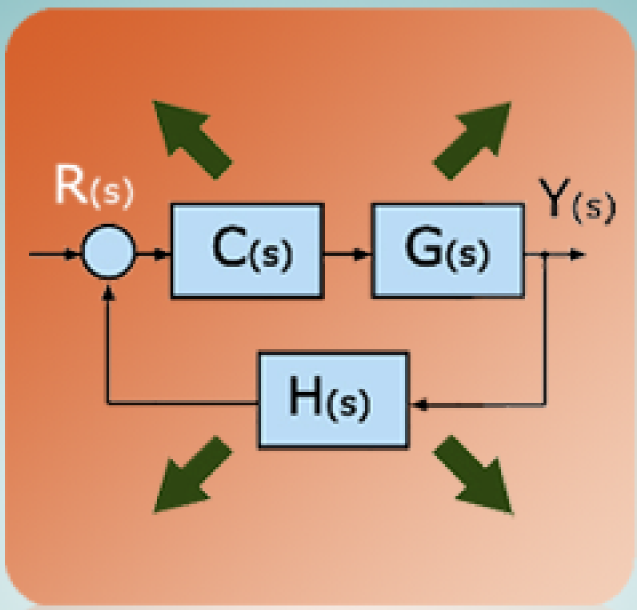
Automática

Ejercicios

Capítulo 1. Modelado de Sistemas de Control

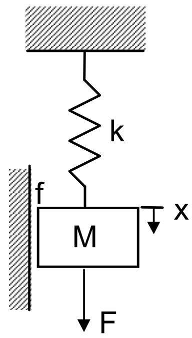


José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

EJERCICIO 1.1.

Modelar y calcular la función de transferencia del siguiente sistema, donde la entrada es la fuerza F y la salida la posición x:



$$F(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f\frac{dx(t)}{dt} + kx(t)$$

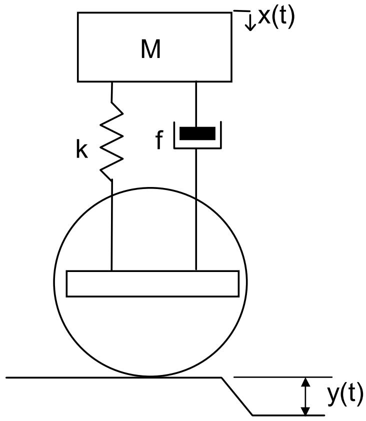
Tomando transformadas con condiciones iniciales nulas:

$$F(s) = \left[s^2M + fs + k\right]X(s)$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2M + fs + k}}$$

EJERCICIO 1.2.

Modelar y calcular la función de transferencia del siguiente sistema, donde la entrada es el desplazamiento y(t) y la salida es el desplazamiento x(t):



$$\sum F = m \cdot a$$

$$f\left(\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}\right) + k\big(y(t) - x(t)\big) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

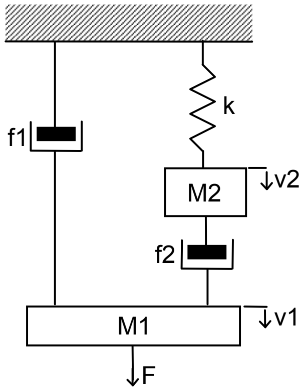
Tomando transformadas:

$$(sf + k)Y(s) = (s^2M + fs + k)X(s)$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{sf + k}{s^2M + fs + k}}$$

EJERCICIO 1.3.

Modelar y calcular las funciones de transferencia del siguiente sistema, considerando como entrada la fuerza F y como salidas las velocidades v1 y v2:



$$F(t) = M_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + f_1 v_1(t) + f_2\left(v_1(t) - v_2(t)\right)$$

$$f_2\left(v_1(t) - v_2(t)\right) = M_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + k\int v_2(t)dt$$

Tomando transformadas con condiciones iniciales nulas:

$$F(s) = (sM_1 + f_1 + f_2)V_1(s) - f_2 V_2(s)$$

$$f_2 V_1(s) = \left(M_2 s + f_2 + \frac{k}{s}\right)V_2(s)$$

Ordenándolo:

$$(sM_1 + f_1 + f_2)V_1(s) - f_2 V_2(s) = F(s)$$

$$-f_2 V_1(s) + \left(M_2 s + f_2 + \frac{k}{s}\right)V_2(s) = 0$$

De forma matricial:

$$\begin{pmatrix} sM_1 + f_1 + f_2 & -f_2 \\ -f_2 & M_2 s + f_2 + \dfrac{k}{s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo por Cramer:

$$V_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} F(s) & -f_2 \\ 0 & M_2 s + f_1 + \dfrac{k}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sM_1 + f_1 + f_2 & -f_2 \\ -f_2 & M_2 s + f_2 + \dfrac{k}{s} \end{vmatrix}}$$

$$V_1(s) = \frac{M_2 s + f_2 + k/s}{(sM_1 + f_1 + f_2)(M_2 s + f_2 + k/s) - f_2^2} F(s)$$

$$V_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} M_1 s + f_1 + f_2 & F(s) \\ -f_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sM_1 + f_1 + f_2 & -f_2 \\ -f_2 & M_2 s + f_2 + \dfrac{k}{s} \end{vmatrix}}$$

$$V_2(s) = \frac{f_2}{(sM_1 + f_1 + f_2)(M_2 s + f_1 + k/s) - f_1^2} F(s)$$

Entonces:

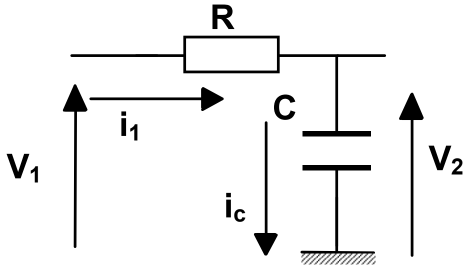
$$\boxed{\frac{V_1(s)}{F(s)} = \frac{M_2 s + f_2 + k/s}{(sM_1 + f_1 + f_2)(M_2 s + f_2 + k/s) - f_2^2}}$$

$$\boxed{\frac{V_2(s)}{F(s)} = \frac{f_2}{(sM_1 + f_1 + f_2)(M_2 s + f_2 + k/s) - f_2^2}}$$

EJERCICIO 1.4.

Obtener la función de transferencia $\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}$ correspondiente a los siguientes circuitos eléctricos representados:

Circuito 1:



$$i_1(t) = i_c(t) + i_2(t)$$

$$\frac{V_1(t) - V_2(t)}{R} = C\frac{dV_2(t)}{dt}$$

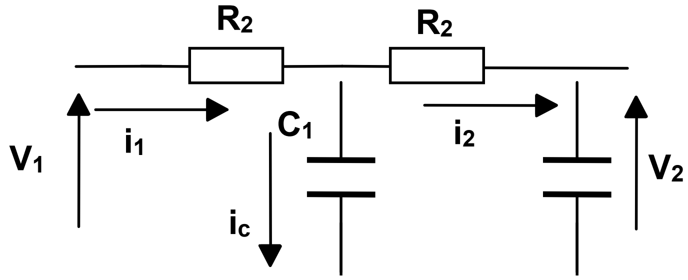
$$V_1(t) = RC\frac{dV_2(t)}{dt} + V_2(t)$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$V_1(s) = (RCs+1)V_2(s)$$

$$\boxed{\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs+1}}$$

Circuito 2:



$$v_1(t) = R \cdot i_1(t) + \frac{1}{C}\int i_1(t)dt - \frac{1}{C}\int i_2(t)dt$$

$$0 = R \cdot i_2(t) + 2\frac{1}{C}\int i_2(t)dt - \frac{1}{C}\int i_1(t)dt$$

$$v_2(t) = \frac{1}{C}\int i_2(t)dt$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$V_1(s) = R \cdot I_1(s) + \frac{1}{Cs}I_1(s) - \frac{1}{Cs}I_2(s)$$

$$0 = R \cdot I_2(s) + \frac{2}{Cs}I_2(s) - \frac{1}{Cs}I_1(s)$$

$$V_2(s) = \frac{1}{Cs}I_2(s)$$

Reorganizando los términos comunes:

$$V_1(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right) \cdot I_1(s) - \frac{1}{Cs} I_2(s)$$

$$0 = \left(R + \frac{2}{Cs}\right) \cdot I_2(s) - \frac{1}{Cs} I_1(s) \quad \rightarrow \quad I_1(s) = Cs\left(R + \frac{2}{Cs}\right) \cdot I_2(s) = (RCs + 2) \cdot I_2(s)$$

$$V_2(s) = \frac{1}{Cs} I_2(s)$$

Sustituyendo:

$$V_1(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right) \cdot (RCs + 2) \cdot I_2(s) - \frac{1}{Cs} I_2(s)$$

$$V_1(s) = \left(\left(R + \frac{1}{Cs}\right) \cdot (RCs + 2) - \frac{1}{Cs}\right) \cdot I_2(s)$$

$$V_1(s) = \left(R^2Cs + 2R + R + \frac{2}{Cs} - \frac{1}{Cs}\right) \cdot I_2(s)$$

$$V_1(s) = \left(R^2Cs + 3R + \frac{1}{Cs}\right) \cdot I_2(s)$$

Sustituyendo $V_2(s) = \frac{1}{Cs} I_2(s)$ en la ecuación anterior:

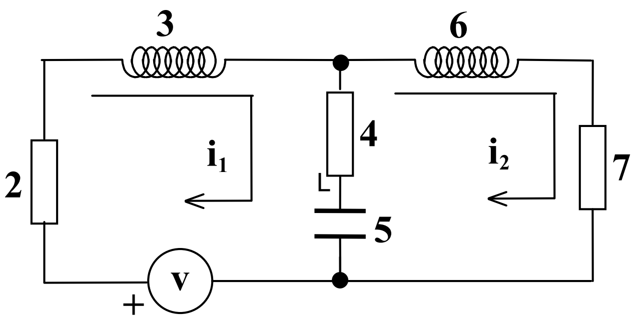
$$V_1(s) = \left(R^2Cs + 3R + \frac{1}{Cs}\right) \cdot Cs \cdot V_2(s)$$

$$V_1(s) = \left(R^2C^2s^2 + 3RCs + 1\right) \cdot V_2(s)$$

$$\boxed{\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1}}$$

EJERCICIO 1.5.

Modelar y calcular la función de transferencia $\frac{I_1(s)}{V(s)}$ del siguiente sistema:



$$2i_1(t) + 3\frac{di_1(t)}{dt} + 4[i_1(t) - i_2(t)] + \frac{1}{5}\int_{-\infty}^{t}[i_1(t) - i_2(t)]dt = V(s)$$

$$6\frac{di_2(t)}{dt} + 7i_2(t) + 4[i_2(t) - i_1(t)] + \frac{1}{5}\int_{-\infty}^{t}[i_2(t) - i_1(t)]dt = 0$$

Transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$[3s + 6 + 1/5s]I_1(s) + [-4 - 1/5s]I_2(s) = V(s)$$

$$[-4 - 1/5s]I_1(s) + [6s + 11 + 1/5s]I_2(s) = 0$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3s + 6 + 1/5s & -4 - 1/5s \\ -4 - 1/5s & 6s + 11 + 1/5s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

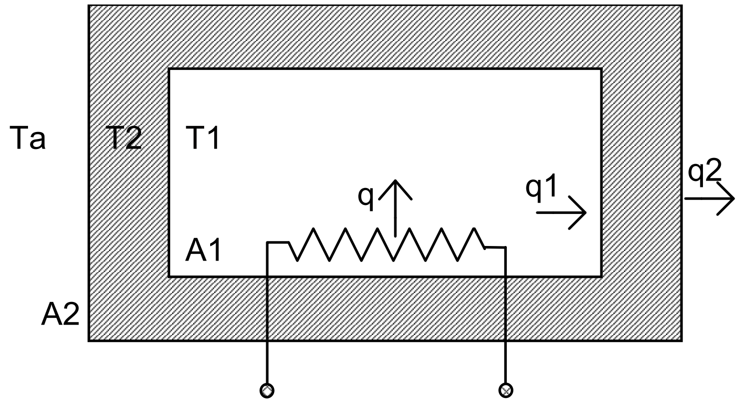
Resolviendo por Cramer:

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} V(s) & -4 - 1/5s \\ 0 & 6s + 11 + 1/5s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s + 6 + 1/5s & -4 - 1/5s \\ -4 - 1/5s & 6s + 11 + 1/5s \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{I_1(s) = \frac{(6s + 11 + 1/5s)V(s)}{[3s + 6 + 1/5s][6s + 11 + 1/5s] - [4 + (1/5s)]^2}}$$

EJERCICIO 1.6.

Modelar el sistema y calcular la función de transferencia $T_1(s)/Q(s)$ del sistema térmico de la figura siguiente.



El calor transmitido por convección:

$$q_1(t) = h_1 A_1 \left[T_1(t) - T_2(t)\right] = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_1}$$

$$q_2(t) = h_2 A_2 \left[T_2(t) - T_a(t)\right] = \frac{T_2(t) - T_a(t)}{R_2}$$

El calor que absorbe o cede un cuerpo:

$$q(t) = C\frac{dT(t)}{dt}; \quad C = mc_e;$$

Variación de calor en el interior:

$$C_1 \frac{dT_1(t)}{dt} = q - \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_1} \qquad (1)$$

La variación de calor en la pared:

$$C_2 \frac{dT_2(t)}{dt} = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_1} - \frac{T_2(t) - T_a(t)}{R_2} \qquad (2)$$

Tomando transformadas de (1) y (2) con condiciones iniciales nulas:

$$\left(R_1 C_1 s + 1\right) T_1(s) - T_2(s) = R_1 Q(s)$$

$$-R_2 T_1(s) + \left(R_1 R_2 C_2 s + R_1 + R_2\right) T_2(s) = R_1 T_a(s)$$

De forma matricial:

$$\begin{pmatrix} R_1 C_1 s + 1 & -1 \\ -R_2 & R_1 R_2 C_2 s + R_1 + R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 Q(s) \\ R_1 T_a(s) \end{pmatrix}$$

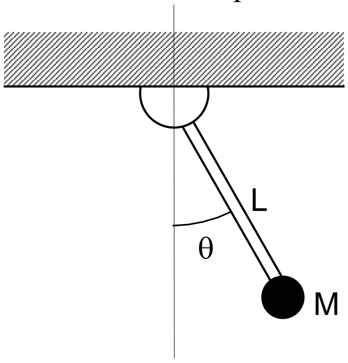
T_a es una perturbación ya que actúa como una entrada no controlable.

La función de transferencia buscada es:

$$\boxed{T_1(s) = \frac{R_1(R_1R_2C_2s + R_1 + R_2)Q(s) + R_1T_a(s)}{(R_1C_1s+1)(R_1R_2C_2s + R_1 + R_2) - R_2}}$$

EJERCICIO 1.7.

Modelar y calcular la función de transferencia del péndulo de la figura:



El momento que ejerce la masa será:

$$T(t) = MgLSen\theta(t)$$

Esta expresión relaciona el momento T con el ángulo de desviación respecto de la vertical θ. Esta relación viene expresada mediante una ecuación no lineal ya que dicho momento T depende del seno del ángulo θ.

Aplicando el desarrollo en serie de Taylor se obtiene una aproximación lineal de la función:

$$y = g(x)$$

$$y = g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots$$

Suficiente con los dos primeros términos:

$$y = g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} \quad ; \quad \Delta y = m\,\Delta x$$

Para el caso del péndulo con condiciones de equilibrio: $\theta_0 = 0^{\circ}$; $T_0 = 0$;

$$T = T_0 + \left.\frac{dT}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)$$

$$T(t) = MgL\theta(t)$$

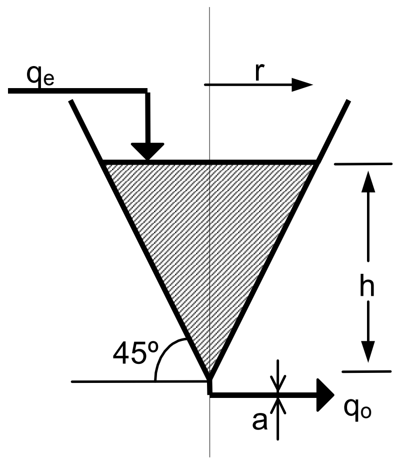
Ahora esta expresión ya es lineal, y tomando transformadas con condiciones iniciales nulas:

$$\boxed{\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{MgL}}$$

Aproximación que solo es válida para valores del ángulo muy pequeños.

EJERCICIO 1.8.

Modelar el sistema de nivel de líquido, cuya estructura viene definida en la figura siguiente, y calcular la función de transferencia $Q_0(s)/Q_e(s)$:



Volumen del cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h; \rightarrow r = h \rightarrow V(t) = \frac{1}{3}\pi h(t)^3;$

Velocidad de salida:

$$V_0(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

Caudal de salida:

$$q_0(t) = aV_0(t) = a\sqrt{2gh(t)}$$

Variación del volumen de agua:

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_e(t) - q_o(t) \quad \text{y} \quad \frac{dV(t)}{dt} = \pi h(t)^2 \frac{dh(t)}{dt}$$

Luego se tendrá:

$$\boxed{q_e(t) = \pi h(t)^2 \frac{dh(t)}{dt} + a\sqrt{2gh(t)}}$$

Esta ecuación es no lineal, ya que presenta valores cuadráticos de h. Se realizará una linealización por serie de Taylor.

En este caso para las condiciones de equilibrio (h_0, q_{e0}):

$$q_e(t) - q_{e0} = (h(t) - h_0)\left|\frac{dq_e(t)}{dh}\right|_{h=h_0}$$

$$\frac{dq_e(t)}{dh} = 2\pi h(t)\frac{dh(t)}{dt} + \pi h(t)^2 \frac{d}{dh}\left(\frac{dh(t)}{dt}\right) + \frac{a\sqrt{2g}}{2\sqrt{h(t)}}$$

$$\left|\frac{dq_e}{dh}\right|_{h=h_0} = 2\pi h_0 \frac{dh_0}{dt} + \pi h_0^{\,2} \frac{d}{dt} + \frac{a\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}}$$

$$q_e(t) - q_{e0} = \pi h_0^{\,2} \frac{d}{dt}\left[h(t) - h_0\right] + \frac{a\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}}\left[h(t) - h_0\right]$$

Llamando:

$$q_e(t) - q_{e0} = \delta q(t)$$
$$h(t) - h_0 = \delta h(t)$$

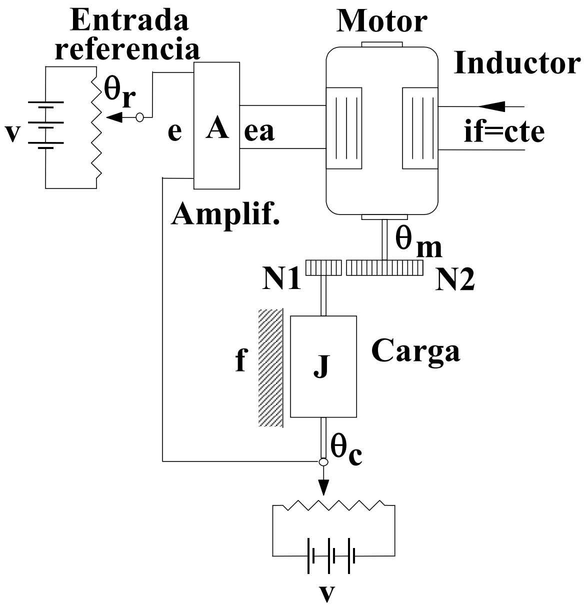
$$\delta h(t)' + \frac{a\sqrt{2g}}{2\pi h_0\sqrt{h_0}}\delta h(t) = \frac{1}{\pi h_0^{\,2}}\delta q(t)$$

Tomando transformadas con condiciones iniciales nulas:

$$\boxed{\frac{\delta H(s)}{\delta Q(s)} = \frac{1/\pi h_0^{\,2}}{\left(s + \dfrac{a\sqrt{2g}}{2\pi h_0\sqrt{h_0}}\right)}}$$

EJERCICIO 1.9.

Modelar el sistema de control de posición mostrado en la figura y obtener la función de transferencia entre el ángulo de la carga y el ángulo de referencia $\dfrac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)}$.



Datos del sistema:

θ_r = Desplazamiento angular del eje de referencia en radianes.
θ_c = Desplazamiento angular del eje de salida en radianes.
θ_m = Desplazamiento angular del eje del motor en radianes.
K_s = Ganancia del potenciómetro = 1 volt/rad.
A = Ganancia del amplificador = 200.
e = Señal de error (voltios).
e_a = Señal a la salida del amplificador.
e_m = Fuerza contraelectromotriz del motor.
R_a = Resistencia del inducido = 5 ohm.
L_a = Inductancia del inducido = 0.1 Hr.
K_3 = Cte de fuerza contraelectromotriz = 0.68 volt/(rad/sg).
K_2 = Cte del par motor = 0.68 newton*m/sg.
n = relación de engranes (N1/N2) = 1/10.
J_c = Momento de inercia de la carga = 0,136 N*m*sg.
f_c = Fricción Viscosa de la carga = 0.136 N*m/(rad/sg).
J_m = Momento de inercia del motor = 0.00136 N*m*sg.
f_m = Fricción Viscosa del motor = Despreciable.

- Detector de error potenciométrico:

$$e(t) = K_s\left[\theta_r(t) - \theta_c(t)\right] \rightarrow E(s) = \theta_r(s) - \theta_c(s)$$

- Amplificador:

$$e_a(t) = A \cdot e(t) \rightarrow E_a(s) = A \cdot E(s)$$

- Motor:

<u>Engrane</u>:

$$T_m(t)\cdot\theta_m(t) = T_c(t)\cdot\theta_c(t)$$

$$2\pi r_1\cdot\theta_m(t) = 2\pi r_2\cdot\theta_c(t)$$

$$N_1 r_2 = N_2 r_1$$

Luego, las principales relaciones del engrane son:

$$\boxed{\frac{T_m(t)}{T_c(t)} = \frac{\theta_c(t)}{\theta_m(t)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

<u>Ecuación mecánica del motor y de la carga</u>:

$$T_c(t) = J_c\frac{d^2\theta_c(t)}{dt^2} + f_c\frac{d\theta_c(t)}{dt}$$

Traduciéndolo al primario del engrane:

$$\frac{N_2}{N_1}T_m(t) = J_c\left(\frac{N_1}{N_2}\right)\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + f_c\left(\frac{N_1}{N_2}\right)\frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$T_m(t) = J_c\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + f_c\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

Donde:

$J_T = J_c\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$ y $f_T = f_c\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$ son, respectivamente, el momento de inercia y la fuerza de rozamiento que se ven desde el primario del engrane.

Luego, la ecuación mecánica del motor y carga queda:

$$T_m(t) = J_T\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + f_T\frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

Y tomando transformadas:

$$T_m(s) = \left(J_T\cdot s^2 + f_T\cdot s\right)\theta_m(s) \qquad (1)$$

<u>Ecuaciones eléctricas</u>:

$$\phi(t) = K_f\cdot I_f(t)$$

$$T_m(t) = K_a K_f I_f I_a(t) \rightarrow \boxed{T_m(s) = K_2 I_a(s)} \qquad (2)$$

$$e_m(t) = K_3 \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad \rightarrow \boxed{E_m(s) = K_3 s \theta_m(s)} \tag{3}$$

$$e_a(t) = R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + e_m(t) \rightarrow e_a(t) = R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + K_3 \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$E_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + K_3 s \theta_m(s)$$

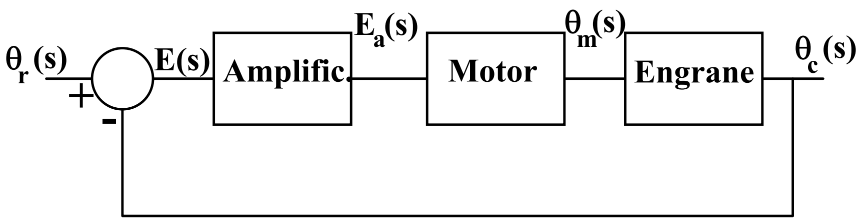
$$I_a(s) = \frac{E_a(s) - K_3 s \theta_m(s)}{(R_a + L_a s)} \tag{4}$$

Desde las expresiones (1), (2) y (4):

$$(J_T \cdot s^2 + f_T \cdot s)\theta_m(s) = K_2 \frac{E_a(s) - K_3 s \theta_m(s)}{(R_a + L_a s)}$$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_2}{(J_T \cdot s^2 + f_T \cdot s)(R_a + L_a s) + K_2 K_3 s}$$

El diagrama de bloques del sistema:



Función de transferencia de lazo abierto:

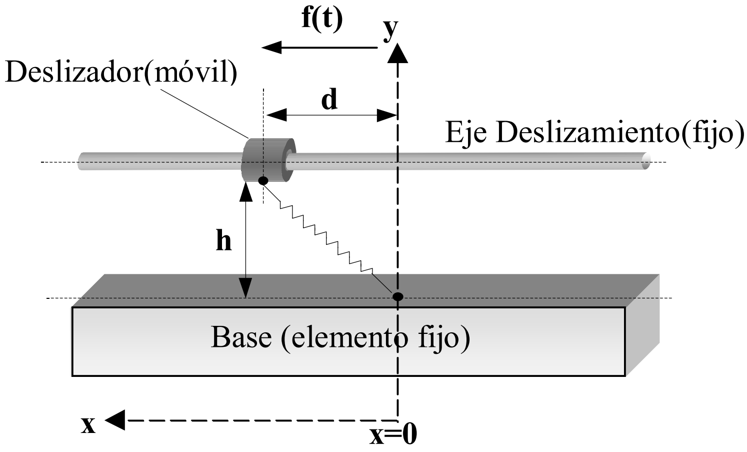
$$G(s) = \frac{50000}{s(s^2 + 50.5s + 1725)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado:

$$\boxed{M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{50000}{s^3 + 50.5s^2 + 1725s + 50000}}$$

EJERCICIO 1.10.

Para el sistema que se muestra en la figura, y que se encuentra en la posición de reposo, obtener la función de transferencia que relaciona la fuerza aplicada con el desplazamiento.



Datos del sistema:

Constante elástica del muelle: K_m=100
Constante de rozamiento: b=10
Masa del deslizador: M=3
Distancia Base - Deslizador: h=3
Desplazamiento en x, en reposo: d=1

$$\sum F_x = M \cdot a$$

$$f(t) - f_b(t) - f_{m_x}(t) = M \cdot a(t)$$

$$f_m(t) = K_m(l(t) - l_o)$$

$$l(t) = \sqrt{h^2 + x(t)^2}$$

$$f_m(t) = K_m(\sqrt{h^2 + x(t)^2} - \sqrt{10})$$

$$f_{m_x}(t) = f_m \cdot \operatorname{sen}\theta(t) = f_m(t) \cdot \frac{x(t)}{\sqrt{h^2 + x(t)^2}}$$

Luego:

$$f(t) = M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dx(t)}{dt} + K_m \cdot \left(\sqrt{h^2 + x(t)^2} - \sqrt{10}\right) \cdot \frac{x(t)}{\sqrt{h^2 + x(t)^2}}$$

$$f(t) = M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dx(t)}{dt} + K_m \cdot \left(x(t) - \frac{x(t)\sqrt{10}}{\sqrt{h^2 + x(t)^2}} \right)$$

Esta ecuación tiene una parte no lineal. Llamando a la parte no lineal:

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

Haciendo una aproximación lineal mediante el desarrollo en serie de Taylor en torno al punto de funcionamiento:

$$g(x) \approx g_o(x_0) + \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0)$$

$$\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{\sqrt{h^2 + x^2} - (x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{h^2 + x^2}})}{h^2 + x^2}\right|_{x=1} = \frac{\sqrt{10} - \frac{1}{\sqrt{10}}}{10} = \frac{9}{10\sqrt{10}}$$

$$g_0(x_0) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$g(x) \approx \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{9}{10\sqrt{10}}\delta_x$$

A partir de este punto se trabaja con incrementos de las variables.

$$f(t) = M \cdot \frac{d^2\delta_x(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{d\delta_x(t)}{dt} + K_m \cdot \left(\delta_x(t) - \sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{9}{10\sqrt{10}}\delta_x(t)\right)\right)$$

$$f(t) = M \cdot \frac{d^2\delta_x(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{d\delta_x(t)}{dt} + K_m\delta_x(t) - K_m - \frac{9}{10}K_m\delta_x(t)$$

llamando $\delta_f(t) = f(t) + K_m$

$$\delta_f(t) = M \cdot \frac{d^2\delta_x(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{d\delta_x(t)}{dt} + K_m\delta_x(t) - \frac{9}{10}K_m\delta_x(t)$$

Tomando transformadas con condiciones iniciales nulas:

$$\Delta F(s) = \left(M \cdot s^2 + b \cdot s + K_m - \frac{9}{10}K_m\right)\Delta X(s)$$

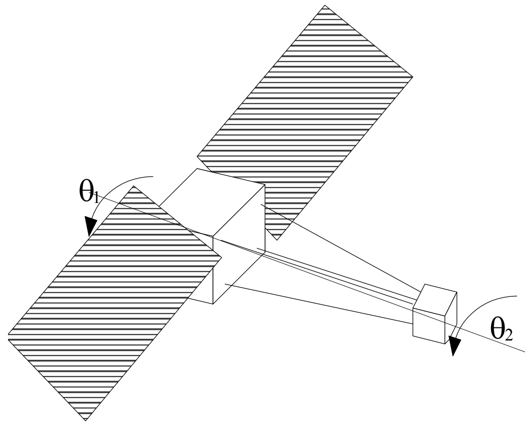
Sustituyendo los valores de M, b y K_m:

$$\Delta F(s) = \left(3 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 10\right)\Delta X(s)$$

$$\boxed{\frac{\Delta X(s)}{\Delta F(s)} = \frac{1}{3 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 10}}$$

EJERCICIO 1.11.

La figura muestra, de forma básica, un satélite de reconocimiento astronómico. En ella se puede ver cómo este satélite está formado por dos bloques (unidos por conexiones no rígidas), siendo el mayor de estos bloques el que contiene el sistema de comunicación, sistema de impulsión y suministradores de alimentación, mientras que el otro bloque sólo contiene sensores que deben estar aislados de las vibraciones de primer bloque.



Las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento dinámico entre el par para posicionamiento, ejercido en el primer bloque, y la posición del bloque de sensores, son las siguientes:

$$J_1\theta_1'' + d(\theta_1' - \theta_2') + k(\theta_1 - \theta_2) = T$$
$$J_2\theta_2'' + d(\theta_2' - \theta_1') + k(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

siendo:

$$J_1 = 10;\ J_2 = 0.1;\ K = 1.78;\ d = 0.6$$

Como para el buen funcionamiento de los sensores del satélite es necesario que el movimiento de su posicionamiento sea muy suave, es necesario diseñar un sistema de control para que el par de orientación aplicado al bloque mayor no haga que los sensores se muevan de forma brusca.

Calcular:

a) Función de transferencia entre el par aplicado y el ángulo del bloque de sensores (θ_2).

b) Si se dispone de un sensor de posición cuya función de transferencia es la unidad y un elemento actuador cuya función de transferencia entre la señal de control u(t) y el par obtenido T(t) es una cte. de valor 1.666, dibujar el diagrama de bloques del sistema para control de la posición θ_2, incluyendo un bloque para un controlador en cascada.

---

a) Función de transferencia entre el par aplicado y el ángulo del bloque de sensores θ_2

$$J_1\theta_1''(t) + d\left[\theta_1'(t) - \theta_2'(t)\right] + k\left[\theta_1(t) - \theta_2(t)\right] = T(t)$$

$$J_2\theta_2''(t) + d\left[\theta_2'(t) - \theta_1'(t)\right] + k\left[\theta_2(t) - \theta_1(t)\right] = 0$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$J_1 \cdot s^2 \cdot \theta_1(s) + d \cdot s \cdot (\theta_1(s) - \theta_2(s)) + k \cdot (\theta_1(s) - \theta_2(s)) = T(s)$$
$$J_2 \cdot s^2 \cdot \theta_2(s) + d \cdot s \cdot (\theta_2(s) - \theta_1(s)) + k \cdot (\theta_2(s) - \theta_1(s)) = 0$$

$$J_2 \cdot s^2 \cdot \theta_2(s) + d \cdot s \cdot \theta_2(s) + k \cdot \theta_2(s) = d \cdot s \cdot \theta_1(s) + k \cdot \theta_1(s) = 0$$
$$(J_2 \cdot s^2 + d \cdot s + k) \cdot \theta_2(s) = (d \cdot s + k) \cdot \theta_1(s)$$

$$\theta_1(s) = \frac{J_2 \cdot s^2 + d \cdot s + k}{d \cdot s + k} \cdot \theta_2(s)$$

$$J_1 \cdot s^2 \cdot \theta_1(s) + d \cdot s \cdot \theta_1(s) + k \cdot \theta_1(s) = T(s) + d \cdot s \cdot \theta_2(s) + k \cdot \theta_2(s)$$
$$(J_1 \cdot s^2 + d \cdot s + k) \cdot \theta_1(s) = T(s) + (d \cdot s + k) \cdot \theta_2(s)$$

$$(J_1 \cdot s^2 + d \cdot s + k) \cdot \frac{J_2 \cdot s^2 + d \cdot s + k}{d \cdot s + k} \cdot \theta_2(s) = T(s) + (d \cdot s + k) \cdot \theta_2(s)$$

$$\left[\frac{(J_1 \cdot s^2 + d \cdot s + k)(J_2 \cdot s^2 + d \cdot s + k)}{d \cdot s + k} - (d \cdot s + k)\right] \cdot \theta_2(s) = T(s)$$

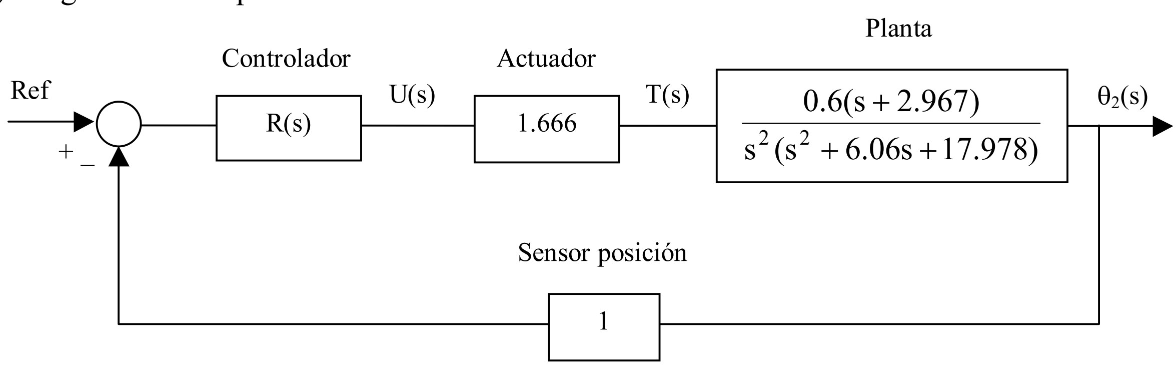
$$\frac{\begin{array}{l} J_1J_2 \cdot s^4 + J_1 d \cdot s^3 + J_1 k \cdot s^2 + J_2 d \cdot s^3 + d^2 s^2 + kd \cdot s + \\ J_2 k \cdot s^2 + kd \cdot s + k^2 - (d^2 s^2 + k^2 + 2dk \cdot s) \end{array}}{d \cdot s + k} = \frac{T(s)}{\theta_2(s)}$$

$$\frac{J_1 J_2 \cdot s^4 + (J_1 + J_2) d \cdot s^3 + (J_1 + J_2) k \cdot s^2}{ds + k} = \frac{T(s)}{\theta_2(s)}$$

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{0.6s + 1.78}{s^2(s^2 + 6.06s + 17.978)}$$

$$\boxed{\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{0.6(s + 2.967)}{s^2((s + 3.03)^2 + 2.966^2)}}$$

b) Diagrama de bloques.



EJERCICIO 1.12.

El sistema de la figura 1 representa el sistema de control de posición de un émbolo, formado por los siguientes elementos:

a) Bomba de presión controlada por la tensión v(t) que genera la presión p(t), tal que la función de transferencia puede representarse como un sistema de primer orden con ganancia 1.2 y constante de tiempo 2.
b) Émbolo de 5 Kg de masa M con una área A de contacto con el fluido de 0.25 m^2. Se mueve por la carcasa, empujado por la fuerza debida a la presión, con un rozamiento viscoso B de 2.5 N/m/s.
c) El émbolo está en contacto con un cuerpo elástico con cte. elástica k=1 N/m.
d) Transductor de posición x(t) a tensión c(t) lineal con salida de 0V con 0 metros de desplazamiento y salida 10V con 1 m de desplazamiento.

La figura 2 representa un modelo simplificado de los elementos b) y c)

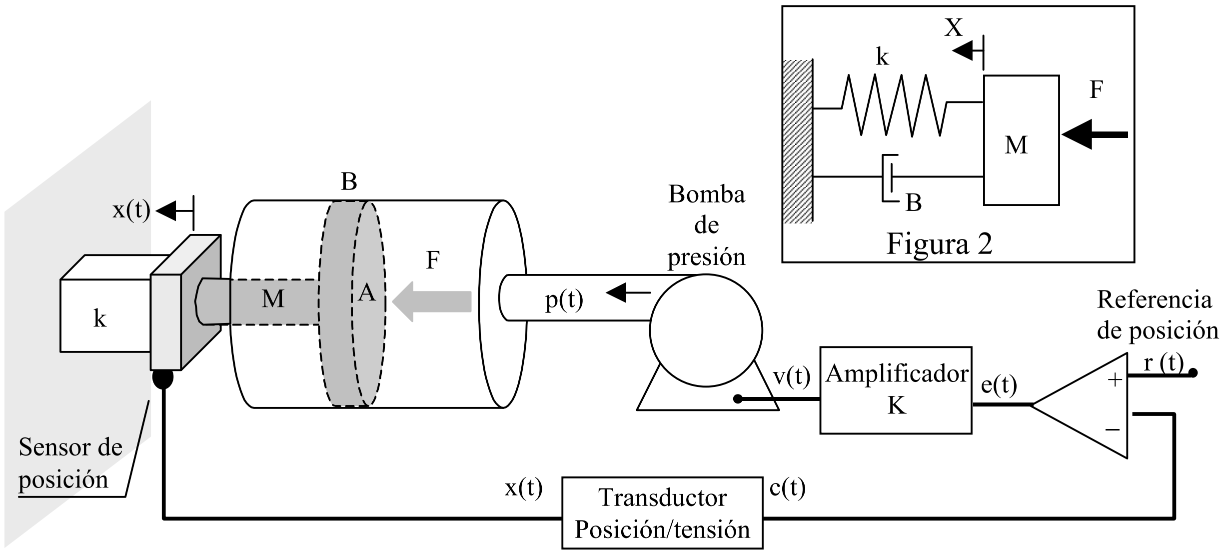


Figura 1

Obtener la función de transferencia $\frac{X(s)}{P(s)}$ y dibujar el diagrama de bloques del sistema.

El modelado del sistema será:

$$F(t) = P(t)\cdot A$$

Aplicando T. de Laplace: $$F(s) = A\cdot P(s)$$

$$\sum F = m\cdot a \qquad F(t) - k\cdot x(t) - B\frac{dx(t)}{dt} = M\cdot\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$F(t) = M\cdot\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + k\cdot x(t)$$

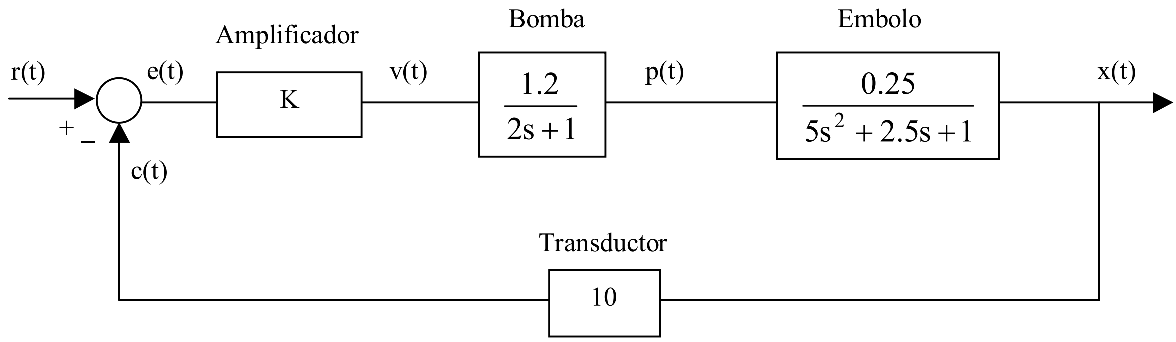
Aplicando transformadas de Laplace:

$$F(s) = (Ms^2 + Bs + k)X(s)$$

$$A\cdot P(s) = (Ms^2 + Bs + k)X(s)$$

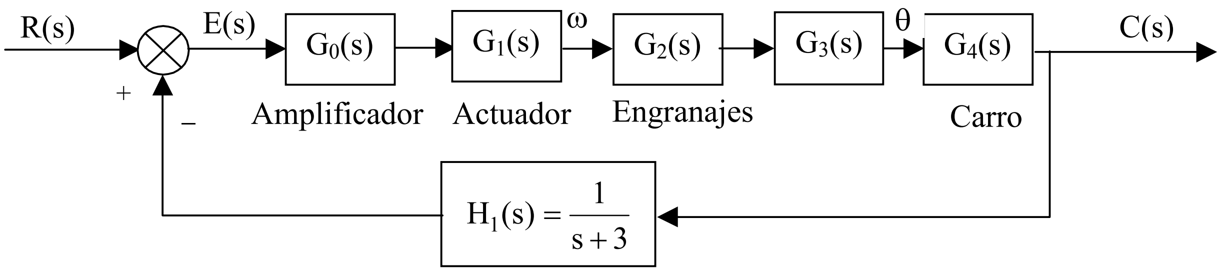
$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{A}{Ms^2 + Bs + k}$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{0.25}{5s^2 + 2.5s + 1}}$$



EJERCICIO 1.13.

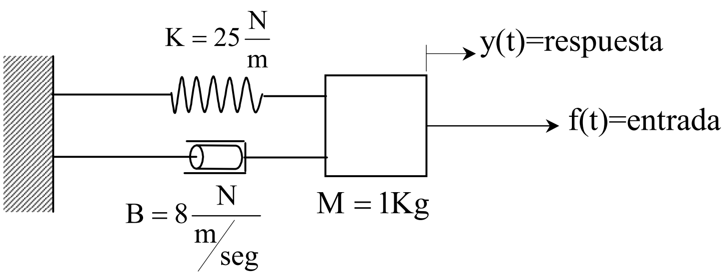
Un sistema de control para el posicionamiento automático del carro longitudinal de un torno paralelo viene representado por el diagrama de bloques siguiente:



El amplificador tiene una ganancia K = 200.

$G_1(s)$ corresponde a la función de transferencia de un motor de corriente continua controlado por campo de excitación, tal que $T_e + T_m = 5/6$ y $T_e \cdot T_m = 1/6$ siendo T_e la constante de tiempo eléctrica, T_m la constante de tiempo mecánica del motor y la ganancia estática del motor $K_m = 1/6$.

La rueda conductora acoplada al eje del motor tiene 20 dientes y la conducida 40. Esta última engrana con la cremallera del torno que permite el movimiento del carro longitudinal, pudiéndose asemejar este sistema al mostrado en la figura:



cuya función de transferencia es $\frac{Y(s)}{F(s)}$.

1. Obtener las funciones de transferencia de cada uno de los elementos que forman el sistema de control.

2. Calcular la función de transferencia de lazo abierto del sistema.

3. Calcular la función de transferencia de lazo cerrado del sistema.

Se calcula inicialmente el valor de cada uno de los bloques que forman el sistema de control:

- Amplificador:

$$G_0(s) = 200$$

- Actuador $G_1(s)$:
  La función de transferencia del motor de C.C. controlado por campo de excitación es:

$$G_1(s) = \frac{K_m}{(T_e s+1)(T_m s+1)} = \frac{K_m}{(T_e \cdot T_m)s^2 + (T_e + T_m)s + 1}$$

sustituyendo los valores que nos dan, nos quedará:

$$G_1(s) = \frac{1/6}{\frac{1}{6}s^2 + \frac{5}{6}s + 1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

- Engranajes $G_2(s)$:
  La relación de transmisión viene dada por la relación entre el número de dientes de la rueda conductora y el número de dientes de la rueda conducida, luego:

$$\rho = \frac{z_1}{z_2} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

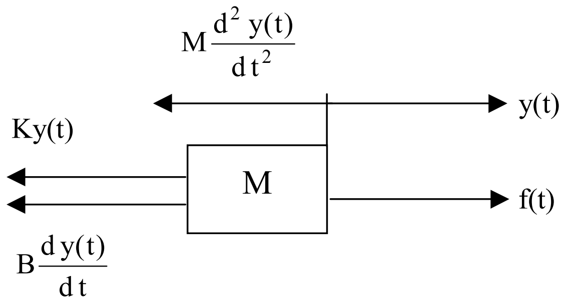
luego:

$$G_2(s) = \frac{1}{2}$$

- $G_3(s)$:
  La entrada del bloque es la velocidad angular y la salida es el desplazamiento angular, luego la entrada es la derivada de la salida, luego el bloque será un elemento integrador, por lo que:

$$G_3(s) = \frac{1}{s}$$

- Carro $G_4(s)$:
  Como se asemeja a la función de transferencia del sistema mecánico, aislaremos la masa:



luego:

$$f(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + K\,y(t)$$

tomando transformadas de Laplace y teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son nulas:

$$F(s) = Ms^2Y(s) + BsY(s) + KY(s)$$

sustituyendo valores y despejando:

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1}{s^2 + 8s + 25}$$

luego:

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 25}$$

b) Función de transferencia en lazo abierto:

$$\text{F.T.L.A.} = G(s) = G_0(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)\cdot G_4(s)\cdot H_1(s)$$

$$G(s) = 200\cdot\frac{1}{s^2+5s+6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+8s+25}\cdot\frac{1}{s+3} = \frac{200}{2s(s+3)(s+2)(s^2+8s+25)(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{100}{s(s+2)(s+3)^2(s^2+8s+25)}$$

c) Función de transferencia en lazo cerrado:

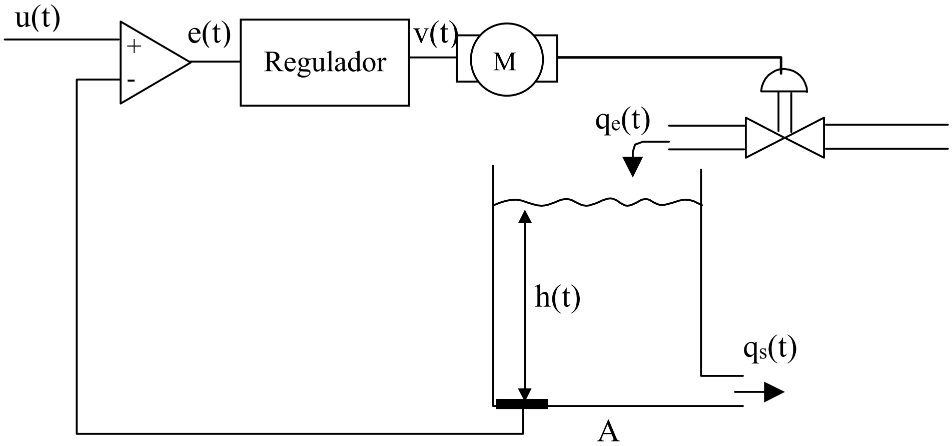
$$\text{F.T.L.C.} = M(s) = \frac{G_0(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)\cdot G_4(s)}{1 + G_0(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)\cdot G_4(s)\cdot H_1(s)}$$

$$M(s) = \frac{\dfrac{100}{s(s+2)(s+3)(s^2+8s+25)}}{1 + \dfrac{100}{s(s+2)(s+3)(s^2+8s+25)}\cdot\dfrac{1}{s+3}} = \frac{100(s+3)}{s(s+2)(s+3)^2(s^2+8s+25)+100}$$

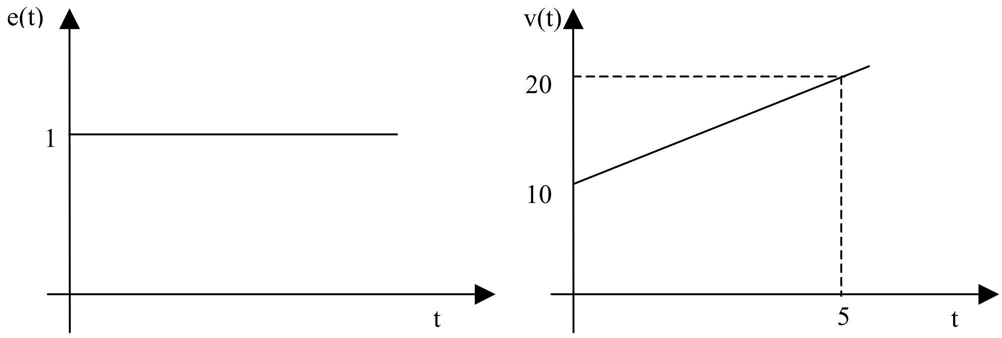
$$\boxed{M(s) = \frac{100(s+3)}{s^6 + 16s^5 + 110s^4 + 386s^3 + 669s^2 + 450s + 100}}$$

EJERCICIO 1.14.

La figura representa un sistema de control de la altura de un líquido en un depósito. Ésta es captada mediante un sensor de presión de constante K_m=1 V/m. La altura en régimen permanente se fija mediante una tensión de referencia u(t).



La señal de error e(t) alimenta un regulador. Las siguientes figuras muestran para una entrada e(t) la respuesta v(t) del regulador.



La señal de salida del regulador v(t) actúa sobre una válvula motorizada que regula el caudal de entrada al depósito, según la ecuación:

$$q_e(t) = 10 \cdot v(t)$$

Dibujar el diagrama de bloques del sistema, representando las relaciones entre todas las variables del mismo y obteniendo las ecuaciones que determinan el comportamiento de la planta.

Datos: Altura de equilibrio del depósito: h_0 = 4m
Radio de la tubería de salida: r_s = 0.05m
Superficie de la base del depósito: A = 1 m^2.

La variación del volumen del líquido es igual a la diferencia entre el caudal de entrada y salida:

$$\left.\begin{array}{l} dV(t) = q_e(t) - q_s(t) \\ \\ V(t) = A \cdot h(t) \end{array}\right\} \quad A \cdot \frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - q_s(t)$$

donde:

V: volumen del depósito.
A: área de la base del depósito.
q_e: caudal de entrada.
q_s: caudal de salida.

Y el caudal de salida:

$$\left.\begin{array}{l} v_s(t)=\sqrt{2gh(t)} \\ \\ q_s(t)=a_s\cdot v_s(t) \end{array}\right\} \quad q_s(t)=a_s\sqrt{2gh(t)}$$

donde v_s: velocidad de salida del fluido

En esta expresión puede verse que el caudal de salida depende de forma no lineal de la altura del líquido en el depósito. Haciendo una linealización mediante la serie de Taylor se tiene:

$$q_s(t)=q_{s0}+\left.\frac{dq_s}{dh}\right|_{h=h_0}(h(t)-h_0)$$

$$q_s(t)-q_{s0}=\left.\frac{dq_s}{dh}\right|_{h=h_0}(h(t)-h_0)$$

$$q_s(t)-q_{s0}=a_s\frac{2g}{2\sqrt{2gh_0}}(h(t)-h_0)$$

Y utilizando incrementos de las variables entorno al punto de funcionamiento se tiene:

$$\Delta q_s(t)=\frac{a_s g}{\sqrt{2gh_0}}\Delta h(t)$$

$$A\cdot\frac{d\Delta h(t)}{dt}=\Delta q_e(t)-\Delta q_s(t)$$

Aplicando transformadas de Laplace:

$$\Delta Q_s(s)=\frac{a_s g}{\sqrt{2gh_0}}\Delta H(s)$$

$$A\cdot s\cdot\Delta H(s)=\Delta Q_e(s)-\Delta Q_s(s)$$

Y sustituyendo los valores:

$h_0 = 4m$
$r_s = 0.05m$
$a_s=\pi\cdot r^2=\pi\cdot 0.05^2=0.008m^2$

Para pequeñas variaciones en la altura del líquido se considera por tanto que el caudal de salida es:

$$\Delta Q_s(s) = \frac{0.008 \cdot 9.8}{\sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 4}} \Delta H(s)$$

$$\Delta Q_s(s) = 0.009 \Delta H(s)$$

Y la altura del líquido es:

$$s \cdot \Delta H(s) = \Delta Q_e(s) - \Delta Q_s(s)$$

$$\Delta H(s) = \left[\Delta Q_e(s) - \Delta Q_s(s)\right] \frac{1}{s}$$

Ecuación del regulador:

La entrada al regulador es: $e(t)=1$

Y aplicando la transformada de Laplace a la entrada: $E(s) = \frac{1}{s}$

La salida del regulador para esa entrada es: $v(t) = 10 + \frac{20-10}{5} t = 10 + 2t$

Y aplicando la transformada de Laplace: $V(s) = \frac{10}{s} + \frac{2}{s^2}$

La función de transferencia del regulador será:

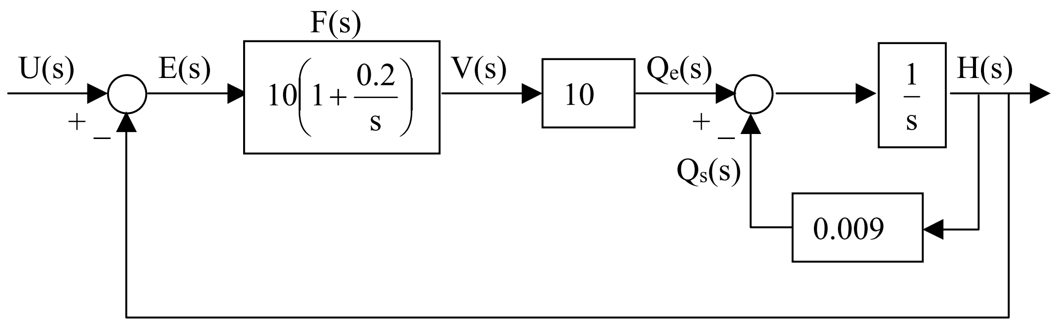
$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{\frac{10}{s} + \frac{2}{s^2}}{\frac{1}{s}} = 10 + \frac{2}{s}$$

$$\boxed{\frac{V(s)}{E(s)} = 10\left(1 + \frac{0.2}{s}\right)}$$

Válvula motorizada:

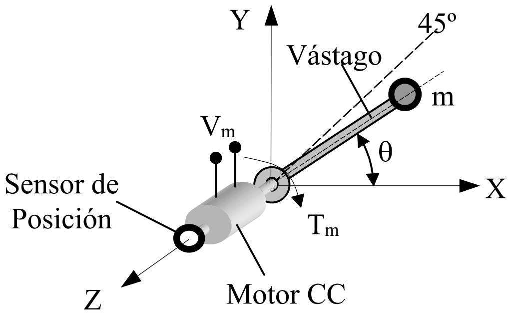
$$\boxed{Q_e(s) = 10V(s)}$$

Luego el diagrama de bloques quedará:

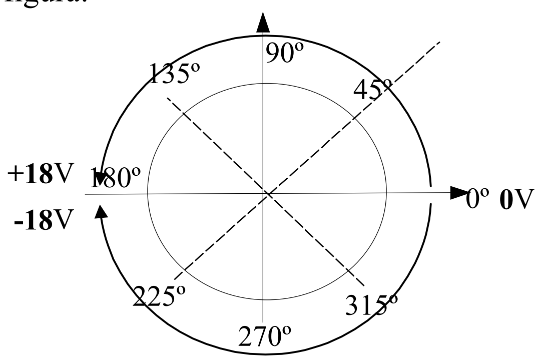


EJERCICIO 1.15.

En la figura se muestra un péndulo invertido para el cual se desea controlar su posición angular:



Como se puede observar, está formado por un motor de corriente continua (el cual está controlado por armadura y, por tanto, la alimentación del campo magnético de excitación permanece constante), un sensor de posición que se ha ajustado de forma que proporcione la salida que se muestra en la figura:



y un regulador que se encarga de restar la señal de realimentación de la de consigna y aplicar un control proporcional de ganancia A.

Obtener el modelo linealizado del sistema, sabiendo que el punto de funcionamiento está en 45º. Dibujar el diagrama de bloques del sistema, indicando el valor de la señal que se encuentra en cada punto cuando la posición del péndulo corresponde al punto de funcionamiento. Considerando L_a despreciable, calcular el valor de tensión que se debe proporcionar a la entrada para que el sistema permanezca estabilizado a 45º.

Parámetro	Valor (Unidades en S.I.)
R_a : Resistencia del inducido	1
L_a : Inductancia del inducido	0.01
K_3 : Cte. de fuerza contraelectromotriz	0.68
K_2 : Cte. del par motor	0.68
J_c : Momento de inercia de la carga	$m \cdot L^2$
f_c : Fricción viscosa de la carga	0
J_m : Momento de inercia del motor	0
A : Ganancia del amplificador	150
m : Masa del péndulo	1
M : Masa del brazo	0
L : Longitud del brazo	1

1. Modelo linealizado del sistema.

Ecuaciones mecánicas:

$$T_m(t) = K_2 \cdot i_a(t)$$

$$T_m(t) = J_T \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + f_T \frac{d\theta(t)}{dt} + T_p(t)$$

$$T_p(t) = m \cdot g \cdot L \cdot \cos\theta(t)$$

Esta última ecuación no es lineal. Se linealizará mediante el desarrollo de Taylor.

$$y \approx y(x_0) + (x - x_0) \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Que en este caso puede escribirse como:

$$T_p(t) \approx T_p(\theta_0) + (\theta(t) - \theta_0) \left.\frac{dT_p(t)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0}$$

$$T_p(45^o) = 1 \cdot 9.8 \cdot 1 \cdot \cos 45^o = 6.93$$

$$\left.\frac{dT_p}{d\theta}\right|_{\theta=45^o} = -m \cdot g \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta\big|_{\theta=45^o} = -m \cdot g \cdot L \cdot \operatorname{sen} 45^o = -1 \cdot 9.8 \cdot 1 \cdot 0.707 = -6.93$$

$$T_p(t) \approx 6.93 + (\theta(t) - 45^o)(-6.93)$$

$$T_p(t) - 6.93 = -6.93(\theta(t) - 45^o)$$

Trabajando ahora con variables de desviación la ecuación quedará como:

$$\delta T_p(t) = -6.93 \cdot \delta\theta(t)$$

Si se representan todas las ecuaciones anteriores mediante variables de desviación respecto del punto de funcionamiento se tiene:

$$\delta T_m = K_2 \cdot \delta i_a$$

$$\delta T_m = J_T \frac{d^2\delta\theta}{dt^2} + f_T \frac{d\delta\theta}{dt} + \delta T_p$$

$$\delta T_p = -6.93 \cdot \delta\theta$$

Y aplicando transformadas de Laplace:

$$\boxed{\Delta T_m(s) = K_2 \cdot \Delta I_a(s)}$$

$$\boxed{\Delta T_m(s) = (J_T s^2 + f_T s)\Delta\theta(s) + \Delta T_p(s)}$$

$$\boxed{\Delta T_p(s) = -6.93 \cdot \Delta\theta(s)}$$

<u>Ecuaciones eléctricas:</u>

$$v_m(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_m(t)$$

$$e_m(t) = K_3 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Trabajando con variables de desviación la ecuación quedará como:

$$\delta v_m(t) = R_a \cdot \delta i_a(t) + L_a \frac{d\delta i_a(t)}{dt} + \delta e_m(t)$$

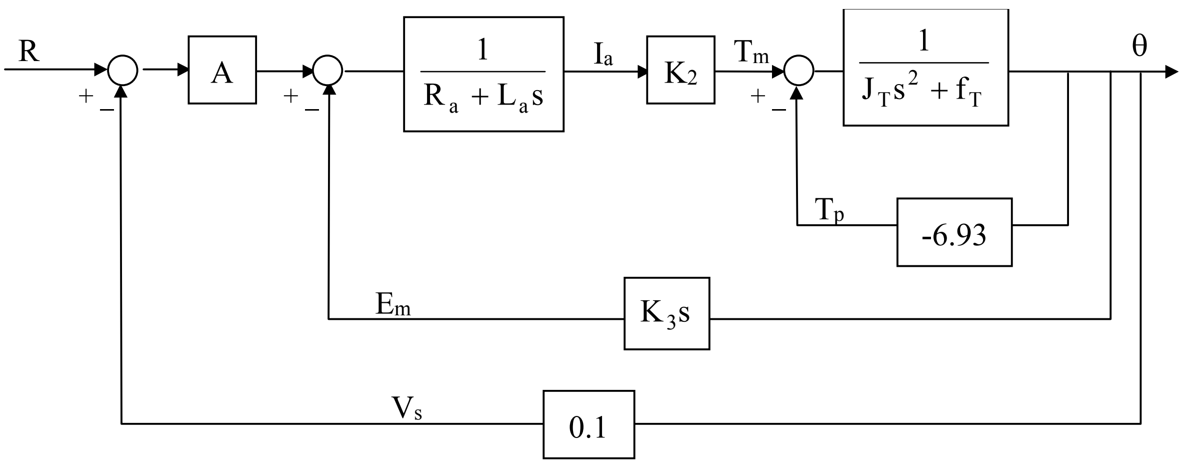
$$\delta e_m(t) = K_3 \cdot \frac{d\delta\theta(t)}{dt}$$

Aplicando transformadas de Laplace:

$$\boxed{\Delta V_m(s) = (R_a + L_a s) \cdot \Delta I_a(s) + \Delta E_m(s)}$$

$$\boxed{\Delta E_m(s) = K_3 s \cdot \Delta\theta(s)}$$

Con las expresiones obtenidas se puede dibujar el diagrama de bloques que relaciona las variables:



Operando con dichas ecuaciones o moviendo bloques en el diagrama puede obtenerse un diagrama de bloques más simplificado.

Uniendo las tres ecuaciones mecánicas resultantes:

$$K_2 \cdot \Delta I_a(s) = (J_T s^2 + f_T s)\Delta\theta(s) - 6.93 \cdot \Delta\theta(s)$$

$$K_2 \cdot \Delta I_a(s) = (J_T s^2 + f_T s - 6.93)\Delta\theta(s)$$

$$\boxed{\Delta\theta(s) = \frac{K_2}{J_T s^2 + f_T s - 6.93} \cdot \Delta I_a(s)}$$

Y uniendo las dos ecuaciones eléctricas:

$$\Delta V_m(s) = (R_a + L_a s) \cdot \Delta I_a + K_3 s \Delta\theta(s)$$

$$\boxed{\Delta I_a = \frac{\Delta V_m(s) - K_3 s \Delta\theta(s)}{R_a + L_a s}}$$

Uniendo la ecuación mecánica y eléctrica resultante:

$$\Delta\theta(s) = \frac{K_2}{J_T s^2 + f_T s - 6.93} \cdot \frac{\Delta V_m(s) - K_3 s \Delta\theta(s)}{R_a + L_a s}$$

$$\Delta\theta(s) = \frac{K_2 \Delta V_m(s) - K_2 K_3 s \Delta\theta(s)}{(J_T s^2 + f_T s - 6.93)(R_a + L_a s)}$$

$$(J_T s^2 + f_T s - 6.93)(R_a + L_a s)\Delta\theta(s) = K_2 \Delta V_m(s) - K_2 K_3 s \Delta\theta(s)$$

$$\left[(J_T s^2 + f_T s - 6.93)(R_a + L_a s) + K_2 K_3 s\right] \Delta\theta(s) = K_2 \Delta V_m(s)$$

$$\boxed{\Delta\theta(s) = \frac{K_2 \cdot \Delta V_m(s)}{(J_T s^2 + f_T s - 6.93)(R_a + L_a s) + K_2 K_3 s}}$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

El momento de inercia equivalente J_T y el coeficiente de fricción viscosa equivalente f_T referidos al eje del motor son:

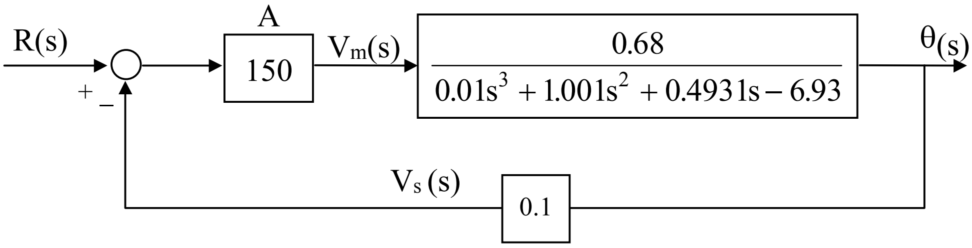
$$J_T = J_m + J_c = J_m + m \cdot L^2 = 0 + 1 = 1$$

$$f_T = f_m + f_c = 0.1 + 0 = 0.1$$

$$\Delta\theta(s) = \frac{0.68 \cdot \Delta V_m(s)}{(s^2 + 0.1s - 6.93)(1 + 0.01s) + 0.4624s}$$

$$\boxed{\Delta\theta(s)=\frac{0.68\cdot\Delta V_m(s)}{0.01s^3+1.001s^2+0.4931s-6.93}}$$

Diagrama de bloques del sistema de control:



El valor de tensión que se debe proporcionar a la entrada para que el sistema permanezca estabilizado a 45º será:

Cuando esté estabilizado a 45º:

$$\delta\theta=0 \qquad \theta=45^{o}$$

$$T_p=m\cdot g\cdot L\cdot\cos\theta=1\cdot 9.8\cdot 1\cdot 0.707=6.93N\cdot m$$

$$\delta T_p=-6.93\cdot\delta\theta=0 \qquad T_m=T_p=6.93N\cdot m$$

$$\delta I_a=0 \qquad I_a=\frac{T_m}{K_2}=10.2A$$

En esta posición:

$$e_m=0$$

$$V_m=R_a\cdot i_a+L_a\frac{di_a}{dt}$$

Si consideramos $L_a=0$ entonces:

$$V_m=R_a\cdot i_a=1\cdot 10.2=10.2V$$

Y el error:

$$e=\frac{V_m}{A}=\frac{10.2}{150}=0.068$$

El valor que llega de la realimentación al comparador será:

$$v_c=\theta\cdot 0.1=4.5V$$

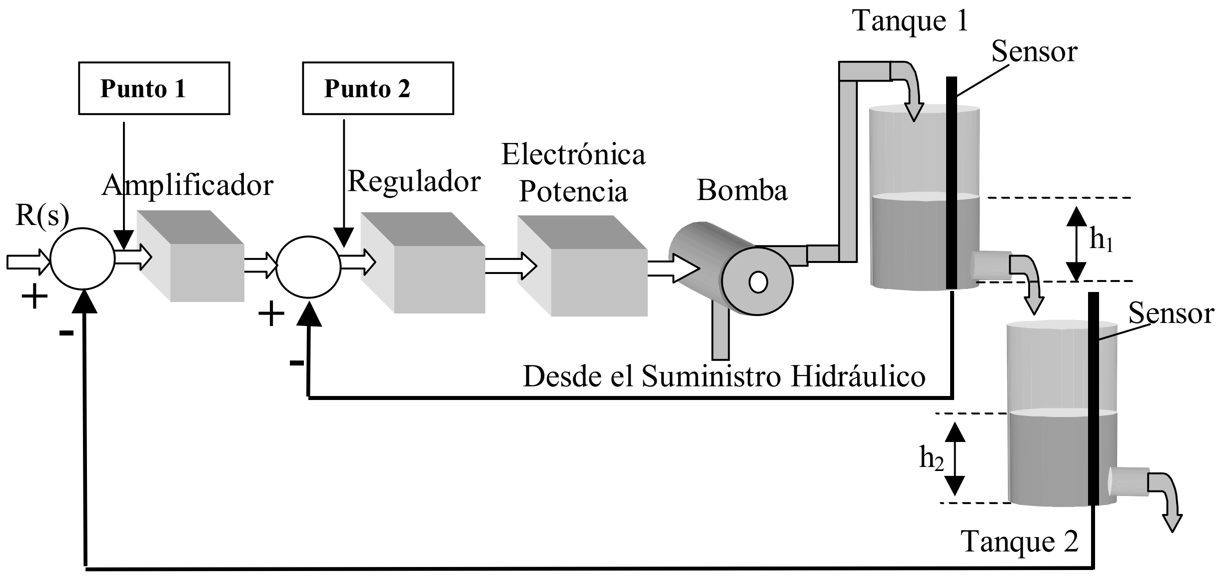
La entrada será:

$$e=R-b$$

$$R=e+v_c=0.068+4.5=4.568V$$

EJERCICIO 1.16.

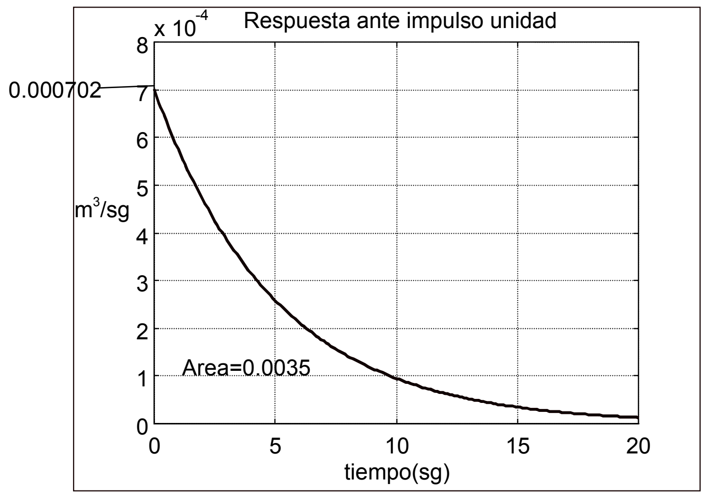
Se desea controlar el nivel de dos depósitos de agua idénticos. Para ello se ha utilizado un montaje como el que se observa en la figura siguiente:



El objetivo del sistema es mantener constante el nivel de los depósitos.

Para ello se emplean sensores de nivel que permiten obtener una medida de la altura del agua, siendo su función de transferencia igual a 1Volt/m. De igual forma, la función de transferencia de la electrónica de potencia y del amplificador es 1Volt/Volt.

Como no se conoce la función de transferencia del conjunto motor CC - turbina, se realiza un experimento introduciendo una entrada impulso unidad al sistema y obteniendo una respuesta como la que se muestra en la figura:



Por otro lado la función de transferencia del regulador es la siguiente:

$$C(s) = 1000(s + 0.01)$$

Obtener la función de transferencia linealizada de cada uno de los elementos del sistema.

Datos:

Fluido: Agua.
Sección transversal depósitos: 2 m^2.
Altura Máxima depósitos: 4 m.
F. Gravedad: 10 m/s^2.
Radio orificio salida: 0.05 m.
Punto trabajo: H_o=1m. Q_o=0.0351 m^3/s.

Para la bomba:

La respuesta al impulso unitario del conjunto motor CC - turbina representada en la figura corresponde a un sistema de primer orden de la forma:

$$G_b(s) = \frac{k}{\tau s+1} = \frac{k}{\tau} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}$$

Cuya respuesta temporal ante entrada impulso corresponde con:

$$y_b(t) = \frac{k}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Se indica en la gráfica que el área de la respuesta vale 0.0035 luego:

$$Area = \int_0^\infty \frac{k}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{k}{\tau} \cdot \left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty = \frac{k}{\tau} \cdot [0-\tau] = k$$

Por tanto:

$$k = 0.0035$$

En la gráfica puede verse también que para el instante inicial t=0 la respuesta del sistema vale:

$$y_b(0) = 0.000702$$

$$y_b(0) = \frac{k}{\tau} = 0.000702$$

Luego:

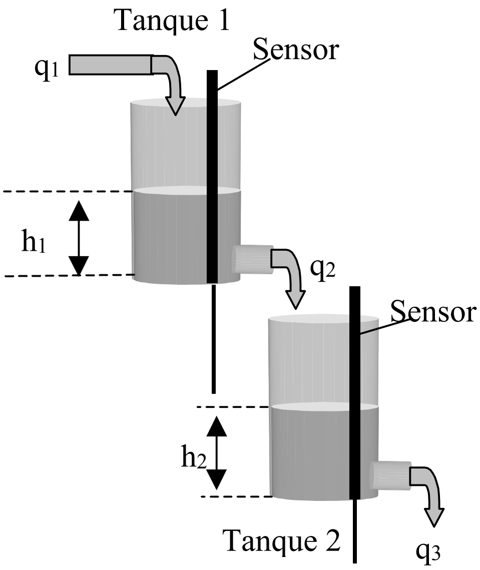
$$\tau = \frac{k}{0.000702} = \frac{0.0035}{0.000702} = 4.99$$

Luego la función de transferencia será:

$$G_b(s) = \frac{k}{\tau} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}} = \frac{0.0035}{4.99} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{4.99}}$$

$$\boxed{G_b(s) = \frac{0.0007}{s + 0.2}}$$

Modelado de los depósitos:



La variación del volumen de líquido en el tanque 1 es:

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

y como V = A · h entonces:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A\frac{dh_1(t)}{dt}$$

$$A\frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

$$2\frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

La velocidad de salida del líquido del tanque 1 es:

$$v_{liq}(t) = \sqrt{2gh_1(t)}$$

El caudal de salida será:

$$q_2(t) = s \cdot v_{liq}(t) = s\sqrt{2gh_1(t)}$$

Donde s es la sección del orificio de salida:

$$s = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0.05^2 = 0.00785 m^2$$

Luego:

$$q_2(t) = 0.00785\sqrt{20h_1(t)}$$

Esta ecuación no corresponde con una relación lineal entre la altura h_1 y el caudal q_2. Se linealiza esta ecuación mediante el desarrollo en serie de Taylor para las condiciones de equilibrio.

$$q_2 = q_{2o} + \left.\frac{dq_2}{dh_1}\right|_{h=h_o} (h_1 - h_{1o})$$

$$h_{10} = 1 \text{ m}$$

$$q_{2o} = 0.0351 \frac{m^3}{s}$$

$$\left.\frac{dq_2}{dh_1}\right|_{h_1=h_{10}} = 0.00785 \left.\frac{20}{2\sqrt{20h_1}}\right|_{h_1=1} = 0.01755$$

$$q_2(t) = 0.0351 + 0.01755(h_1(t) - 1)$$

$$q_2(t) - 0.0351 = 0.01755(h_1(t) - 1)$$

Representando las variables como incrementos respecto al punto de equilibrio.

$$\delta q_2(t) = q_2(t) - 0.0351$$

$$\delta h_1(t) = h_1(t) - 1.2$$

las ecuaciones quedan:

$$\delta q_2(t) = 0.01755 \cdot \delta h(t)$$

$$2\frac{d\delta h_1(t)}{dt} = \delta q_1(t) - \delta q_2(t)$$

Y aplicando transformadas de Laplace:

$$\Delta Q_2(s) = 0.01755 \cdot \Delta H_1(s)$$

$$2s \cdot \Delta H_1(s) = \Delta Q_1(s) - \Delta Q_2(s)$$

Uniendo estas ecuaciones se puede obtener la relación entre Q_1 y H_1.

$$2s \cdot \Delta H_1(s) = \Delta Q_1(s) - 0.01755 \cdot \Delta H_1(s)$$

$$(2s + 0.01755) \cdot \Delta H_1(s) = \Delta Q_1(s)$$

$$\boxed{\frac{\Delta H_1(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{1}{2s + 0.01755}}$$

Y como el segundo tanque es idéntico al primero, de la misma forma se tendrá:

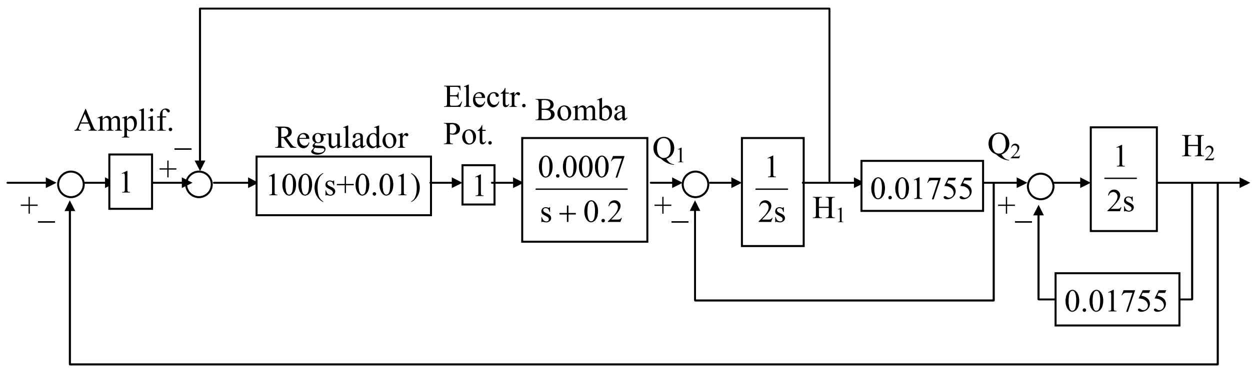
$$\Delta Q_3(s) = 0.01755 \cdot \Delta H_2(s)$$

$$2s \cdot \Delta H_2(s) = \Delta Q_2(s) - \Delta Q_3(s)$$

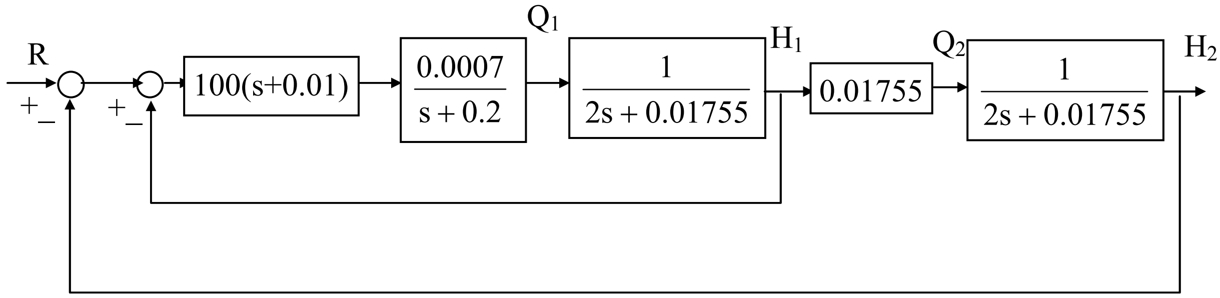
Y uniéndolas:

$$\boxed{\frac{\Delta H_2(s)}{\Delta Q_2(s)} = \frac{1}{2s + 0.01755}}$$

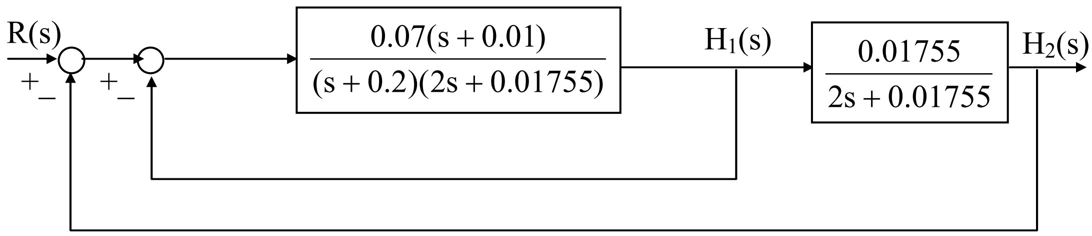
La representación del diagrama de bloques del sistema completo será:



Si se resuelven los lazos internos mediante movimiento de bloques o utilizando las expresiones analíticas anteriores, el diagrama de bloques queda como:



Y agrupando de nuevo las funciones de transferencia:



EJERCICIO 1.17.

La figura 1 muestra un sistema de control de elevación para una bola de acero. El sistema está formado por un levitador magnético, un sensor ultrasónico de distancia, un amplificador diferencial, un motor de CC, un engrane, un potenciómetro lineal y un amplificador de potencia.

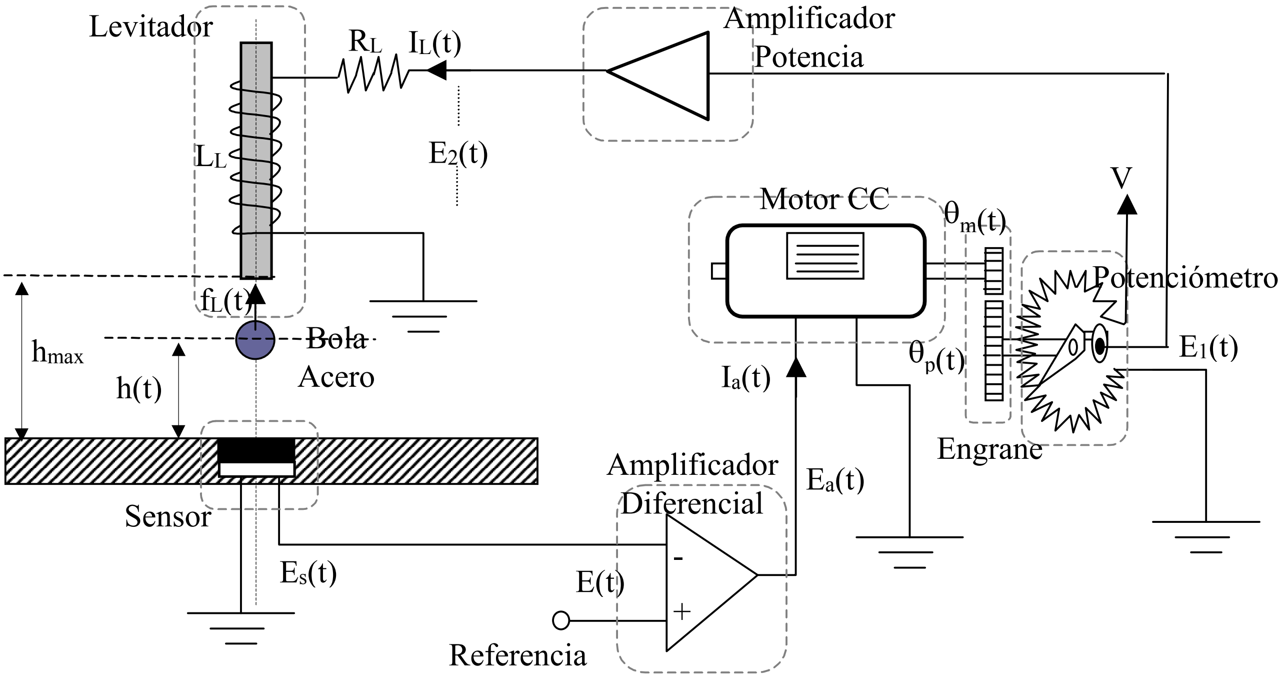


Figura1: Sistema de Control de elevación mediante un levitador magnético

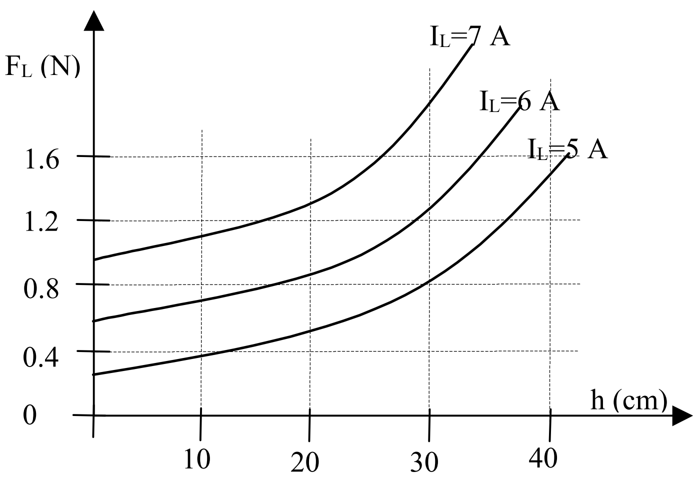


Figura 2: Relación Fuerza-Intensidad-Distancia del Levitador Magnetico

Suponer que el punto de trabajo habitual es: $\begin{array}{l} i_{Lo} = 6A \\ h_o = 22cm \end{array}$

Datos:

θ_m = Desplazamiento angular del eje del motor en grados.
θ_p = Giro del eje del potenciómetro en grados (de 0º a 360º).
ω_m = Desplazamiento angular del eje del motor en radianes.
k_p = Ganancia del potenciómetro = 0.01388 volt/grado.
V = Alimentación del Potenciómetro = 6 v.
A_1 = Ganancia del amplificador diferencial = 1.
A_2 = Ganancia del amplificador de Potencia = 20.
R_L = Resistencia del circuito levitador = 16 ohm
L_L = Coef. de autoinducción del circuito levitador = 0.1 Hr.
R_a = Resistencia del inducido = 5 ohm.
L_a = Inductancia del inducido = 0.01 Hr.
K_3 = Cte de fuerza contraelectromotriz = 0.68 volt/(rad/sg).
K_2 = Cte del par motor = 0.68 newton*m/sg.
N = Relación de engranes (N1/N2) = 1/10.
Jc = Momento de inercia de la carga = 0,136 N*m*sg.
fc = Fricción Viscosa de la carga = 0.136 N*m/(rad/sg).
Jm = Momento de inercia del motor = 2.73 N*m*sg.
fm = Fricción Viscosa del motor = 2.73.
ks = Constante del sensor = 0.25 Voltios/centímetro
h_{max} = Altura Máxima =40 cm
M = Masa de la Bola = 100 gr

Modelar y calcular la función de transferencia del sistema considerando como entrada la señal de referencia E(t) y como salida la altura de la bola h(t).

Cálculo de las funciones de transferencia.

***- Motor*:**

Circuito eléctrico: $\dfrac{I_a(s)}{E_a(s)}$

La ecuación que rige su funcionamiento es: $e_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \dfrac{di_a(t)}{dt} + e_{fem}(t)$

Tomando transformadas de Laplace: $E_a(s) = (R_a + L_a s)I_a(s) + E_{fem}(s)$

$$\boxed{\frac{I_a(s)}{E_a(s) - E_{fem}(s)} = \frac{1}{R_a + L_a s}} \qquad \boxed{\frac{I_a(s)}{E_a(s) - E_{fem}(s)} = \frac{1}{5 + 0.01s}}$$

<u>FEM</u>: $\dfrac{E_{fem}(s)}{W_m(s)}$

La ecuación que rige su funcionamiento es: $e_{fem}(t) = K \cdot \phi(t) \cdot \omega_m(t)$

Si la intensidad de excitación es constante, el flujo será constante y por tanto:

$$e_{fem}(t) = K_3 \cdot \omega_m(t)$$

Tomando transformadas de Laplace:

$$E_{fem}(s) = K_3 \cdot W_m(s)$$

$$\boxed{\frac{E_{fem}(s)}{W_m(s)} = K_3} \qquad \boxed{\frac{E_{fem}(s)}{W_m(s)} = 0.68}$$

<u>Par</u>: $\dfrac{T_m(s)}{Ia(s)}$

Para el motor, al ser la intensidad de excitación constante, el flujo será constante. El par motor desarrollado es proporcional al producto de la intensidad por el flujo, luego se puede poner como:

$$Tm(t) = K_2 \cdot i_a(t)$$

Tomando transformadas de Laplace:

$$T_m(s) = K_2 I_a(s)$$

$$\boxed{\frac{T_m(s)}{I_a(s)} = K_2} \qquad \boxed{\frac{T_m(s)}{I_a(s)} = 0.68}$$

<u>Sistema Mecánico</u>: $\dfrac{\theta_m(s)}{T_m(s)}$

La ecuación que rige su funcionamiento es: $T_m(t) = J\dfrac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + f\dfrac{d\theta_m(t)}{dt}$

Tomando transformadas de Laplace: $T_m(s) = (Js^2 + fs) \cdot \theta_m(s)$

$$\boxed{\frac{\theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{Js^2 + fs}}$$

Donde J y f son el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa equivalente referidos al eje del motor:

$$J = Jm + n^2 Jc = 2.73 + 0.1^2 \cdot 0.136 = 2.73136\,N \cdot m \cdot s$$

$$f = fm + n^2 \cdot fc = 2.73 + 0.1^2 \cdot 0.136 = 2.73136\,N \cdot m/(rad/s)$$

luego la función de transferencia queda:

$$\boxed{\frac{\theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{2.73136s^2 + 2.73136s}}$$

<u>Engranes</u>: $\dfrac{\theta_p(s)}{\theta_m(s)}$

La ecuación que rige su funcionamiento es: $\theta_p(t) = N \cdot \theta_m(t)$

Tomando transformadas de Laplace: $\theta_p(s) = N \cdot \theta_m(s)$

$$\boxed{\frac{\theta_p(s)}{\theta_m(s)} = N} \qquad \boxed{\frac{\theta_p(s)}{\theta_m(s)} = 0.1}$$

-***Potenciómetro***: $\dfrac{E_1(s)}{\theta_p(s)}$

La ecuación que rige su funcionamiento es: $e_1(t) = k_p \cdot \theta_p(t)$

Tomando transformadas de Laplace: $E_1(s) = k_p \cdot \theta_p(s)$

$$\boxed{\frac{E_1(s)}{\theta_p(s)} = k_p}$$

$$k_p = 0.01388 \frac{V}{\text{gra do}} \cdot \frac{360^{\circ}}{2\pi \text{rad}} = 0.7953 \frac{V}{\text{rad}}$$

$$\boxed{\frac{E_1(s)}{\theta_p(s)} = 0.7953}$$

-***Amplificador de Potencia*** : $\dfrac{E_2(s)}{E_1(s)}$

La ecuación que rige su funcionamiento es: $e_2(t) = A_2 \cdot e_1(t)$

Tomando transformadas de Laplace: $E_2(s) = A_2 \cdot E_1(s)$

$$\boxed{\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = A_2} \qquad \boxed{\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = 20}$$

-***Amplificador diferencial*** : $\dfrac{E_a(s)}{E(s)}$

La ecuación que rige su funcionamiento es: $e_a(t) = A_1 \cdot e(t)$

Tomando transformadas de Laplace: $E_a(s) = A_1 \cdot E(s)$

$$\boxed{\frac{E_a(s)}{E(s)} = A_1} \qquad \boxed{\frac{E_a(s)}{E(s)} = 1}$$

-***Sensor***: $\dfrac{E_s(s)}{H(s)}$

La ecuación que rige su funcionamiento es: $e_s(t) = k_s \cdot h(t)$

Tomando transformadas de Laplace: $E_s(s) = k_s \cdot H(s)$

$$\boxed{\frac{E_s(s)}{H(s)} = k_s}$$

$$k_s = 0.25\frac{V}{cm} \cdot \frac{100cm}{1m} = 25\frac{V}{m}$$

$$\boxed{\frac{E_s(s)}{H(s)} = 25}$$

-***Bola***: $\dfrac{H(s)}{F_l(s)}$

La ecuación que rige su funcionamiento es: $f_L(t) = M \cdot \dfrac{d^2h(t)}{dt^2}$

Tomando transformadas de Laplace: $F_L(s) = M \cdot s^2 \cdot H(s)$

$$\boxed{\frac{H(s)}{F_L(s)} = \frac{1}{M \cdot s^2}} \qquad \boxed{\frac{H(s)}{F_L(s)} = \frac{1}{0.1 \cdot s^2}}$$

-***Levitador***:

<u>Circuito eléctrico</u>: $\dfrac{I_L(s)}{E_2(s)}$;

La ecuación que rige su funcionamiento es: $e_2(t) = R_L i_L(t) + L_L \cdot \dfrac{di_L(t)}{dt}$

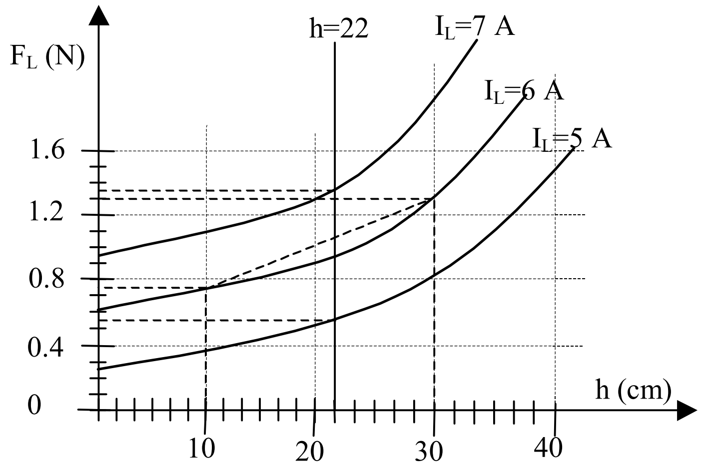
Tomando transformadas de Laplace: $E_2(s) = (R_L + L_L \cdot s)I_L(s)$

$$\boxed{\frac{I_L(s)}{E_2(s)} = \frac{1}{R_L + L_L \cdot s}} \qquad \boxed{\frac{I_L(s)}{E_2(s)} = \frac{1}{16 + 0.1 \cdot s}}$$

Sistema Magneto-Mecánico: $\dfrac{F_L(s)}{I_L(s)}$

El funcionamiento viene definido por la gráfica de la figura 2.

Suponiendo que el punto de trabajo habitual es: $\begin{array}{l} i_{L_o} = 6\text{A} \\ h_o = 22\text{cm} \end{array}$ se linealiza la función para dicho punto de trabajo:



$$\Delta f_L(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial i_L}\right|_{\substack{i_L=6 \\ h=22}} \Delta i_L(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{\substack{i_L=6 \\ h=22}} \Delta h(t)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial i_L}\right|_{\substack{i_L=6 \\ h=22}} = \frac{1.35 - 0.55}{7 - 5} = 0.4\frac{\text{N}}{\text{A}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{\substack{i_L=6 \\ h=22}} = \frac{1.3 - 0.75}{0.3 - 0.1} = 2.75\frac{\text{N}}{\text{A}}$$

$$\Delta f_L(t) = 0.4\Delta i_L(t) + 2.75\Delta h(t)$$

Aplicando transformadas de Laplace:

$$F_L(s) = 0.4 I_L(s) + 2.75 H(s)$$

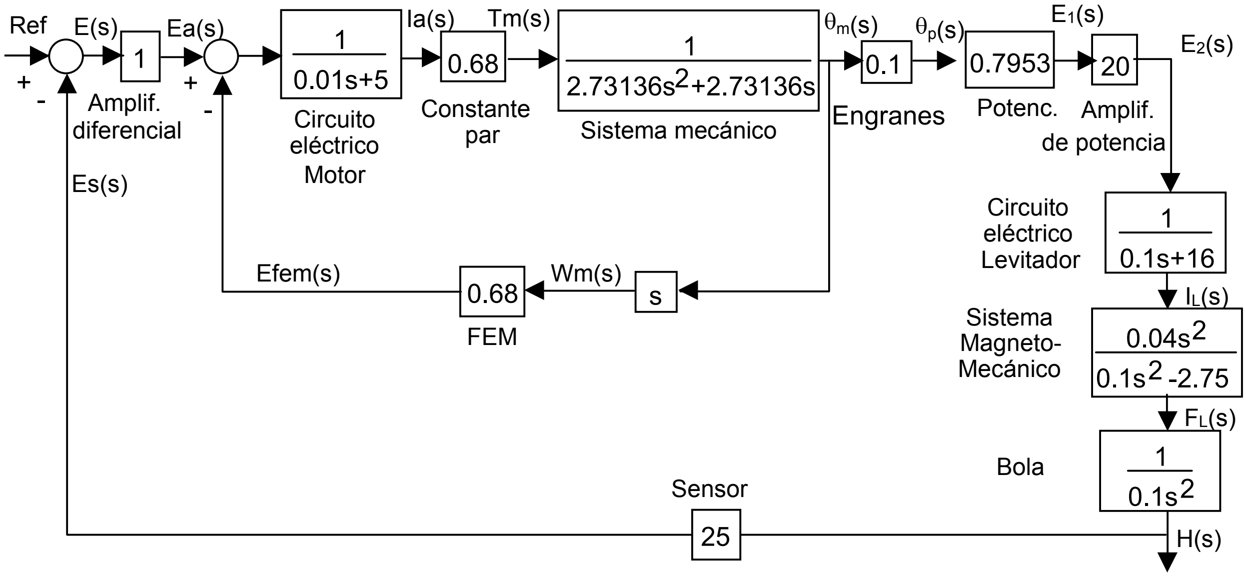
Utilizando ahora la expresión anterior obtenida: $\dfrac{H(s)}{F_L(s)} = \dfrac{1}{M \cdot s^2}$

$$F_L(s) = 0.4 I_L(s) + 2.75 \cdot \frac{1}{M \cdot s^2} \cdot F_L(s)$$

$$F_L(s)\left[1 - \frac{2.75}{M \cdot s^2}\right] = 0.4 I_L(s)$$

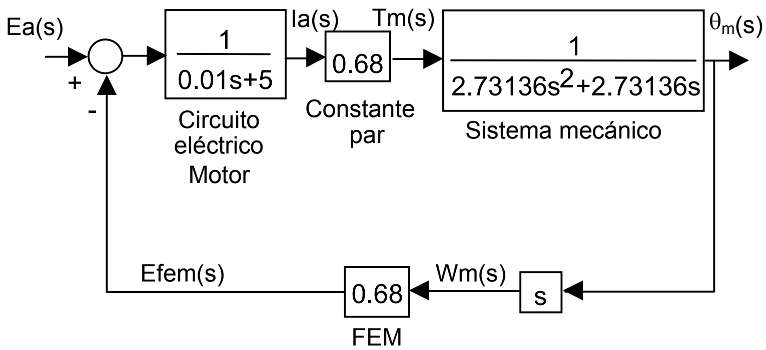
$$F_L(s)\left[\frac{M\cdot s^2-2.75}{M\cdot s^2}\right]=0.4I_L(s)$$

$$\boxed{\frac{F_L(s)}{I_L(s)}=\frac{0.4\cdot M\cdot s^2}{M\cdot s^2-2.75}} \qquad \boxed{\frac{F_L(s)}{I_L(s)}=\frac{0.04\cdot s^2}{0.1s^2-2.75}}$$



Si se obtiene ahora la función de transferencia del sistema total.

Se resuelve en primer lugar el lazo interno:

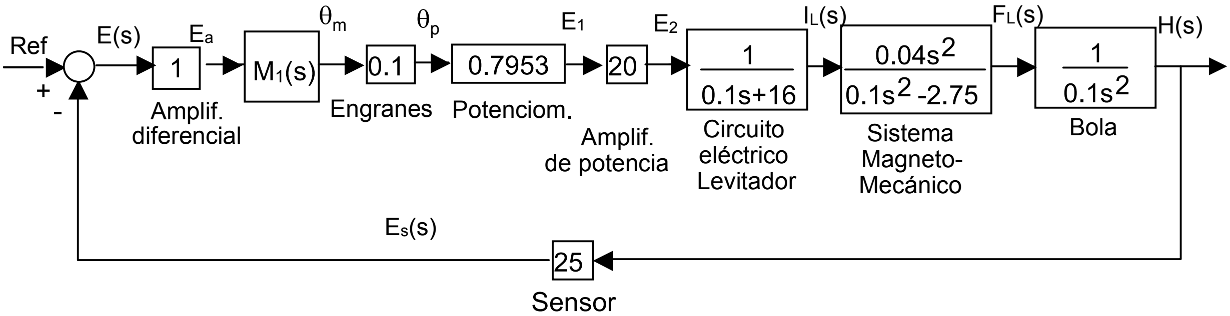


$$M_1(s)=\frac{\dfrac{1}{0.01s+5}\cdot 0.68\cdot\dfrac{1}{2.73136s^2+2.73136s}}{1+\dfrac{1}{0.01s+5}\cdot 0.68\cdot\dfrac{1}{2.73136s^2+2.73136s}\cdot 0.68s}$$

$$M_1(s)=\frac{0.68}{(0.01s+5)(2.73136s^2+2.73136s)+0.68^2 s}$$

$$M_1(s) = \frac{0.68}{0.0273136s^3 + 13.6841136s^2 + 14.1192s}$$

Con lo que el diagrama de bloques total quedará:



Reuniendo todas las constantes de numerador en una sola quedará:

$$K = 1 \cdot 0.1 \cdot 0.7953 \cdot 20 = 1.5906$$

La función de transferencia de cadena directa será:

$$G_T(s) = 1.5906 \cdot \frac{0.68}{0.0273136s^3 + 13.6841136s^2 + 14.1192s} \cdot \frac{1}{0.1s + 16} \cdot \frac{0.04s^2}{0.1s^2 - 2.75} \cdot \frac{1}{0.1s^2}$$

$$G_T(s) = \frac{0.04326s^2}{0.00002731s^8 + 0.01805s^7 + 2.203s^6 + 1.763s^5 - 60.6s^4 - 62.12s^3}$$

$$G_T(s) = \frac{0.04326}{0.00002731s^6 + 0.01805s^5 + 2.203s^4 + 1.763s^3 - 60.6s^2 - 62.12s}$$

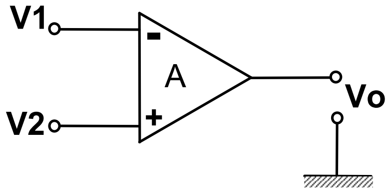
Calculamos ahora la función de transferencia de lazo cerrado:

$$G_T(s) = \frac{\dfrac{0.04326}{0.00002731s^6 + 0.01805s^5 + 2.203s^4 + 1.763s^3 - 60.6s^2 - 62.12s}}{1 + \dfrac{0.04326}{0.00002731s^6 + 0.01805s^5 + 2.203s^4 + 1.763s^3 - 60.6s^2 - 62.12s} \cdot 25}$$

$$\boxed{M(s) = \frac{0.04326}{0.00002731\,s^6 + 0.01805\,s^5 + 2.203\,s^4 + 1.763\,s^3 - 60.6\,s^2 - 62.12\,s + 1.082}}$$

EJERCICIO 1.18.

Conociendo las características básicas del amplificador operacional ideal:



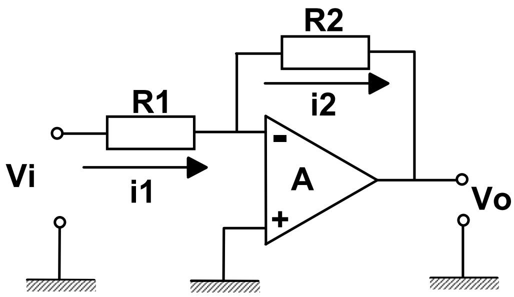
$$V_o = A(V_2 - V_1)$$

- Impedancia de entrada infinita.
- Impedancia de salida nula.
- Ganancia de tensión infinita.

1) No entra corriente al amplificador.
2) Entradas a igual tensión, pero sin circulación de corriente (Tierra virtual).

Obtener las funciones de transferencia de los siguientes circuitos.

Amplificador Inversor:



- No se hace uso de la entrada diferencial.

$$i_1(t) = i_2(t)$$

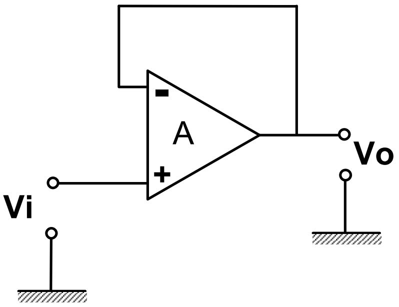
$$i_1(t) = \frac{V_i(t)}{R_1}; \quad i_2(t) = -\frac{V_0(t)}{R_2}$$

$$\frac{V_i(t)}{R_1} = -\frac{V_0(t)}{R_2}$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$\boxed{\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}}$$

Adaptador de Impedancia



$$V_0(t) = V_i(t)$$

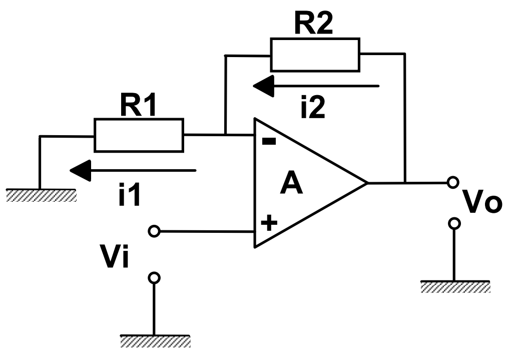
Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$\boxed{\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = 1}$$

Propiedades:

- Alta impedancia de entrada.
- Detección de señales muy débiles.

Amplificador no inversor



$$i_1(t) = i_2(t)$$

$$i_1(t) = \frac{V_i(t)}{R_1}; \quad i_2(t) = \frac{V_0(t) - V_i(t)}{R_2}$$

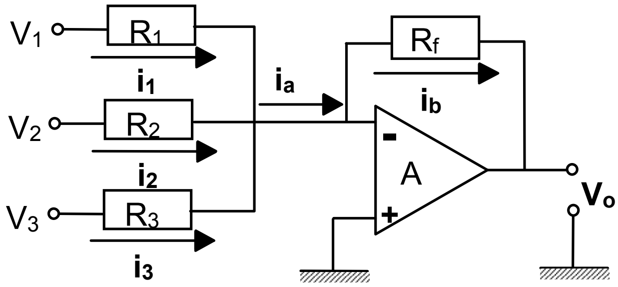
$$\frac{V_i(t)}{R_1(t)} = \frac{V_0(t) - V_i(t)}{R_2}$$

$$V_0(t) = V_i(t) + \frac{R_2}{R_1} V_i(t)$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$\boxed{\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = 1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

Sumador Inversor



$$i_a(t) = i_b(t)$$

$$i_a(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \frac{V_1(t)}{R_1} + \frac{V_2(t)}{R_2} + \frac{V_3(t)}{R_3}$$

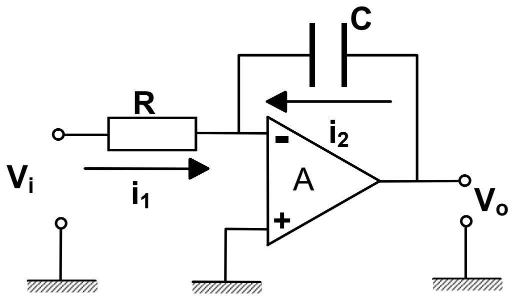
$$i_b(t) = -\frac{V_0(t)}{R_f}$$

$$\frac{V_1(t)}{R_1} + \frac{V_2(t)}{R_2} + \frac{V_3(t)}{R_3} = -\frac{V_0(t)}{R_f}$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$\boxed{V_0(s) = -\left(V_1(s)\frac{R_f}{R_1} + V_2(s)\frac{R_f}{R_2} + V_3(s)\frac{R_f}{R_3}\right)}$$

Integrador Inversor



$$i_1(t) = -i_2(t)$$

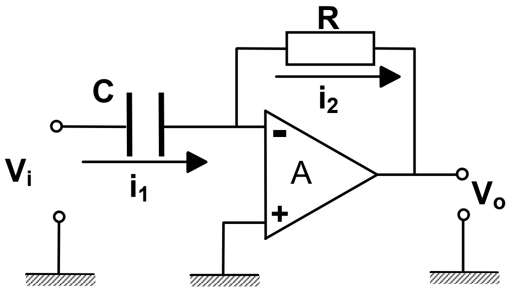
$$i_1(t) = \frac{V_1(t)}{R}$$

$$V_0(t) = \frac{1}{C}\int i_2(t)dt = -\frac{1}{C}\int \frac{V_1(t)}{R}dt$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$\boxed{\frac{V_0(s)}{V_1(s)} = -\frac{1}{RCs}}$$

Diferenciador



$$i_1(t) = i_2(t)$$

$$i_1(t) = C\frac{dV_1(t)}{dt}$$

$$i_2(t) = -\frac{V_0(t)}{R}$$

$$-\frac{V_0(t)}{R} = C\frac{dV_1(t)}{dt}$$

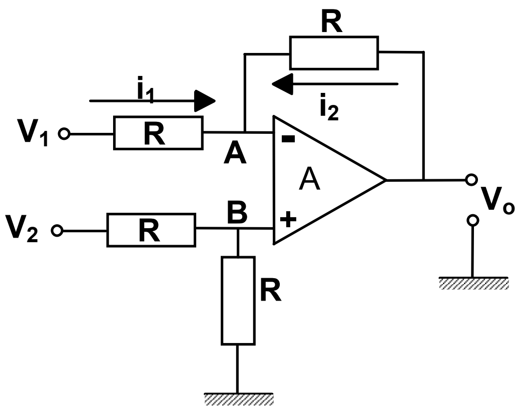
$$V_0(t) = -RC\frac{dV_1(t)}{dt}$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$V_0(s) = -RCsV_1(s)$$

$$\boxed{\frac{V_0(s)}{V_1(s)} = -RCs}$$

Comparador



$$i_1 = -i_2$$

$$V_B = \frac{V_2}{2}$$

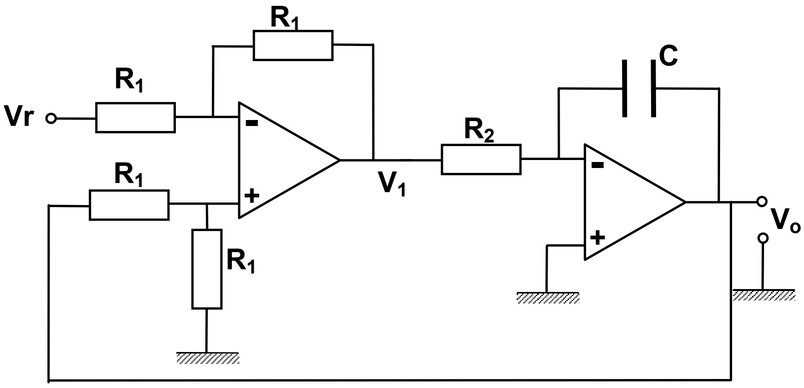
$$i_1 = \frac{V_1 - V_B}{R} = \frac{V_1 - V_2/2}{R}$$

$$i_2 = \frac{V_0 - V_B}{R} = \frac{V_0 - V_2/2}{R}$$

$$\frac{V_1 - V_2/2}{R} = -\frac{V_0 - V_2/2}{R}$$

$$\boxed{V_0 = V_2 - V_1}$$

Sistema de primer orden



$$V_1(s) = V_r(s) - V_0(s)$$

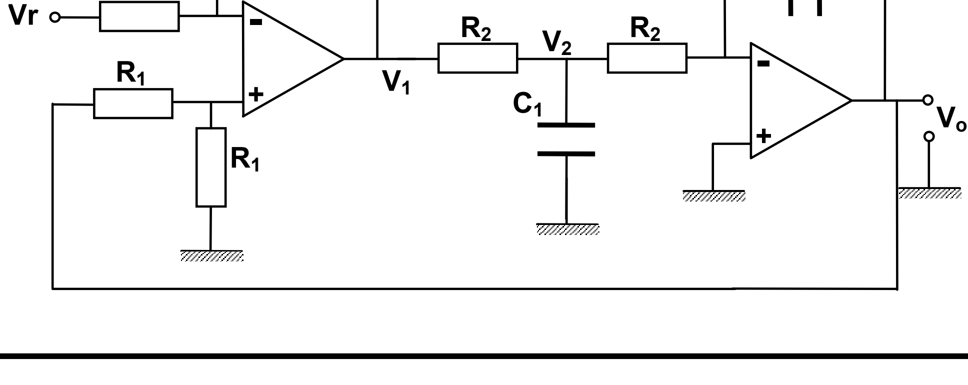
$$V_0(s) = -\frac{V_1(s)}{RCs}$$

$$V_0(s) = -\frac{V_r(s) - V_0(s)}{RCs}$$

$$(RCs+1)V_0(s) = -V_r(s)$$

$$\boxed{\frac{V_0(s)}{V_r(s)} = -\frac{1}{(RCs+1)}}$$

Sistema de segundo orden



$$V_1(s) = V_r(s) - V_0(s)$$

$$V_0(s) = -\frac{V_2(s)}{RCs}$$

$$V_2(s) = \frac{V_1(s)}{R_2C_1s + 2}$$

$$V_0(s) = -\frac{\dfrac{V_r(s) - V_0(s)}{R_2C_1s + 2}}{RCs} = \frac{V_r(s) - V_0(s)}{(RCs)(R_2C_1s + 2)}$$

$$V_0(s) = \frac{V_r(s)}{[(RCs)(R_2C_1s + 2) + 1]}$$

$$\boxed{\frac{V_0(s)}{V_r(s)} = \frac{1}{[(RCs)(R_2C_1s + 2) + 1]}}$$