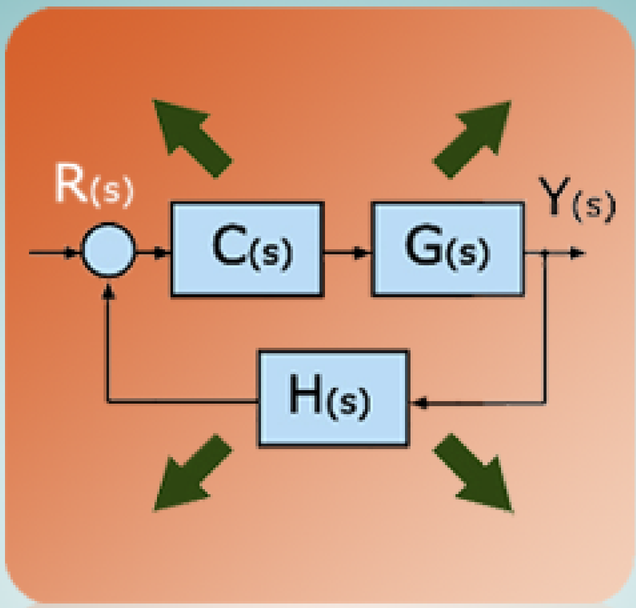
Automática

Apéndice: Transformada de Laplace



José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

Apéndice

Transformada de Laplace

A.1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos lineales y tiempo invariantes pueden ser modelados mediante ecuaciones integro-diferenciales lineales, de coeficientes constantes. La resolución de este tipo de ecuaciones no presenta gran complejidad, y pueden obtenerse las respuestas del sistema ante diferentes tipos de entradas de forma sencilla. Sin embargo, tal y como se puede ver a lo largo de todo el presente texto, los sistemas de control están formados por numerosos elementos interconectados entre sí, de los que se conoce la ecuación que define a cada uno de ellos. Esto hace que aparezca un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas con el que es más difícil trabajar. Por el contrario, cuando se trabaja en el plano s, al aplicar la transformación de Laplace, se obtiene una serie de ventajas en cuando a facilidad de manipulación de bloques y en cuanto al análisis de sistemas que hacen de la transformada de Laplace y del análisis y diseño de sistemas en el plano complejo s, hoy por hoy, insustituible.

El presente apéndice pretende, únicamente, proporcionar un breve repaso de las características y propiedades más importantes de la transformada de Laplace, aplicada al análisis de sistemas dinámicos.

A.2. DEFINICIÓN

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

EJEMPLO A.1.

Transformada de un escalón de amplitud A.

$$f(t) = A$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} A dt = A\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = A\left[0 + \frac{1}{s}\right] = \frac{A}{s}$$

A.3. PROPIEDADES

1- Multiplicación por una constante:

$$\mathcal{L}\left[Af(t)\right] = AF(s)$$

2- Linealidad:

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

3- Traslación en el tiempo:

$$\mathcal{L}\left[f(t - T_0)\right] = e^{-T_0 s}F(s)$$

4- Multiplicación por una exponencial:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s + a)$$

5- Cambio de escala de tiempos:

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(\alpha s)$$

6- Derivación:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sx(0) - x'(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - .... - x'^{n-1}(0)$$

7- Integración:

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

$$f^{-1}(0) = \int f(t)dt\Big|_{\text{en } t=0}$$

8- Convolución:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s)F_2(s)$$

9- Teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

10- Teorema del valor inicial:

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

A.4. TRANSFORMADA INVERSA

A.4.1. Definición:

$$f(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st}F(s)ds$$

c : Abscisa de convergencia

A.4.2. Polos reales simples

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + ... + \frac{a_n}{(s+p_n)}$$

Multiplicando, a ambos lados, por $(s+p_i)$ y particularizando para $s = -p_i$:

$$a_i = \left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_i)\right]_{s=-p_i}$$

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1 s + a_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \frac{a_3}{(s+p_3)} + ... + \frac{a_n}{(s+p_n)}$$

Multiplicando, a ambos lados, por $(s+p_1)(s+p_2)$ y particularizando para $s=-p_1$:

$$a_1 s + a_2 = \left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)(s+p_2)\right]_{s=-p_1}$$

$$a_i = \left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_i)\right]_{s=-p_i}$$

A.4.3. Polos reales múltiples

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_r}{(s+p_0)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s+p_0)^{r-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(s+p_0)} + $$
$$+ \frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + \ldots + \frac{a_n}{(s+p_n)}$$

Multiplicando, a ambos lados, por $(s+p_0)^r$ y particularizando para $s=-p_0$:

$$b_r = \left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_0)^r\right]_{s=-p_r}$$

Multiplicando, a ambos lados, por $(s+p_0)^r$, derivando y particularizando para $s=-p_0$:

$$b_{r-1} = \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_0)^r\right)\right]_{s=-p_r}$$

Multiplicando, a ambos lados, por $(s+p_0)^r$, derivando dos veces y particularizando para $s=-p_0$:

$$b_{r-2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_0)^r\right)\right]_{s=-p_r}$$

De forma general sería:

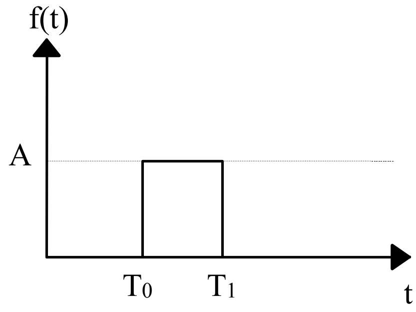
$$b_{r-j} = \frac{1}{j!}\left[\frac{d^j}{ds^j}\left(\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_0)^r\right)\right]_{s=-p_r}$$

A.4.4. Tabla de transformadas de Laplace

f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n = 1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{s^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad n = 1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}\left(be^{-at} - ae^{-bt}\right)\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
$\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\, t\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\, t - \phi\right)$ $\phi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$	$\frac{s}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$
$1-\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\, t + \phi\right)$ $\phi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)}$

EJEMPLO A.2.

Calcular la transformada de f(t).



$$f(t) = A\,1(t - T_0) - A\,1(t - T_1)$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \rightarrow \mathcal{L}[1(t - T)] = \frac{e^{-sT}}{s}$$

$$F(s) = A\left[\frac{e^{-sT_0}}{s} - \frac{e^{-sT_1}}{s}\right] = \frac{A}{s}\left[e^{-sT_0} - e^{-sT_1}\right]$$

EJEMPLO A.3.

Calcular la transformada de f(t), conocida la transformada del seno.

$$f(t) = e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(wt)$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{sen}(wt)] = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(wt)\right] = \frac{w}{(s+\alpha)^2 + w^2}$$

EJEMPLO A.4.

Calcular la transformada de f(t).

$$f(t) = e^{-t}$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \rightarrow \mathcal{L}\left[e^{-t}1(t)\right] = \frac{1}{s+1}$$

EJEMPLO A.5.

Calcular la transformada de f(t).

$$f(t) = e^{-\frac{t}{5}}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-t}1(t)\right] = \frac{1}{s+1} \rightarrow \mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{5}}1(t)\right] = 5\frac{1}{5s+1}$$

EJEMPLO A.6.

Obtener la transformada inversa de F(s):

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s) = \frac{a_1}{(s+1)} + \frac{a_2}{(s+2)}$$

$$a_1 = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+1)\right]_{s=-1} = \frac{-1+3}{-1+2} = 2$$

$$a_2 = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+2)\right]_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

Acudiendo a las tablas:

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

EJEMPLO A.7.

Obtener la transformada inversa de F(s):

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

Las raíces del denominador son: $p_{1,2} = -0.5 \pm j0.866;\ p_3 = 0;$

$$F(s) = \frac{a_1 s + a_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \frac{a_3}{(s+p_3)}$$

$$a_1 s + a_2 = \left[\frac{(s+1)}{s}\right]_{s=-0.5+j0.866}$$

$$a_1(-0.5+j0.866)^2 + a_2(-0.5+j0.866) = (-0.5+j0.866+1)$$

Igualando partes reales e imaginarias entre sí:

$$a_1 + a_2 = -1;$$

$$-a_1 + a_2 = 1;$$

$$a_1 = -1;\ a_2 = 0;$$

Para el polo real:

$$a_3 = \left[\frac{s+1}{s^2+s+1}\right]_{s=0} = 1$$

Entonces:

$$F(s) = \frac{-s}{s^2+s+1} + \frac{1}{s} = F_1(s) + F_2(s)$$

$$¿f_1(t)?;\quad f_2(t) = 1;$$

$$F_1(s) = \frac{-s-0.5}{(s+0.5)^2+0.866^2} + \frac{0.5}{(s+0.5)^2+0.866^2} = F_1'(s) + F_1''(s)$$

$$f_1'(t) = -e^{-0.5t}\mathrm{Cos}(0.866t);\ ¿f_1''(t)?$$

$$F_1''(s) = \frac{0.5}{0.866}\frac{0.866}{(s+0.5)^2+0.866^2}$$

$$f_1''(t) = \frac{0.5}{0.866}e^{-0.5t}\mathrm{Sen}(0.866t)$$

La transformada inversa total:

$$f(t) = 1 - e^{-0.5t}\mathrm{Cos}(0.866t) + \frac{0.5}{0.866}e^{-0.5t}\mathrm{Sen}(0.866t)$$

EJEMPLO A.8.

Obtener la transformada inversa de F(s).

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$$

$$F(s) = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{(s+1)}$$

$$b_3 = \left[s^2 + 2s + 3\right]_{s=-1} = 2$$

$$b_2 = \left[\frac{d}{ds}\left(s^2 + 2s + 3\right)\right]_{s=-1} = \left[2s + 2\right]_{s=-1} = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left(s^2 + 2s + 3\right)\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}\left[2\right]_{s=-1} = 1$$

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)}$$

Entonces, desde las tablas:

$$f(t) = 2t^2 e^{-t} + e^{-t}$$