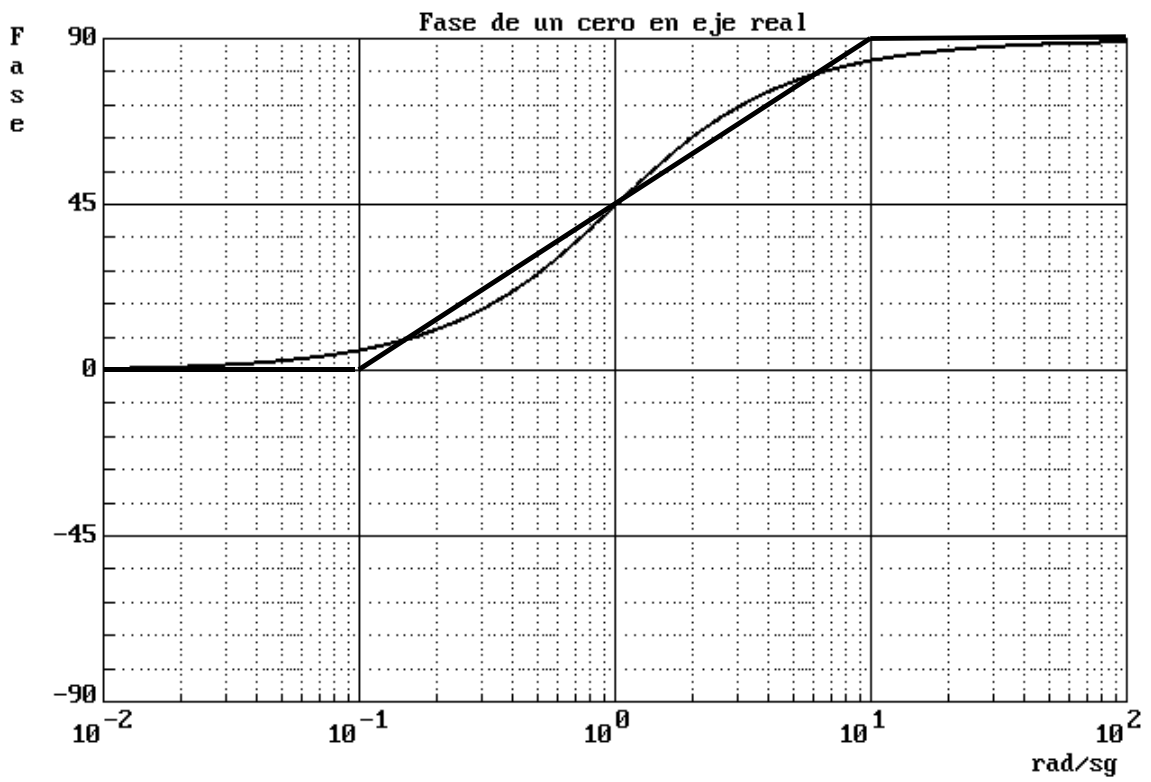
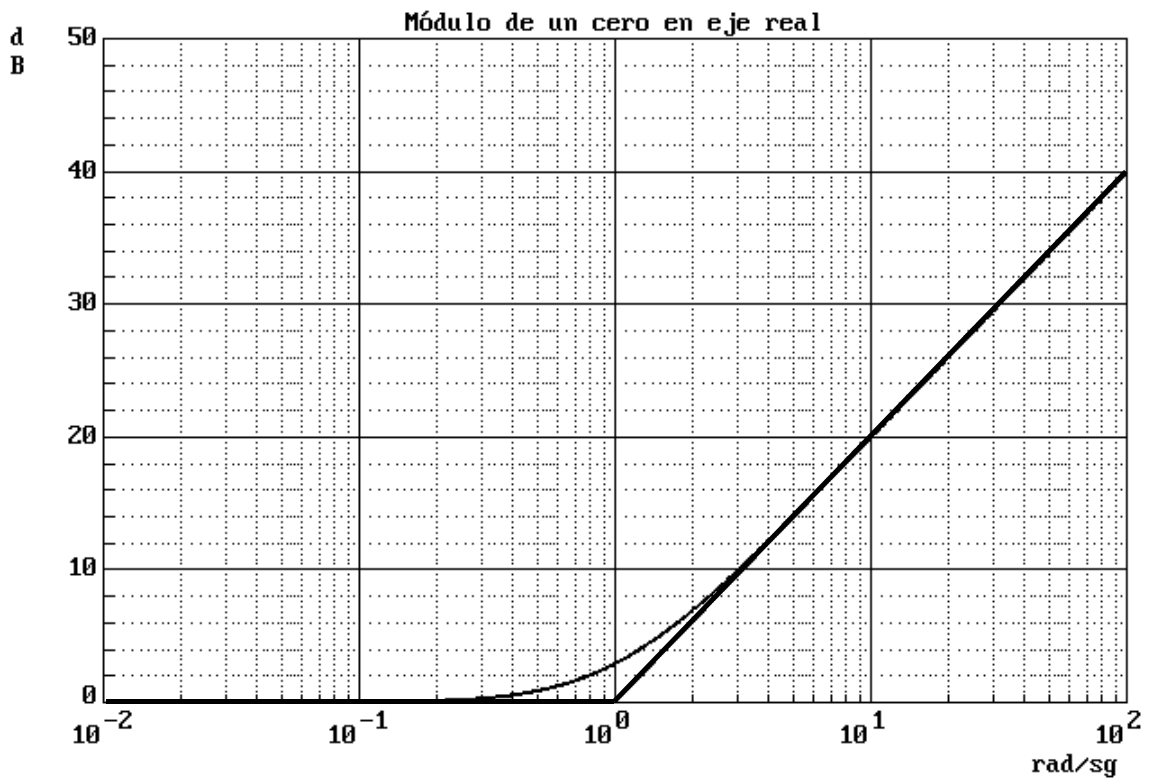
Trazado asintótico en fase:

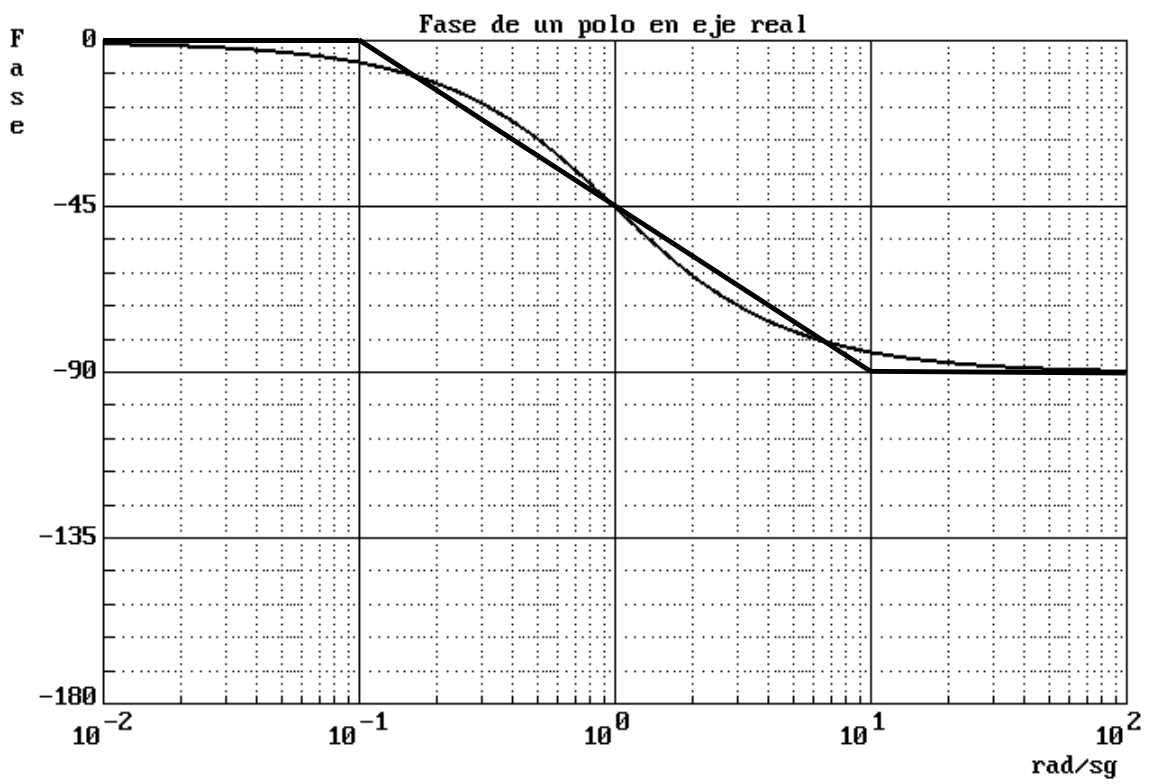
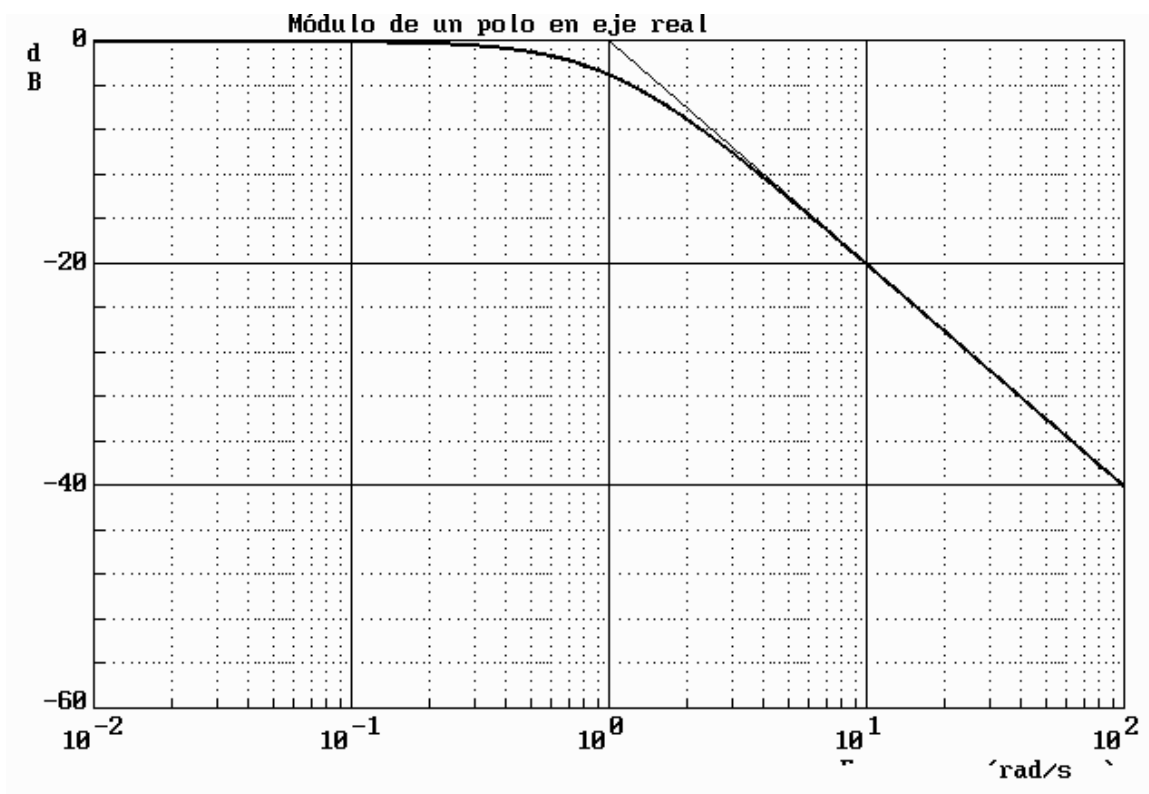
0° para frecuencias menores de que una década por debajo de la esquina.

90° para mayores de una década por encima de la esquina.

45° por década entre las anteriores.

El error máximo es de 6° para las frecuencias de una década por debajo y encima de la frecuencia esquina.





7.3.4. Polos y Ceros Complejos Conjugados.

$$\left[1 + 2\delta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\pm 1}$$

MÓDULO:

$$M = \pm 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\delta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} = \pm 10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\delta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]$$

- $\omega/\omega_n \ll 1$: $M = \pm 10 \log(1) = 0$.
- $\omega/\omega_n \gg 1$: $M = \pm 10 \log(\omega^4) = \pm 40 \log(\omega)$
- $\omega = \omega_n$: $M = \pm 20 \log(2\delta)$.

La forma del módulo depende del amortiguamiento del sistema.

FASE:

$$\text{Arg} = \pm \arctg \left[\frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$$

- $\omega/\omega_n \ll 1$: $\text{Arg} = \pm \arctg(0) = 0^\circ$
- $\omega/\omega_n \gg 1$: $\text{Arg} = \pm \arctg(-0) = \pm 180^\circ$.
- $\omega = \omega_n$: $\text{Arg} = \pm \arctg(\infty) = \pm 90^\circ$.

La forma del argumento va a depender del valor del argumento.

Frecuencia esquina = ω_n .

Aportación de un término de polos complejos conjugados:

- a) En módulo: Dos asíntotas.
 Una de 0dB/dc, (por debajo de ω_n)
 Otra de -40dB/dc, (por encima de ω_n)

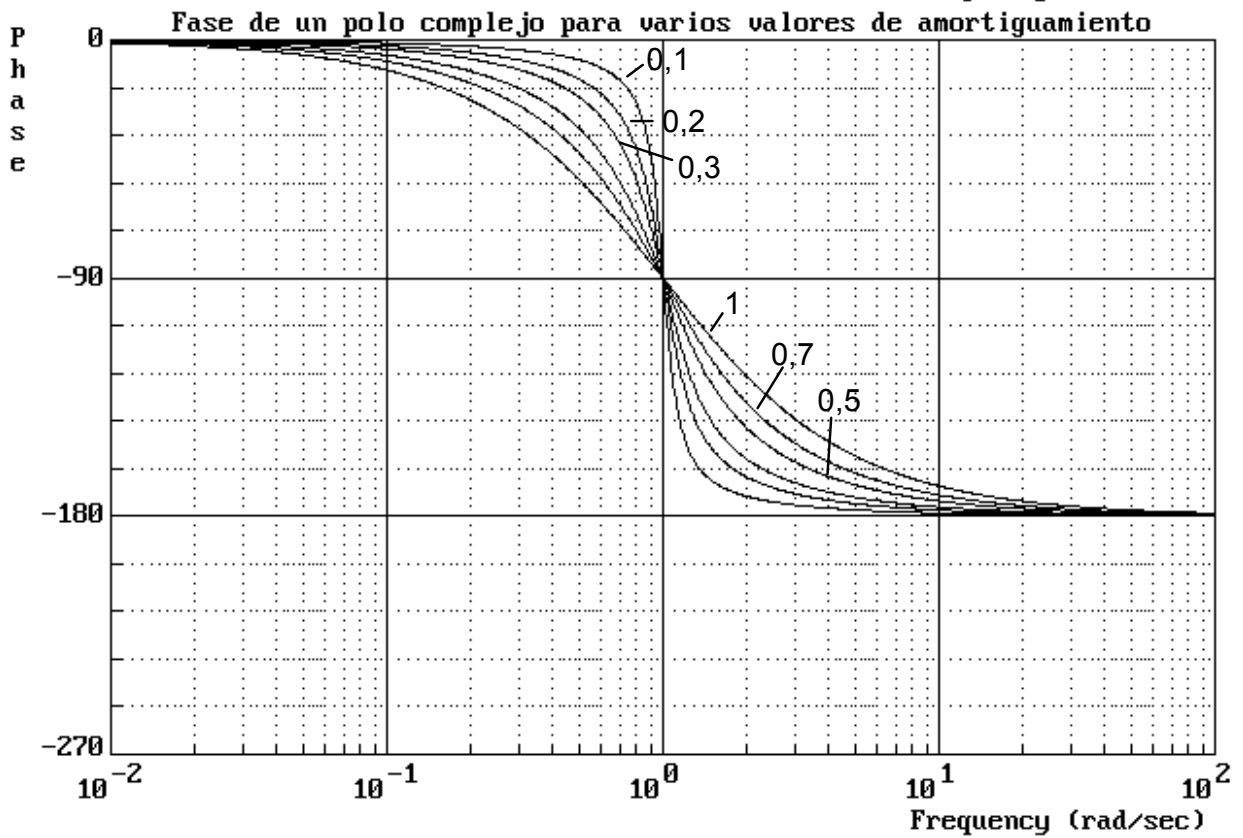
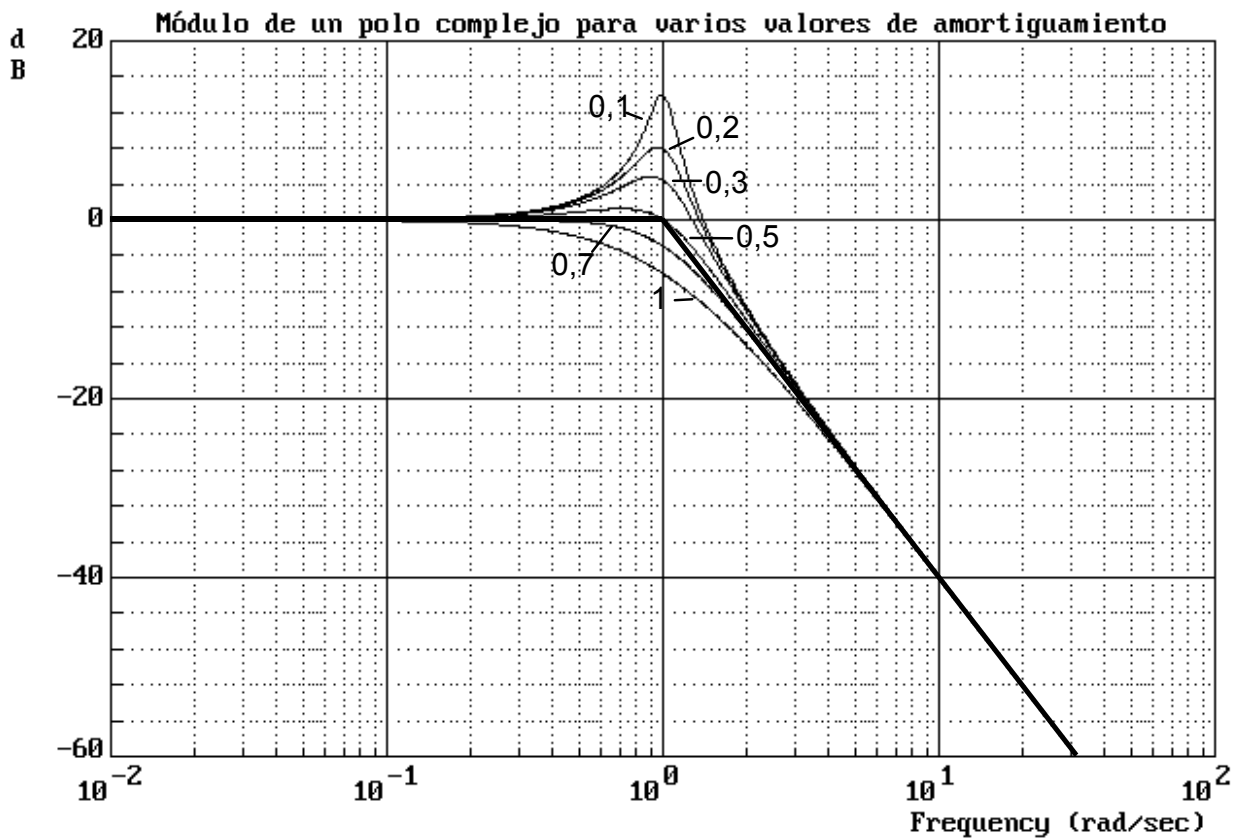
Forma en función del valor del amortiguamiento
 Correcciones: Gráficas correctoras de módulo.

- b) En fase: Dos asíntotas:
 Una de 0° (una década por debajo de ω_n)
 Otra de -180° (una década por encima).

Forma en función del valor del amortiguamiento

Correcciones:

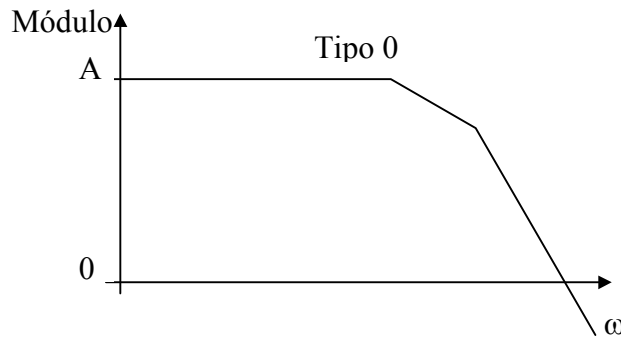
Gráficas correctoras de fase.



7.3.5. Cálculo de los coeficientes de error a partir de los diagramas de Bode

El tipo de un sistema depende del número de polos en el origen de la función de transferencia en lazo abierto. El error depende del tipo del sistema y de la ganancia en estado estacionario del sistema cuando la frecuencia tiende a cero. Esta ganancia coincide con la ganancia de Bode. Por tanto, para saber el tipo de un sistema sólo es necesario observar la pendiente de la curva del módulo para bajas frecuencias. Y para conocer el error calcular la ganancia de Bode.

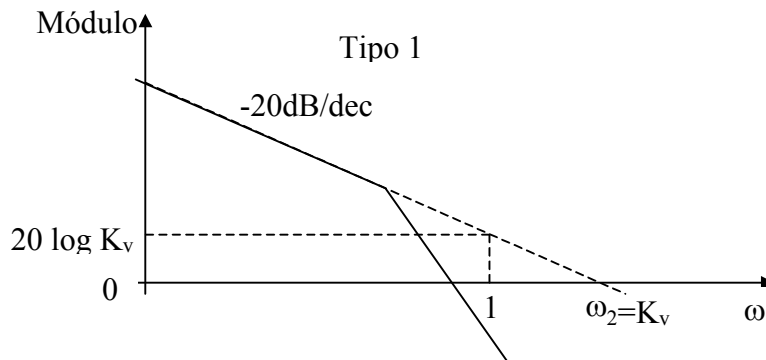
Sistema tipo 0:



$$A = 20 \log K_p \quad K_p = 10^{\frac{A}{20}} \quad e_p = \frac{1}{1 + K_p}$$

La ganancia es el coeficiente estático del error K_p .

Sistema tipo 1:



La intersección de la prolongación del primer tramo (pendiente -20 dB/dec),

correspondiente al polo en el origen, con el eje X corresponde con el coeficiente estático de error K_v .

$$20 \text{dB} \frac{\log \omega_2 - \log 1}{\log \omega_2 - \log 1} = 20 \log K_v$$

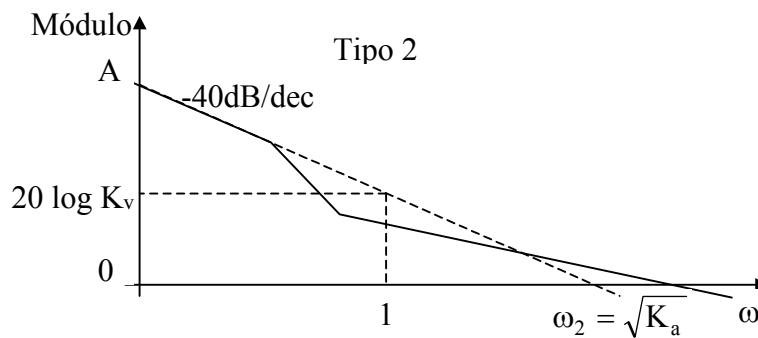
$$\log \omega_2 = \frac{20 \log K_v}{20} = \log K_v \quad \omega_2 = K_v$$

$$e_v = \frac{1}{K_v}$$

Luego existen dos posibles formas de calcular el error:

- 1) Ver para la frecuencia de 1 radian el valor del módulo de la recta que cae con -20 dB/dec. Obteniendo el valor de ganancia que corresponde a esos decibelios se obtiene K_v .
- 2) Prolongar esta recta hasta que corte al eje X, y entonces el valor de la frecuencia donde el módulo vale 0 corresponde con K_v .

Sistema tipo 2:



$$40\text{dB} \quad \log_{10}$$

$$20\log K_a \quad \log \omega_2 - \log 1$$

$$\log \omega_2 = \frac{20 \log K_a}{40} = \frac{1}{2} \log K_a$$

$$\omega_2 = \sqrt{K_a}$$

Luego existen dos posibles formas de calcular el error:

- 1) Ver para la frecuencia de 1 radian/segundo el valor del módulo de la recta que cae con -40 dB/dec. Obteniendo el valor de ganancia que corresponde a esos decibelios se obtiene K_a .
- 2) Prolongar esta recta hasta que corte al eje X, y entonces el valor de la frecuencia donde el módulo vale 0 corresponde con $\sqrt{K_a}$

7.4. DIAGRAMAS POLARES

Es la representación de la respuesta en frecuencia del sistema mediante una sola curva, presentando módulo y fase para cada valor de frecuencia mediante sus coordenadas polares.

Se representa el punto terminal de los vectores con módulo $|G(j\omega)|$ y fase $\angle G(j\omega)$ para cada valor de frecuencia ω . Los ejes representan la parte real frente a la parte imaginaria.

El diagrama polar se denomina también diagrama de Nyquist.

Como ventaja tiene que mediante el diagrama o traza polar se representa en una sola gráfica la respuesta frecuencial del sistema para todo el rango de frecuencias.

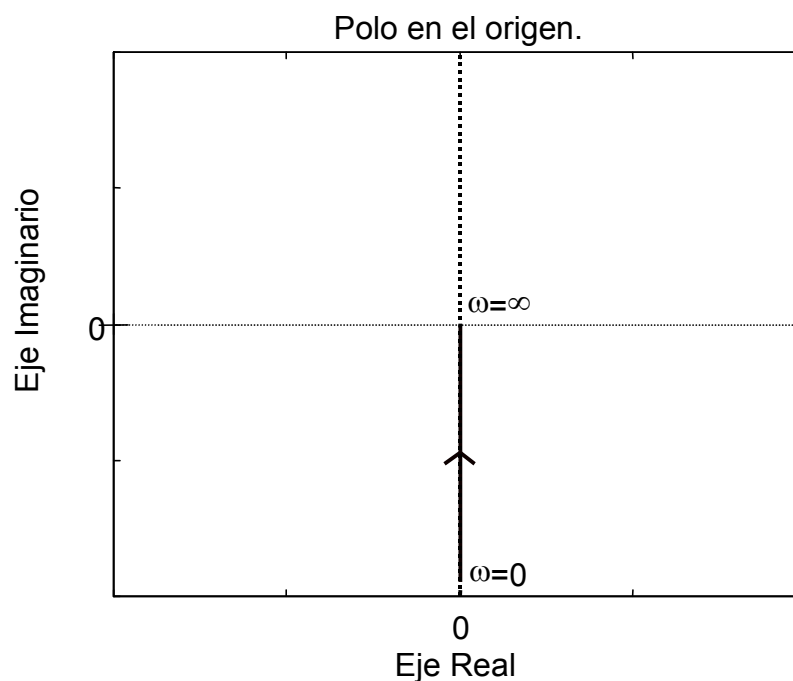
Y como desventaja, que a diferencia de los diagramas de Bode, no se puede observar la contribución de cada término simple de la función de transferencia.

A continuación se presenta la forma de los diagramas polares para los diferentes tipos de factores simples que puede contener una función de transferencia.

7.4.1. Ceros y polos en el origen

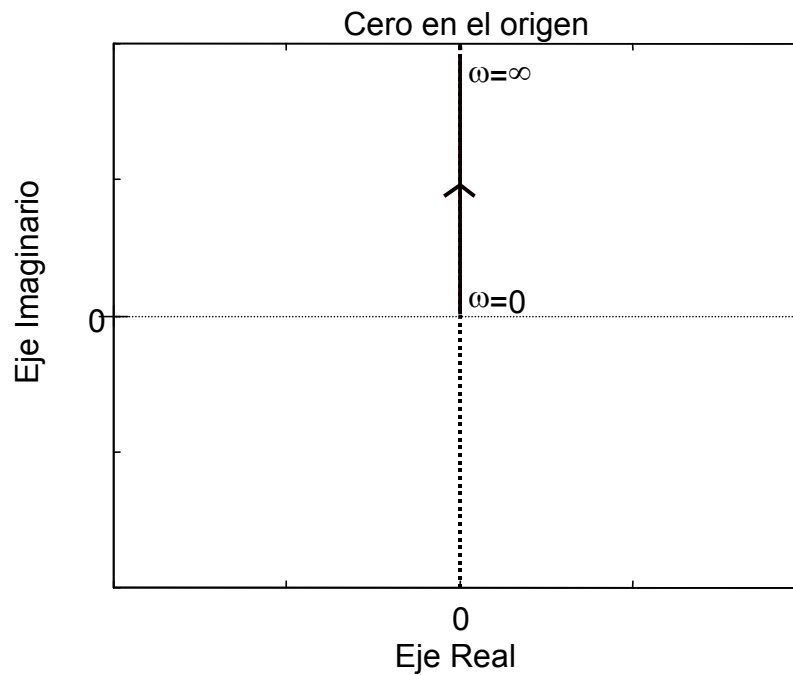
Polo en el origen:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$



Cero en el origen:

$$G(j\omega) = j\omega = \omega \angle 90^\circ$$



7.4.2. Ceros y polos en el eje real

$$G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{\pm 1}$$

$$|G(j\omega)| = \left(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}\right)^{\pm 1}$$

$$\angle G(j\omega) = \pm \arctg(\omega T)$$

Para un cero simple de la forma $G(j\omega) = 1 + j\omega T$ se tendrá:

Para $\omega = 0$

$$|G(j0)| = 1$$

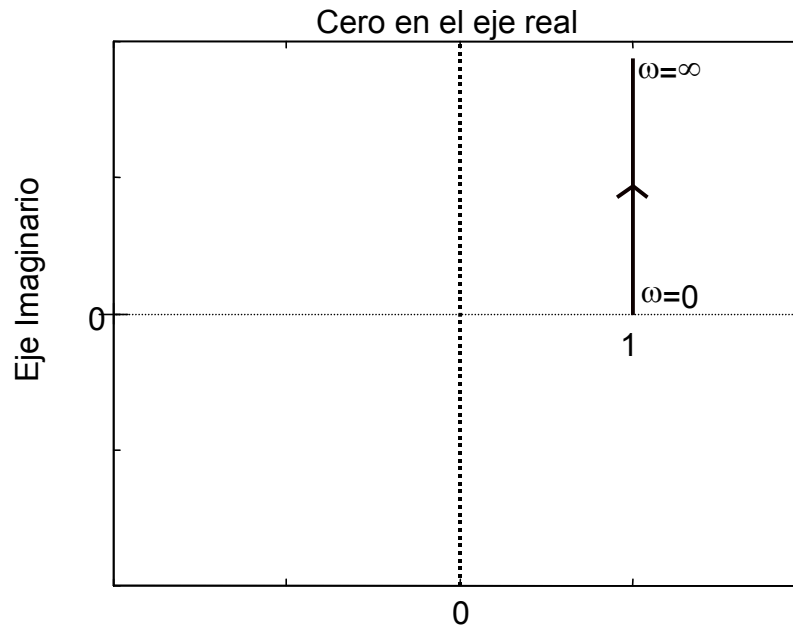
$$\angle G(j0) = 0$$

Para $\omega = \infty$

$$|G(j\infty)| = \infty$$

$$\angle G(j\infty) = 90^\circ$$

La representación puede verse en la siguiente figura.



Para un polo simple de la forma $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ se tendrá:

Para $\omega = 0$

$$|G(j0)| = 1$$

$$\angle G(j0) = 0^\circ$$

Para $\omega = \frac{1}{T}$

$$|G(j\infty)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle G(j\infty) = -45^\circ$$

Para $\omega = \infty$

$$|G(j\infty)| = 0$$

$$\angle G(j\infty) = -90^\circ$$

El diagrama polar describe una semicircunferencia entre estos dos puntos. Para comprobarlo se descompone $G(j\omega)$ en parte real y parte imaginaria:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \cdot \frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = X + jY$$

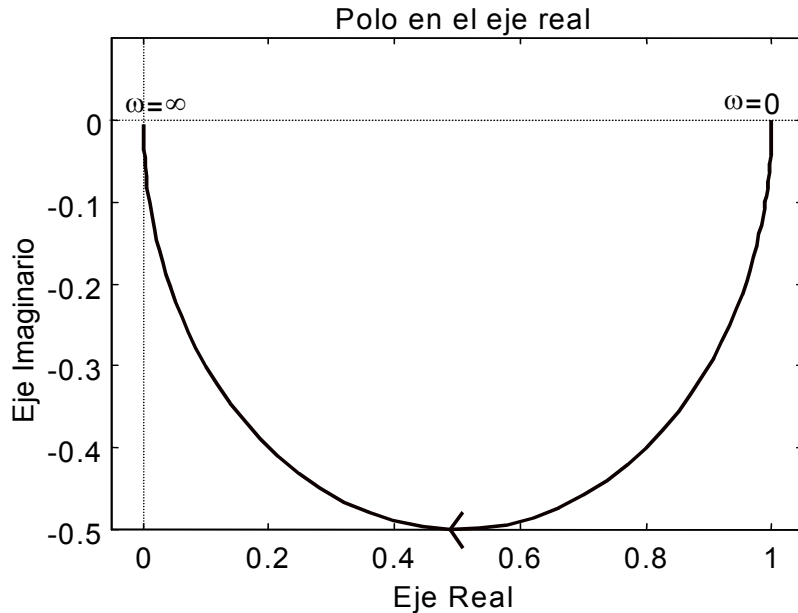
Y se comprueba que corresponde con un semicírculo con centro en $(0.5, 0)$ y radio 0.5:

$$(X - 0.5)^2 + Y^2 = 0.5^2$$

$$\left(\frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - 0.5 \right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \right)^2 = \left(\frac{1 - 0.5 - 0.5\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} \right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{0.5 - 0.5\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} \right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \right)^2 = \frac{0.25 - 0.5\omega^2 T^2 + 0.25\omega^4 T^4 + \omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} =$$

$$= \frac{0.25 + 0.5\omega^2 T^2 + 0.25\omega^4 T^4}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = 0.25 \frac{1 + 2\omega^2 T^2 + \omega^4 T^4}{1 + 2\omega^2 T^2 + \omega^4 T^4} = 0.25$$



7.4.3. Ceros y polos complejos conjugados

$$G(j\omega) = \left(1 + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^{\pm 1}$$

$$\text{Módulo: } |G(j\omega)| = \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n} \right)^2} \right)^{\pm 1}$$

$$\text{Fase: } \angle G(j\omega) = \pm \arctg \frac{\frac{2\delta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Para un par de ceros complejos conjugados de la forma $G(j\omega) = 1 + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2$ se

tendrá:

$$G(j\omega) = 1 + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta\omega}{\omega_n}$$

Para $\omega = 0$

$$|G(j0)| = 1$$

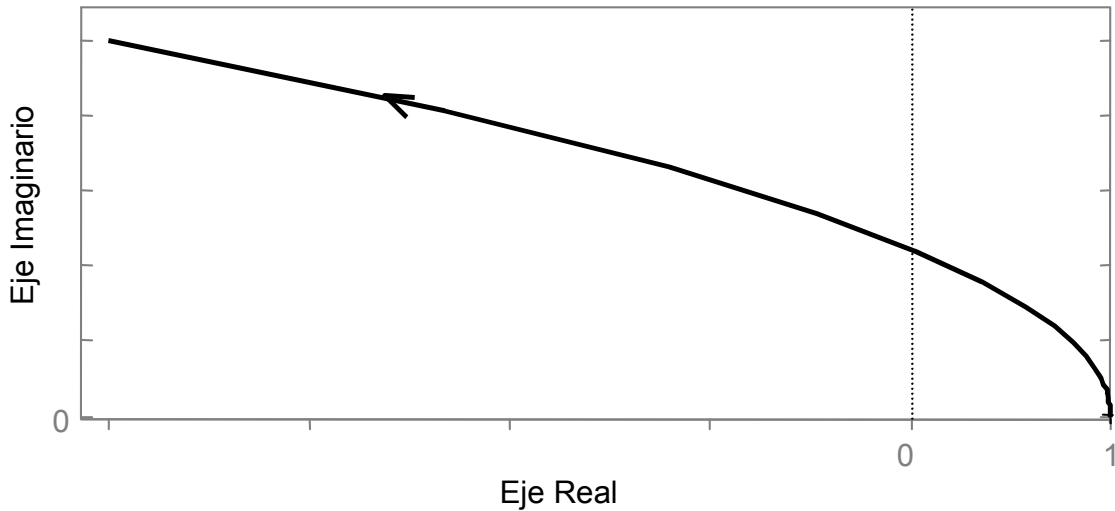
$$\angle G(j0) = 0^\circ$$

Para $\omega = \infty$

$$|G(j\infty)| = \infty$$

$$\angle G(j\infty) = 180^\circ$$

Ceros complejos conjugados



Para un par de polos complejos conjugados de la forma $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$ se

tendrá:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta\omega}{\omega_n}} \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j \frac{2\delta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j \frac{2\delta\omega}{\omega_n}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j \frac{2\delta\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n}\right)^2} + j \frac{-\frac{2\delta\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para $\omega = 0$

$$|G(j0)| = 1$$

$$\angle G(j0) = 0^\circ$$

Para $\omega = \infty$

$$|G(j\infty)| = 0$$

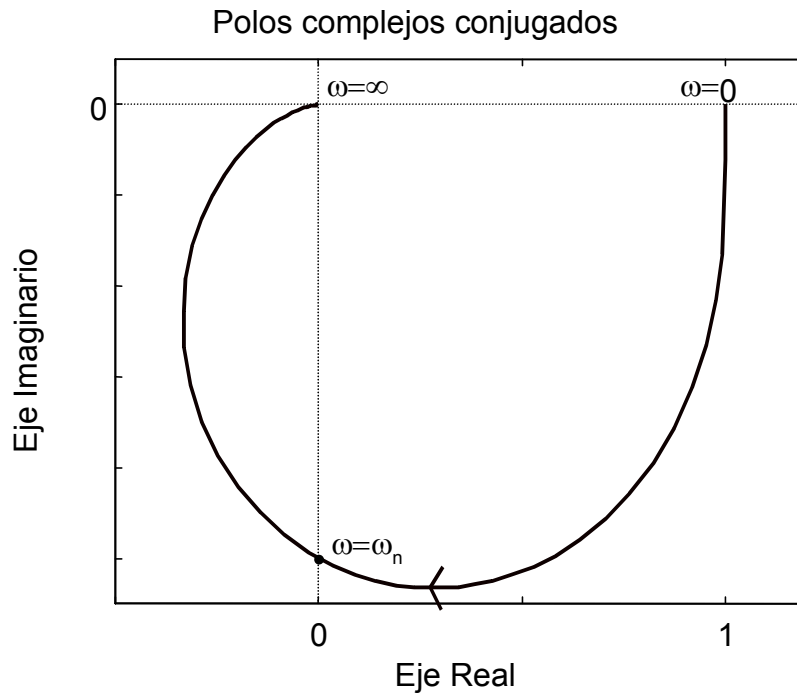
$$\angle G(j\infty) = -180^\circ$$

La forma exacta depende del valor del coeficiente de amortiguamiento δ .

Para $\omega = \omega_n$

$$|G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\delta}$$

$$\angle G(j\omega_n) = -90^\circ$$



7.4.4. Formas generales de los diagramas polares

Sistemas tipo 0:

- La traza comienza ($\omega = 0$) en el eje real y sale perpendicular a él.
- La traza termina ($\omega = \infty$) en el origen tangente a uno de los ejes.

Sistemas tipo 1:

- La traza comienza ($\omega = 0$) en el infinito con -90° asintóticamente a una línea paralela al eje imaginario negativo.
- La traza termina ($\omega = \infty$) en el origen tangente a uno de los ejes.

Sistemas tipo 2:

- La traza comienza ($\omega = 0$) en el infinito con -180° asintóticamente a una línea paralela al eje real negativo.
- La traza termina ($\omega = \infty$) en el origen tangente a uno de los ejes.

Para $\omega = \infty$ los lugares son tangentes a uno de los ejes. Si el grado del denominador de $G(j\omega)$ es mayor que el del numerador los lugares convergen hacia el origen en el sentido de

las agujas del reloj. El ángulo con el que se converge al origen es:

$$-90^\circ \cdot (\text{diferencia de grado entre numerador y denominador})$$

7.4.5. Pasos para el trazado de un diagrama polar

Punto de inicio:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)|$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega)$$

Punto de finalización:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)|$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega)$$

Corte con los ejes:

Con el eje real:

$$\text{Im}[G(j\omega)] = 0$$

Corte con el eje imaginario:

$$\text{Re}[G(j\omega)] = 0$$

Asíntotas verticales:

$$X_v = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re al}[G(j\omega)]$$

Asíntotas horizontales:

$$Y_h = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}[G(j\omega)]$$

7.5. ESTABILIDAD EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA (NYQUIST)

Características de Nyquist:

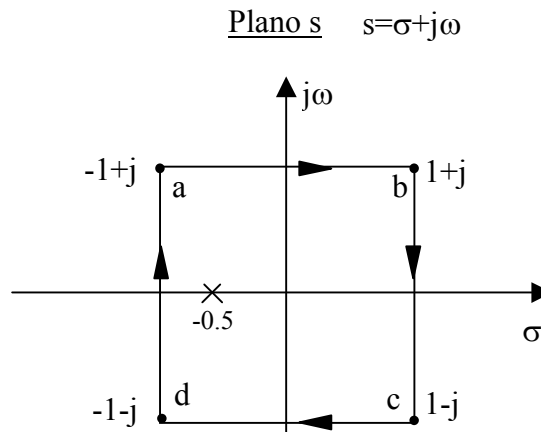
1. Proporciona información sobre la estabilidad absoluta.
2. Proporciona información sobre el grado de estabilidad (estabilidad relativa).
3. Informa sobre la respuesta frecuencial del sistema.

Teorema de Cauchy:

Si un contorno cerrado en el plano s rodea Z ceros y P polos de la función $F(s)$, sin que pase por ninguno de ellos y en un determinado sentido, el contorno correspondiente en el plano $F(s)$ rodea al origen de dicho plano $N=Z-P$ veces, en igual sentido.

EJEMPLO:

Para la función $F(s) = 2s + 1$:



Vemos el contorno en el plano $F(s)$:

$$F(s) = u + jv = 2s + 1 = 2(\sigma + j\omega) + 1 = 2\sigma + 1 + j\omega \cdot 2$$

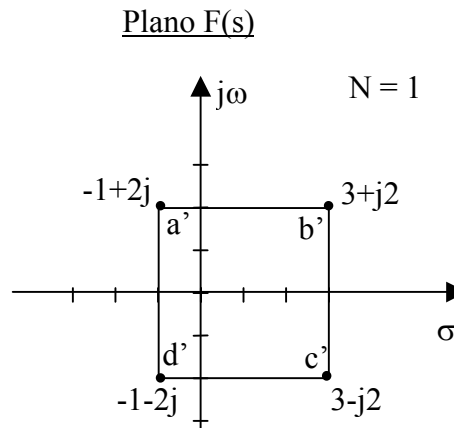
$$\left. \begin{aligned} u &= 2\sigma + 1 \\ v &= 2\omega \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} a': \quad u &= 2(-1) + 1 = -1 \\ v &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b': \quad u &= 2(1) + 1 = 3 \\ v &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c': \quad u &= 2(1) + 1 = 3 \\ v &= 2 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d': \quad u &= 2(-1) + 1 = -1 \\ v &= 2 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$



$$\boxed{N = 1}$$

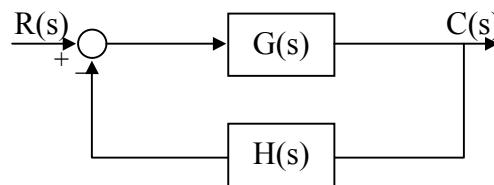
Entonces:

$$N = Z - P$$

- Si rodea más ceros que polos en un sentido, rodeará al origen (en el plano $F(s)$) N veces en igual sentido.
- Si rodea tantos polos como ceros o no rodea ni polos ni ceros, no rodeará al origen (en el plano $F(s)$).
- Si rodea más polos que ceros en un sentido, rodeará al origen N veces en sentido contrario.

Criterio de Nyquist (aplicación a control).

Dado un sistema como el mostrado en la figura:



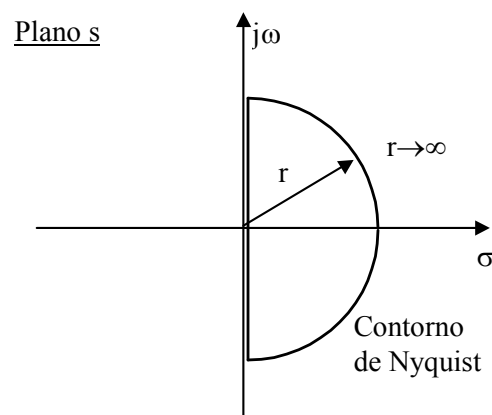
$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{Z}{P}$$

Realizamos la transformación al plano $F(s)$ y obtenemos N .

$$Z = N + P$$

Z : Número de ceros de $F(s)$ dentro del contorno de Nyquist o número de polos de lazo cerrado a la derecha.



Para facilitar el cálculo, en lugar de realizar la transformación sobre $F(s)$ donde sería más difícil la obtención de los ceros,

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$

y contar el número de veces que rodea al origen,

se hace sobre:

$$F'(s) = F(s) - 1 = G(s)H(s)$$

y se cuenta el número de veces que se rodea al punto -1.

Método:

- Dado un sistema $M(s)$ del que se quiere conocer su estabilidad:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Se toma el contorno de Nyquist en el plano s sin que corte a ningún polo ni cero de $G(s)H(s)$.
- Se transforma el contorno al plano $F'(s) = G(s)H(s)$
- Se observa el número de veces que rodea al punto -1 (N).
- En número de ceros (a la derecha) de la ecuación característica o lo que es igual, el número de polos del sistema en lazo cerrado a la derecha es:

$$Z = N + P$$

- Si $Z \neq 0$ entonces es inestable.

Z: número de ceros de la ecuación característica a la derecha.

P: número de polos de la ecuación característica a la derecha.

N: número de rodeos al punto -1.

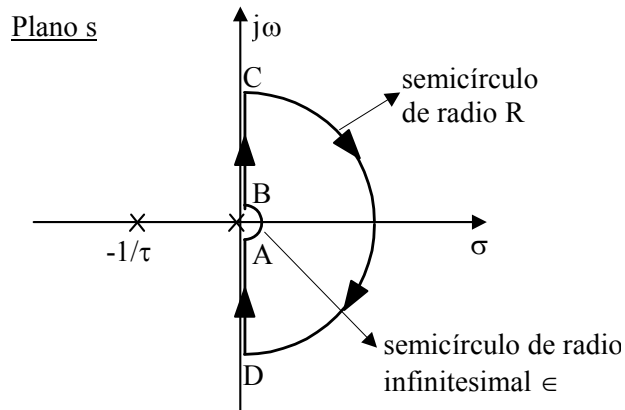
EJEMPLO:

Dado el sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)}$$

donde P es el número de polos de la ecuación característica.

1. Contorno de Nyquist.



2. Transformación del contorno al plano $G(s)H(s)$.

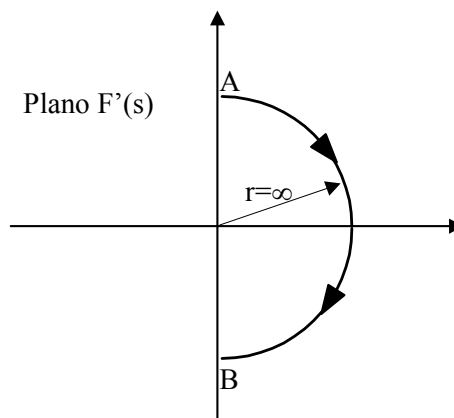
a) Tramo AB (semicírculo del origen): $s = \epsilon \cdot e^{j\theta}$

θ va desde -90° a $+90^\circ$

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)} = \frac{k}{\epsilon \cdot e^{j\theta} (\tau \cdot \epsilon \cdot e^{j\theta} + 1)}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k}{\epsilon} \cdot e^{-j\theta} \rightarrow \begin{cases} \text{Módulo} \rightarrow \infty \\ \text{Fase} \rightarrow -\theta \end{cases}$$

Esto corresponde con un semicírculo de radio ∞ que va desde $+90^\circ$ a -90°

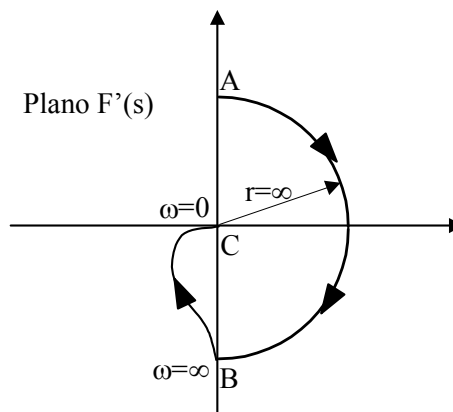


b) Tramo BC. $s = j\omega$ donde ω va desde 0 a ∞

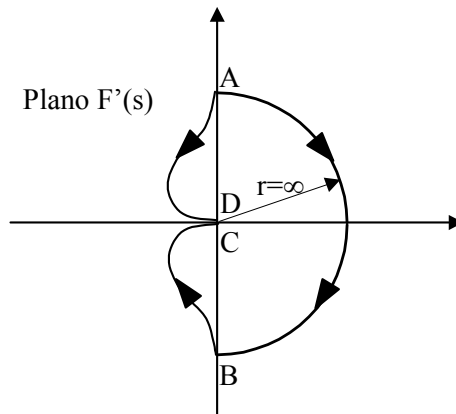
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{k}{j\omega(\tau \cdot j\omega + 1)}$$

$$\text{para } \omega \rightarrow 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{k}{\omega} \rightarrow \infty \\ \text{Fase} = -90^\circ - \text{arctg}(\tau\omega) \rightarrow -90^\circ \end{array} \right.$$

$$\text{para } \omega \rightarrow \infty \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{k}{\omega^2} \rightarrow 0 \\ \text{Fase} = -90^\circ - \text{arctg}(\tau\omega) \rightarrow -180^\circ \end{array} \right.$$



c) Tramo DA.
Simétrico al BC.



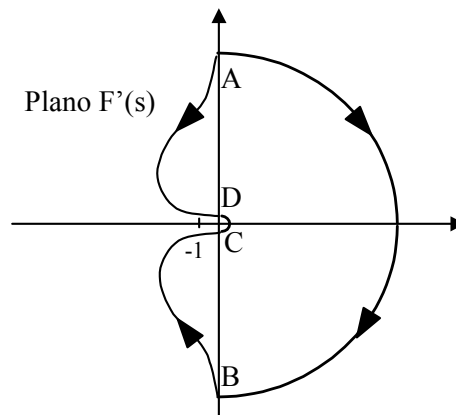
d) Tramo CD. $s = R \cdot e^{j\theta}$ $R \rightarrow \infty$

θ va desde $+90^\circ$ a -90° .

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)} = \frac{k}{R \cdot e^{j\theta} (\tau R \cdot e^{j\theta} + 1)}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k}{\tau R^2 e^{2j\theta}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k}{\tau R^2} \rightarrow 0 \\ \text{Fase} = -2\theta \end{array} \right.$$

Que corresponde con un semicírculo de radio infinitesimal desde -180° a $+180^\circ$.



$$N=0$$

$$P=0$$

$$Z=N+P=0$$

No existen ceros de la ecuación característica a la derecha. Por tanto es estable.

7.6. ESTABILIDAD RELATIVA CON NYQUIST.

La mayoría de las veces $G(s)$ y $H(s)$ son sistemas estables y por lo tanto no tienen polos en el lado derecho:

$$P=0$$

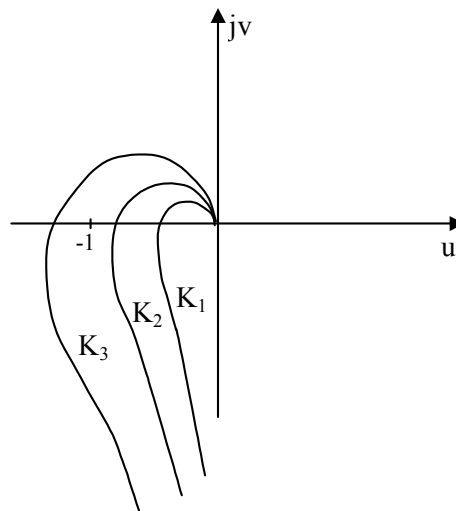
Entonces, para que el sistema total sea estable, debe ocurrir que la transformación del contorno de Nyquist no rodee al punto -1 .

$$N=Z-P \quad \text{y} \quad P=0$$

para que $Z=0$ entonces $N=0$.

Entonces, el grado de estabilidad de un sistema, va a depender de lo cerca que pase del punto -1 , sin rodearlo.

En la figura puede verse los diagramas polares para tres valores diferentes de la ganancia K de lazo abierto. Según va aumentando la ganancia el sistema se va acercando al límite de estabilidad. Según se acerca el diagrama polar al punto -1 la respuesta será más oscilatoria. Puede verse que para K_1 y K_2 el sistema es estable y que para K_3 el sistema ha sobrepasado el punto -1 con lo que es inestable.



MARGEN DE GANANCIA

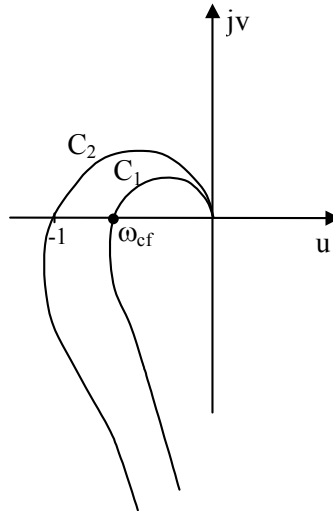
Es el valor que podemos aumentar la ganancia del sistema antes de que el sistema se haga inestable.

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)|_{\omega=\omega_{cf}}}$$

Si se considera en decibelios:

$$MG = 20 \log |C_2|_{\omega_{cf}} - 20 \log |C_1|_{\omega_{cf}}$$

$$MG = 20 \log \left| \frac{C_2}{C_1} \right|_{\omega_{cf}}$$

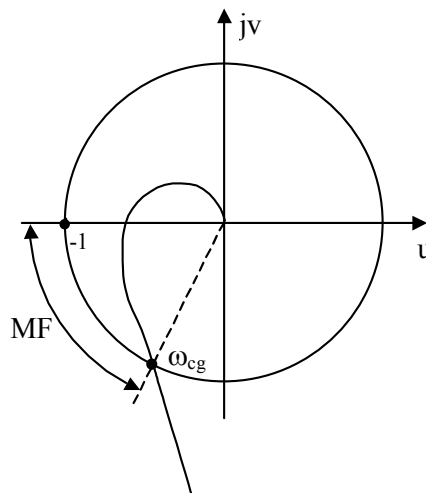


$$MG = 20 \log \frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=\omega_{cf}}}$$

ω_{cf} : frecuencia de corte de fase. Aquella para la que el sistema presenta una fase de -180° , es decir, el diagrama polar corta al eje real.

MARGEN DE FASE:

Es el ángulo de fase que debe girar para que el sistema sea inestable.



$$MF = 180 + \angle G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}}$$

ω_{cg} : frecuencia de corte de ganancia. La frecuencia para la cual el sistema tiene módulo 1 (0dB), es decir, corresponde con el punto de corte del diagrama polar con la circunferencia unidad.

$$|G(j\omega_{cg})| = 1$$

7.7. ESTABILIDAD RELATIVA EN LOS DIAGRAMAS DE BODE.

Aplicando el criterio de estabilidad de Nyquist a la representación frecuencial de un sistema se tiene que un sistema $G(j\omega)$ será estable si no sobrepasa el punto límite -1 . Si se representa el análisis frecuencial por medio de los diagramas de Bode el punto límite de estabilidad corresponde con módulo 1 y fase -180° .

Cuanto más se aleje la curva del punto crítico más estable será el sistema. Por tanto se puede analizar la estabilidad relativa del sistema por comparación con la distancia relativa de la curva al punto límite de estabilidad.

MARGEN DE GANANCIA

Es el valor que se puede aumentar la ganancia del sistema sin que se haga inestable. Corresponde con el módulo que presenta el sistema a la frecuencia de corte de fase ω_{cf} .

Para hallar su valor se calcula la frecuencia ω_{cf} para la que el sistema llega al punto límite en fase (-180°) y yendo al diagrama del módulo se obtiene el valor de ganancia que sería necesario añadir para que el módulo llegue también al punto límite de estabilidad (0dB). Ese valor de ganancia será el margen de ganancia, es decir, el valor de ganancia que se puede añadir al sistema si que se vuelva inestable.

Por lo tanto, el sistema será estable cuando el margen de ganancia esté por debajo del eje de 0dB y será inestable cuando esté por encima de 0dB.

MARGEN DE FASE:

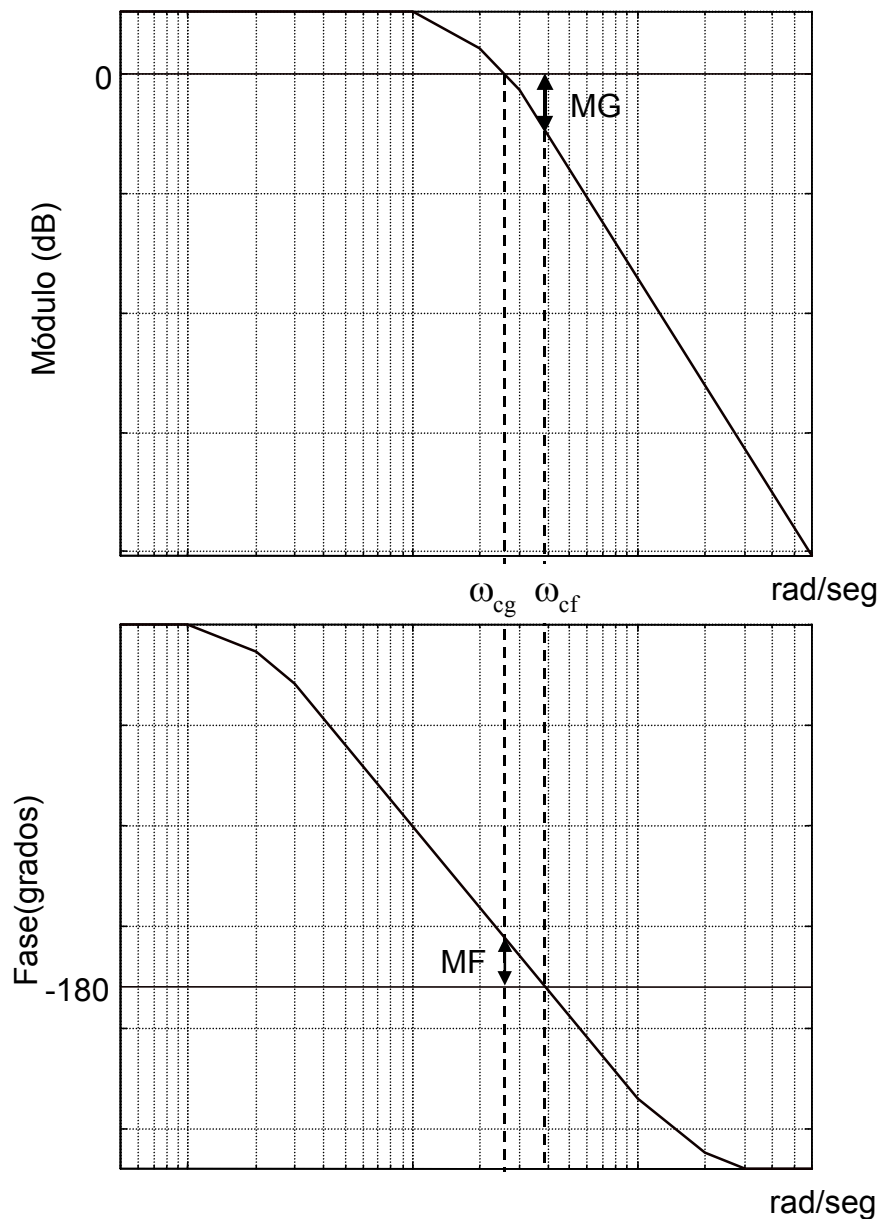
Es el valor que puede aumentar la fase del sistema sin que se haga inestable. Corresponde con la fase que presenta el sistema respecto a un eje que pasa por -180° cuando la frecuencia es la de corte de ganancia ω_{cg} .

Para hallar su valor se calcula la frecuencia ω_{cg} para la que el sistema llega al punto límite en módulo (0dB) y con ese valor de frecuencia se mira en el diagrama de la fase el número de grados que hay hasta llegar al punto límite de estabilidad (-180°). Ese incremento de fase será el margen de fase, es decir, lo que aún puede aumentar la fase sin que el sistema se vuelva inestable.

Por lo tanto el sistema será estable cuando el margen de fase esté por encima de la línea de los -180° , y será inestable cuando esté por debajo.

Comparando lo dicho para la estabilidad en el margen de fase y de ganancia, un sistema será estable cuando la frecuencia de corte de fase sea mayor que la frecuencia de corte de ganancia.

En la siguiente figura puede verse sobre los diagramas de Bode de un sistema el margen de fase y de ganancia de un sistema estable.



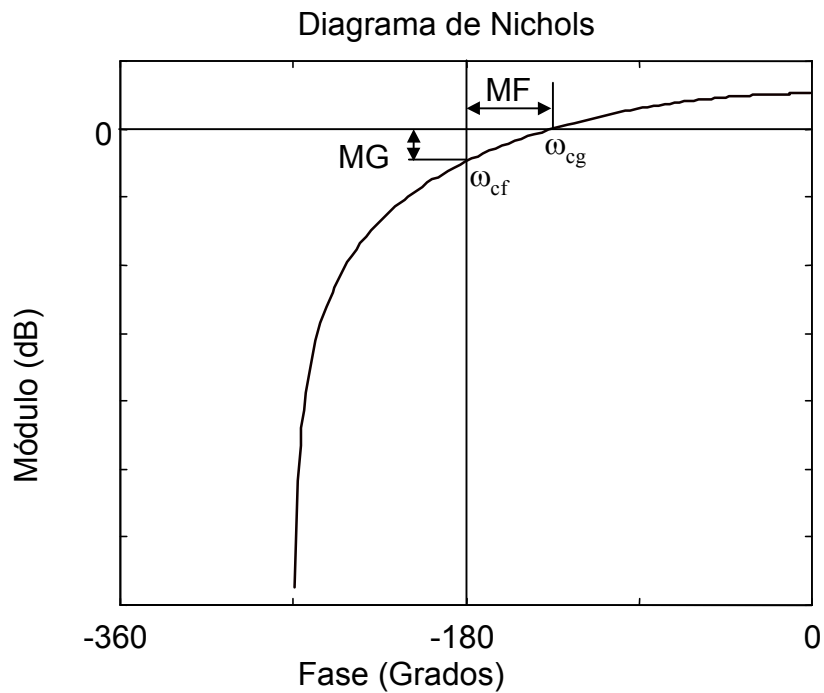
7.8. DIAGRAMA DE NICHOLS.

También se denomina diagrama del logaritmo del módulo frente a la fase.

Es la representación de la respuesta en frecuencia del sistema mediante una sola curva, donde se presenta el módulo logarítmico frente a la fase para cada valor de frecuencia.

Esta curva se puede construir a partir de la lectura de los valores de magnitud y fase de los diagramas de Bode de un sistema.

La siguiente figura representa un diagrama de Nichols de un sistema de segundo orden.



En la misma figura pueden verse también representados el margen de fase y margen de ganancia del sistema. En este caso corresponden a un sistema estable puesto que el margen de ganancia se encuentra por debajo de los 0dB y en margen de fase no está por debajo de -180° .

7.9. RESPUESTA EN FRECUENCIA EN LAZO CERRADO

Se trata de obtener la respuesta en frecuencia de lazo cerrado con realimentación unitaria a partir de su respuesta en lazo abierto.

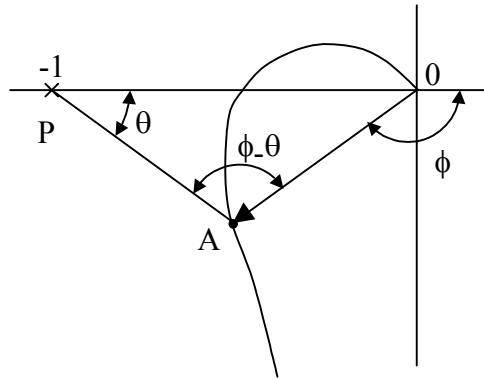
La función de transferencia de lazo cerrado será entonces:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

En el diagrama polar de $G(j\omega)$ representado en la figura siguiente, se ha señalado el punto A con frecuencia ω_1 . Este punto viene definido por el vector $\vec{0A}$.

Para este punto el módulo será: $|\vec{0A}| = |G(j\omega)|_{\omega=\omega_1}$

Y la fase será: $\phi = \angle G(j\omega)_{\omega=\omega_1}$



Gráficamente puede verse que el vector \vec{PA} representa a $\vec{P0} + \vec{0A}$ o lo que es lo mismo:

$$\vec{PA} = 1 + G(j\omega)|_{\omega=\omega_1}$$

Por tanto:

$$M(j\omega_1) = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{\vec{0A}}{\vec{PA}}$$

De donde se puede obtener que el valor del módulo es:

$$|M(j\omega_1)| = \frac{|\vec{0A}|}{|\vec{PA}|} = M$$

Y el valor de la fase:

$$\angle M(j\omega_1) = \phi - \theta = \alpha$$

Luego a partir de la respuesta en lazo abierto para distintos valores de frecuencia, se puede obtener la respuesta en frecuencia del sistema en lazo cerrado.

7.9.1. Lugares de módulo constante (Círculos M).

Se busca el lugar donde el módulo de la función de transferencia de lazo cerrado no varía.

Representando la función de transferencia de lazo abierto por su parte real e imaginaria:

$$G(j\omega) = X + jY$$

Se calcula ahora el módulo de la función de transferencia de lazo cerrado:

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{(1 + X)^2 + Y^2}}$$

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

$$M^2((1+X)^2 + Y^2) = X^2 + Y^2$$

$$M^2(1 + 2X + X^2 + Y^2) = X^2 + Y^2$$

$$(1 - M^2)X^2 - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0$$

$$X^2 - \frac{2M^2}{1 - M^2}X - \frac{M^2}{1 - M^2} + Y^2 = 0$$

$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2 - 1}X + \frac{M^2}{M^2 - 1} + Y^2 = 0$$

Sumando a los dos miembros de la ecuación $\frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$

$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2 - 1}X + \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} + \frac{M^2}{M^2 - 1} + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2 - 1}X + \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

$$\left(X + \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

Que corresponde con la ecuación de una circunferencia:

$$\text{- con centro en : } -\frac{M^2}{1 - M^2}$$

$$\text{- y radio: } \frac{M}{M^2 - 1}$$

Luego los lugares de módulo M constante forman circunferencias.

7.9.2. Lugares de fase constante (Círculos N).

Se busca el lugar donde la fase de la función de transferencia de lazo cerrado no varía.

Representando la función de transferencia de lazo abierto por su parte real e imaginaria:

$$G(j\omega) = X + jY$$

Se calcula ahora la fase de la función de transferencia de lazo cerrado:

$$\alpha = \angle \frac{X + jY}{1 + X + jY} = \arctg \frac{Y}{X} - \arctg \frac{Y}{1 + X}$$

Tomando tangentes en ambos miembros y definiendo: $\text{tg } \alpha = N$

$$N = \text{tg} \left(\text{arctg} \frac{Y}{X} - \text{arctg} \frac{Y}{1+X} \right)$$

Como:

$$\text{tg}(A - B) = \frac{\text{tg } A - \text{tg } B}{1 + \text{tg } A \text{tg } B}$$

$$N = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X} \cdot \frac{Y}{1+X}} = \frac{(1+X)Y - XY}{X(1+X) + Y^2} = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

$$X^2 + X + Y^2 = \frac{Y}{N}$$

$$X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N} Y = 0$$

Sumando a los dos miembros de la ecuación: $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N} \right)^2$

$$X^2 + X + \frac{1}{4} + Y^2 - \frac{1}{N} Y + \left(\frac{1}{2N} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N} \right)^2$$

$$\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N} \right)^2$$

Que corresponde con la ecuación de una circunferencia:

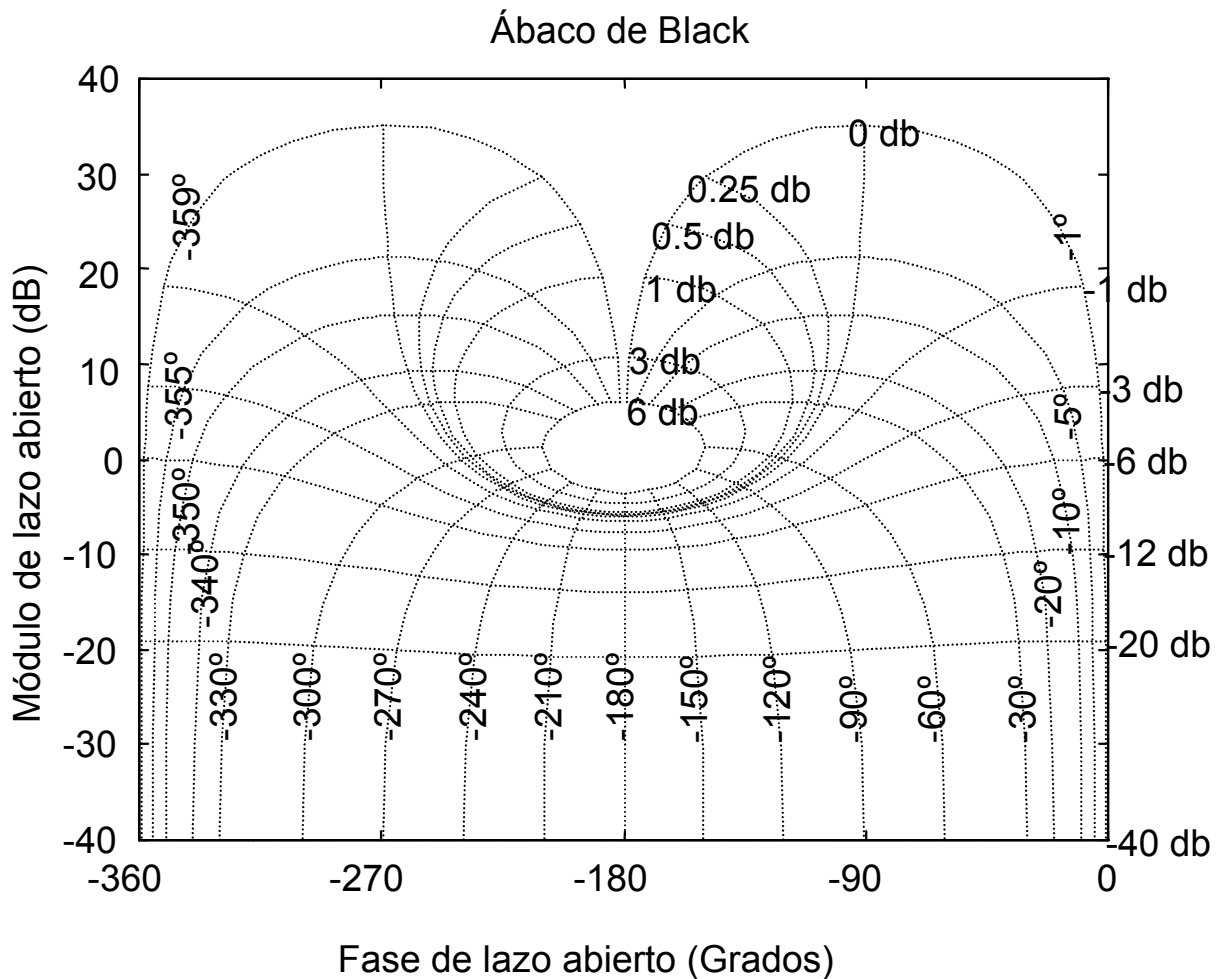
- con centro en: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N} \right)$

- y radio: $\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N} \right)^2}$

Luego los lugares de N constante forman circunferencias.

Por tanto los círculos M y N permiten calcular la respuesta de lazo cerrado a partir de la respuesta de lazo abierto. Esta se obtiene representando la respuesta de $G(j\omega)$ sobre la representación de los círculos M y N. Las intersecciones de $G(j\omega)$ con los círculos M dan los valores del módulo de la respuesta de lazo cerrado, y las intersecciones con los círculos N la fase de la respuesta de lazo cerrado.

El diagrama formado por la representación de los círculos M y N se denomina Ábaco de Black o Carta de Nichols:



Para obtener la respuesta de lazo cerrado por medio del Ábaco de Black se construye en primer lugar el Diagrama de Nichols utilizando la respuesta obtenida de los Diagramas de Bode. Se representa esta respuesta sobre un Ábaco de Black, la escala de magnitud y fase corresponde con los ejes de ordenadas abscisas del Ábaco.

Y ahora para obtener los valores de la respuesta de lazo cerrado se van leyendo los valores de los lugares M para el módulo, y de los lugares N para la fase que cortan a la respuesta.

Es decir, se entra representando la curva con respecto a los ejes de coordenadas, y se sale leyendo los valores que corresponden de los lugares M y N.

El pico de resonancia se produce para el mayor valor de módulo de la respuesta de lazo cerrado, esto coincide con la tangencia con el lugar M de mayor módulo posible, es decir el círculo M más pequeño posible.

El ancho de banda se obtiene para la frecuencia donde $G(j\omega)$ corta a la curva de -3 dB.