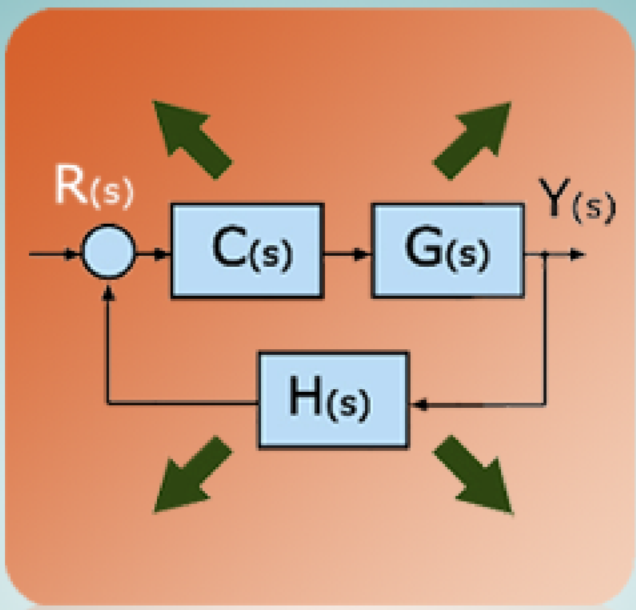
Automática

Ejercicios

Capítulo 3. Errores en Estado Estacionario

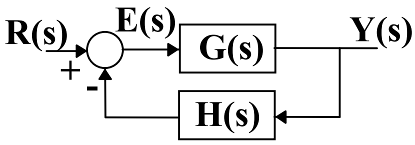


José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

EJERCICIO 3.1.

Calcular los errores en estado estacionario, ante las señales típicas de prueba, para el sistema siguiente:



$$G(s) = \frac{10}{(0.2s+1)(0.5s+1)} \qquad H(s) = 1$$

-El error del sistema ante entrada escalón unidad (posición) será:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) \qquad K_p = \lim_{s\to 0} \frac{10}{(0.2s+1)(0-5s+1)} = 10$$

$$\boxed{e_{p\infty} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{11} = 0.09}$$

Corresponde a un sistema tipo 0 luego presenta error constante ante entrada escalón.

-El error del sistema ante entrada rampa unidad (velocidad) será:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) \qquad K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{10}{(0.2s+1)(0-5s+1)} = 0$$

$$\boxed{e_{v\infty} = \frac{1}{K_v} = \infty}$$

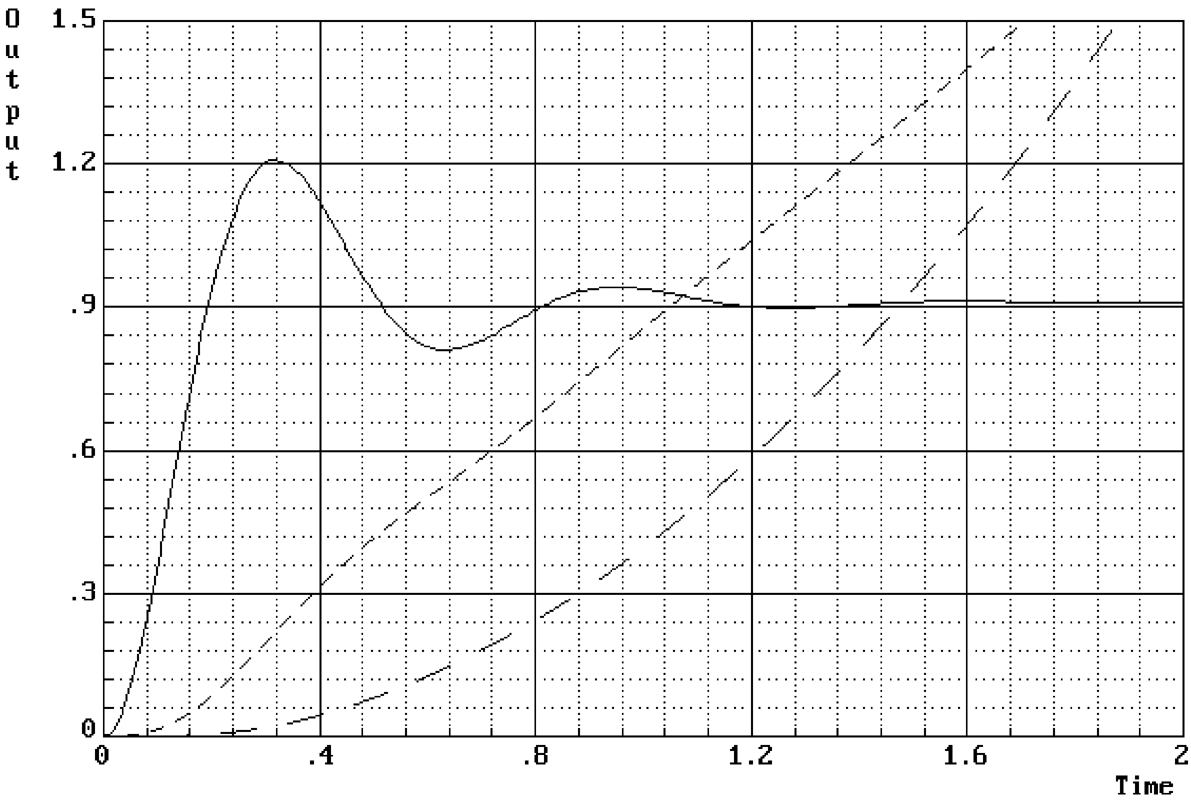
Corresponde a un sistema tipo 0 luego presenta un error infinito ante la entrada rampa.

- El error del sistema ante entrada parabólica (aceleración) será:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s) \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{10}{(0.2s+1)(0-5s+1)} = 0$$

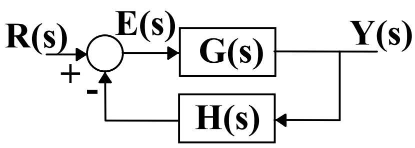
$$\boxed{e_{a\infty} = \frac{1}{K_a} = \infty}$$

Corresponde a un sistema tipo 0 luego presenta un error infinito ante entrada aceleración.
La figura siguiente representa la respuesta del sistema ante los tres tipos de entrada.



EJERCICIO 3.2.

Calcular los errores de estado estacionario del siguiente sistema.



$$G(s) = \frac{8}{s^2(s^2+4s+8)(s^2+3s+12)} \qquad\qquad H(s) = 1$$

- Error de posición:

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1+K_p}; \quad K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{8}{s^2(s^2+4s+8)(s^2+3s+12)} = \infty$$

$$\boxed{e_{p\infty} = \frac{1}{1+\infty} = 0}$$

- Error de velocidad:

$$e_{v\infty} = \frac{1}{K_v}; \quad K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)H(s)$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{8}{s^2(s^2+4s+8)(s^2+3s+12)} = \infty$$

$$\boxed{e_{v\infty} = \frac{1}{\infty} = 0}$$

- Error de aceleración:

$$e_{a\infty} = \frac{1}{K_a}; \quad K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)H(s)$$

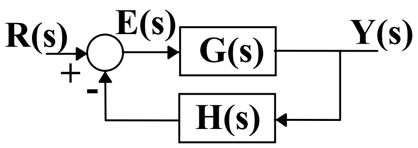
$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{8}{s^2(s^2+4s+8)(s^2+3s+12)} = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{e_{a\infty} = \frac{1}{1/12} = 12}$$

El sistema es de tipo 2, luego presenta error nulo de posición y velocidad y error finito de aceleración.

EJERCICIO 3.3.

Calcular el valor de K en el sistema siguiente para que el error en régimen permanente sea menor o igual a 0.1, al aplicar la entrada: $r(t) = 1 + 5t$.



$$G(s) = \frac{K(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2}; \quad H(s) = 1$$

Entrada: $r(t) = 1 + 5t$;

Lineal: $e_\infty = e_{p\infty} + e_{v\infty}$

- Escalón: $$e_{p\infty} = \frac{1}{1+K_p}; \quad K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s)$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2} = \infty$$

$$\boxed{e_{p\infty} = \frac{1}{1+\infty} = 0}$$

- Rampa: $$e_{v\infty} = \frac{1}{K_v}; \quad K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)H(s)$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\frac{K(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2} = K$$

$$\boxed{e_{v\infty} = 5\frac{1}{K}}$$

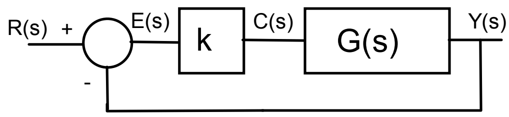
Error total: $e_\infty = e_{p\infty} + e_{v\infty}$

$$0.1 \geq 0 + \frac{5}{K}$$

$$\boxed{K \geq 50}$$

EJERCICIO 3.4.

Tenemos un sistema de control dado por la siguiente estructura:



La función de transferencia G(s) es:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^3 + s^2 + 2s + 3}$$

Indicar el tipo del sistema y calcular los errores de estado estacionario ante entrada escalón y entrada rampa cuando K = 1.

El sistema tiene realimentación unitaria, y puede verse que el tipo de este sistema es cero al no poseer en cadena abierta ningún polo en el origen. Por tanto presentará un error finito ante entrada escalón y un error infinito ante la entrada rampa.

Error ante escalón:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 + 2s + 4}{s^3 + s^2 + 2s + 3} = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+1.33} = 0.428$$

Error ante rampa:

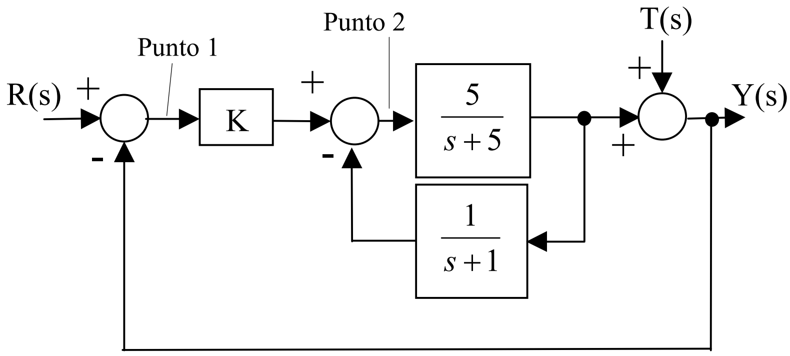
$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{s^2+2s+4}{s^3+s^2+2s+3} = 0$$

$$e_{v\infty} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

EJERCICIO 3.5

Para el sistema de control de la figura calcular:

1) Valores de las señales en puntos 1 y 2, en régimen permanente, cuando T(t)=0, K=1 y cuando la entrada es r(t)=u(t).
2) Calcular lo mismo cuando r(t)=t u(t).
3) Calcular K para que cuando r(t)=T(t)=u(t), el error en régimen permanente en el punto 1 sea menor de 0.1.



1) $r(t) = u(t) \qquad R(s) = \frac{1}{s}$

En el punto 1:

$$E_p = \frac{1}{1+K_p} \qquad K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{5}{s+5}}{1+\frac{5}{(s+1)(s+5)}} = \frac{\frac{5}{s+5}}{\frac{(s+1)(s+5)+5}{(s+1)(s+5)}} = \frac{5(s+1)}{s^2+6s+10}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0}\frac{5(s+1)}{s^2+6s+10} = \frac{5}{10} = 0.5 \qquad E_p = \frac{1}{1+0.5} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} = 0.66$$

En el punto 2:

$$E_2 = E_1 - \frac{5}{(s+1)(s+5)} \cdot E_2 \qquad E_2\left[1 + \frac{5}{(s+1)(s+5)}\right] = E_1$$

$$E_1 = R(s) - E_2 \cdot \frac{5}{s+5}$$

$$E_2\left[1 + \frac{5}{(s+1)(s+5)}\right] = R(s) - E_2 \cdot \frac{5}{s+5}$$

$$E_2\left[1 + \frac{5}{(s+1)(s+5)} + \frac{5}{s+5}\right] = R(s)$$

$$E_{2\infty} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + \frac{5}{(s+1)(s+5)} + \frac{5}{s+5}} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

2) Al introducir una entrada en rampa los valores de régimen permanente de las señales en los puntos 1 y 2 serán infinito.

3) Para la entrada R:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{5K(s+1)}{s^2 + 6s + 10} = \frac{5K}{10} = 0.5K$$

$$E_R = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 0.5K}$$

Para la entrada T:

Cuando R(t)=0 $E_T = -Y(s)$

$$Y(s) = T(s) \cdot M(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 6s + 10}{s^2 + 6s + 10 + K(5s+5)}$$

$$E_T = \lim_{s \to 0} s \cdot E_T(s) = \lim_{s \to 0} s(-Y(s)) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 6s + 10}{s^2 + 6s + 10 + K(5s+5)} = -\frac{10}{10 + 5K}$$

Luego el error total aplicando superposición será la suma de E_R y E_T: $E = E_R + E_T$

$$E = \frac{1}{1 + 0.5K} - \frac{10}{10 + 5K}$$

$$E \le 0.1$$

$$E = \frac{10}{10 + 5K} - \frac{10}{10 + 5K} = 0$$

$0 < 0.1$ para cualquier valor de K.

Luego se cumple la condición de error para cualquier valor de K.

EJERCICIO 3.6.

Se pretende controlar la posición p(t) de la cabeza de lectura-escritura del disco duro de un PC, y para ello se utiliza un motor de CC, un sensor de posición y un regulador.

La ecuación que liga la velocidad de posicionamiento de la cabeza v(t) en función de la tensión aplicada al motor u(t), es:

$$10\,u(t) = a\,\frac{dv(t)}{dt} + v(t) \qquad \text{siendo } a = 0.001 \text{ seg.}$$

La posición real de la cabeza se mide con un sensor que transmite de forma instantánea y sin ningún tipo de deformación esa posición al regulador.

El regulador tiene como misión el mejorar el comportamiento del sistema para lo que realiza las siguientes funciones:

1) Compara la señal de referencia de posicionamiento con la posición real, obteniendo el error e(t).
2) Genera la señal de entrada al motor a partir de la señal de error, según la ecuación siguiente:

$$b\,\frac{du(t)}{dt} + u(t) = k\,c\,\frac{de(t)}{dt} + k\,e(t)$$

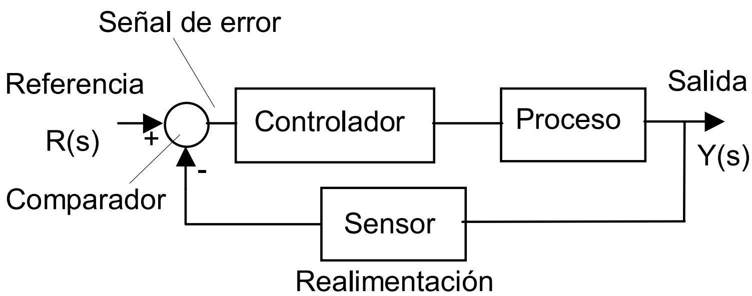
siendo: b = 0.0001 sg.
c = 0.002 sg.

Obtener:

a) Diagrama de bloques del sistema.
b) El valor de k para producir un error de posicionamiento, en régimen permanente, de 0.5 m ante una entrada de referencia tipo rampa de 10 m/sg.

---

a) La estructura típica de un sistema de control es la siguiente:



-Para el motor: la función que liga su señal de salida, v(t), con su señal de entrada, u(t), es dada en el enunciado:

$$10\,u(t) = a\,\frac{dv(t)}{dt} + v(t)$$

Tomando transformada de Laplace, con condiciones iniciales nulas, obtenemos la función de transferencia del motor:

$$10\,U(s) = a\,s\,V(s) + V(s)$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{10}{1 + as}$$

Como la señal de salida que buscamos controlar es la posición, conocemos la velocidad de salida y sabemos que la velocidad es la derivada respecto al tiempo de la posición en el tiempo, vemos que es necesario integrar la velocidad para obtener la posición.

$$\int_0^t v(t)\,dt = p(t)$$

Tomando transformadas, con condiciones iniciales nulas, el integrador queda:

$$\frac{P(s)}{V(s)} = \frac{1}{s}$$

- El sensor no modifica en nada la señal de salida del sistema, luego es una realimentación unidad.
- El regulador está formado por un comparador (el sumador) y un bloque (controlador) que genera la señal de entrada al motor, u(t), en función de la señal de error, e(t). La relación entre la entrada y salida de este bloque viene dada en el enunciado:

$$b\frac{du(t)}{dt} + u(t) = k\,c\frac{de(t)}{dt} + k\,e(t)$$

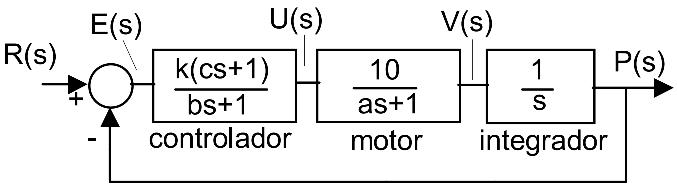
Tomando transformadas de Laplace, con condiciones iniciales nulas:

$$b\,s\,U(s) + U(s) = k\,c\,s\,E(s) + k\,E(s)$$

Entonces, la función de transferencia del controlador:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k(c\,s+1)}{(b\,s+1)}$$

Y, por lo tanto, el diagrama de bloques será el siguiente:



b) Sabemos que el error ante una entrada rampa lo denominamos error de velocidad, e_V, y que su expresión es la siguiente:

$$e_v = \frac{1}{K_v}; \quad K_v = \lim_{s\to\infty} s\,G(s)\,H(s);$$

En nuestro caso, por un lado tendremos:

$$K_v = \lim_{s\to\infty} s\frac{10k(cs+1)}{s(bs+1)(as+1)} = 10k$$

y por otro:

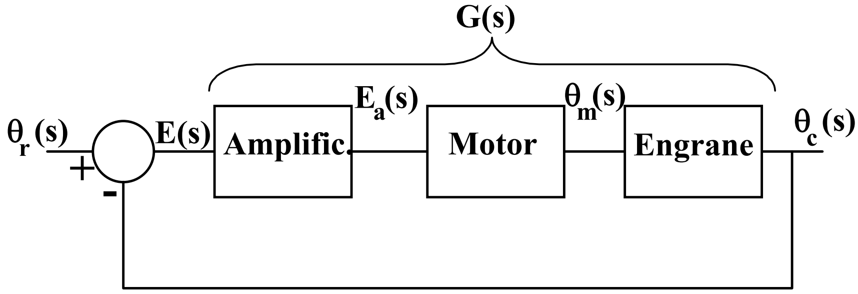
$$e_v = \frac{10}{K_v} = 0.5; \quad K_v = 20;$$

Igualando obtenemos k: $10k = 20$ $\boxed{k = 2}$

EJERCICIO 3.7.

Obtener los errores en estado estacionario para el sistema del ejercicio 1.9.

En el ejercicio 1.9. se obtuvo que el diagrama de bloques y la función de transferencia de lazo abierto del sistema eran:



$$G(s) = \frac{50000}{s(s^2 + 50.5s + 1725)}$$

El sistema es de tipo uno, con lo cuál ya sabemos de antemano que no va a presentar error ante entrada escalón, que va a tener un error constante ante entrada rampa y que el error será infinito ante entrada aceleración.

Error ante entrada escalón (error de posición):

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{50000}{s(s^2 + 50.5s + 1725)} = \infty$$

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

Error ante entrada rampa (error de velocidad):

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{50000}{s(s^2 + 50.5s + 1725)} = 28.98$$

$$e_{v\infty} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{28.98} = 0.034$$

Error ante entrada parabólica (error de aceleración):

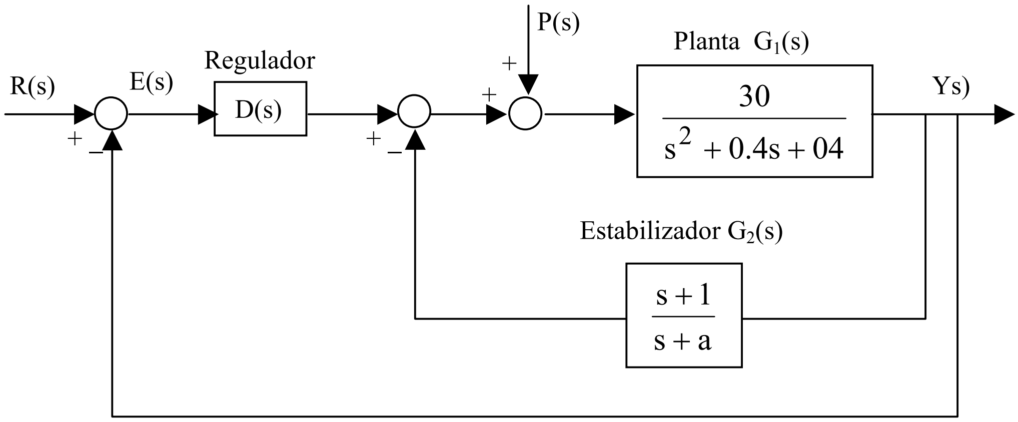
$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} s^2\frac{50000}{s(s^2 + 50.5s + 1725)} = 0$$

$$e_{a\infty} = \frac{1}{k_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

EJERCICIO 3.8.

El sistema mostrado en la figura representa un sistema de control para una planta que viene definida por la función de transferencia $G_1(s)$. Este sistema de control está formado por una realimentación interna donde se incluye un estabilizador $G_2(s)$ y por un regulador D(s) en la cadena directa.

El sistema posee dos entradas: R(s) representa la entrada de referencia del sistema
P(s) representa la entrada de perturbaciones



1) Considerando D(s) = 1 y a = 9 calcular el valor del error de régimen permanente cuando las entradas son: r(t) = 3 y p(t) = 0.5. Explicar el significado de dicho error.

2) Al introducir el regulador $D(s) = 0.191\dfrac{s+1.53}{s-1.219}$ ¿cómo se ve afectado el error de régimen permanente?

1) El error total aplicando superposición de las entradas será la suma de los errores de cada una de las entradas cuando se anulan el resto de las entradas.

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = \left[P(s) + E(s) - G_2(s)Y(s)\right]G_1(s)$$

$$Y(s) = \left[P(s) + E(s)\right]G_1(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

$$Y(s)\left[1 + G_1(s)G_2(s)\right] = \left[P(s) + E(s)\right]G_1(s)$$

$$Y(s) = \frac{\left[P(s) + E(s)\right]G_1(s)}{\left[1 + G_1(s)G_2(s)\right]}$$

$$E(s) = R(s) - \frac{\left[P(s) + E(s)\right]G_1(s)}{\left[1 + G_1(s)G_2(s)\right]}$$

$$E(s)\left[1 + G_1(s)G_2(s)\right] = R(s)\left[1 + G_1(s)G_2(s)\right] - \left[P(s) + E(s)\right]G_1(s)$$

$$E(s)\left[1+G_1(s)G_2(s)+G_1(s)\right]=R(s)\left[1+G_1(s)G_2(s)\right]-P(s)G_1(s)$$

$$E(s)=\frac{1+G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)+G_1(s)}R(s)-\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)+G_1(s)}P(s)$$

Error para $R(s)=\frac{3}{s}$ y $P(s)=0$:

$$e_1=\lim_{s\to 0} s\frac{1+G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)+G_1(s)}R(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1+\frac{30}{s^2+0.4s+0.4}\frac{s+1}{s+9}}{1+\frac{30}{s^2+0.4s+0.4}\frac{s+1}{s+9}+\frac{30}{s^2+0.4s+0.4}}\frac{3}{s}$$

$$e_1=\frac{1+\frac{30}{0.4\cdot 9}}{1+\frac{30}{0.4\cdot 9}+\frac{30}{0.4}}\cdot 3=0.332$$

Error para $R(s)=0$ y $R(s)=\frac{0.5}{s}$:

$$e_2=\lim_{s\to 0} s\frac{-G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)+G_1(s)}P(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{-\frac{30}{s^2+0.4s+0.4}}{1+\frac{30}{s^2+0.4s+0.4}\frac{s+1}{s+9}+\frac{30}{s^2+0.4s+0.4}}\frac{0.5}{s}$$

$$e_2=\frac{\frac{-30}{0.4}}{1+\frac{30}{0.4\cdot 9}+\frac{30}{0.4}}\cdot 0.5=-0.445$$

El error total será: $e=e_1+e_2=0.332-0.445=-0.113$

Como $E(s)=R(s)-Y(s)$ un error negativo significa, que respecto a la señal de referencia, la salida se estabiliza con un error de 0.113 sobrepasando a la señal de referencia.

2) El regulador a aplicar al sistema es: $D(s)=0.191\frac{s+1.53}{s-1.219}$

A la expresión del error obtenida en el apartado 1) se ha de incluir ahora el regulador D(s).

$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

$$Y(s)=\left[P(s)+E(s)D(s)-G_2(s)Y(s)\right]G_1(s)$$

$$Y(s)=\left[P(s)+E(s)D(s)\right]G_1(s)-G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

$$Y(s)\left[1+G_1(s)G_2(s)\right]=\left[P(s)+E(s)D(s)\right]G_1(s)$$

$$Y(s) = \frac{[P(s) + E(s)D(s)]G_1(s)}{[1 + G_1(s)G_2(s)]}$$

$$E(s) = R(s) - \frac{[P(s) + E(s)D(s)]G_1(s)}{[1 + G_1(s)G_2(s)]}$$

$$E(s)[1 + G_1(s)G_2(s)] = R(s)[1 + G_1(s)G_2(s)] - [P(s) + E(s)D(s)]G_1(s)$$

$$E(s)[1 + G_1(s)G_2(s) + G_1(s)D(s)] = R(s)[1 + G_1(s)G_2(s)] - P(s)G_1(s)$$

$$E(s) = \frac{1 + G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s) + G_1(s)D(s)}R(s) - \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s) + G_1(s)D(s)}P(s)$$

Error para $R(s) = \frac{3}{s}$ y $P(s) = 0$:

$$e_1 = \lim_{s\to 0} s\frac{1 + G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s) + G_1(s)D(s)}R(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s\frac{1 + \frac{30}{s^2 + 0.4s + 0.4}\frac{s+1}{s+9}}{1 + \frac{30}{s^2 + 0.4s + 0.4}\frac{s+1}{s+9} + \frac{30}{s^2 + 0.4s + 0.4}\frac{0.191(s+1.53)}{(s-1.219)}}\frac{3}{s} =$$

$$= \frac{1 + \frac{30}{0.4\cdot 9}}{1 + \frac{30}{0.4\cdot 9} + \frac{30}{0.4}\frac{0.292}{-1.219}}\cdot 3 = \frac{28}{-8.632} = 3.244$$

Error para $R(s) = 0$ y $R(s) = \frac{0.5}{s}$:

$$e_1 = \lim_{s\to 0} s\frac{-G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s) + G_1(s)D(s)}P(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s\frac{-\frac{30}{s^2 + 0.4s + 0.4}}{1 + \frac{30}{s^2 + 0.4s + 0.4}\frac{s+1}{s+9} + \frac{30}{s^2 + 0.4s + 0.4}\frac{0.191(s+1.53)}{(s-1.219)}}\frac{0.5}{s} =$$

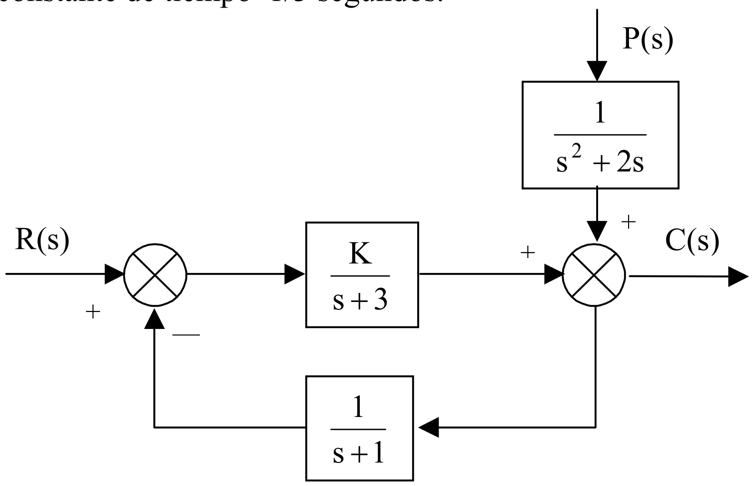
$$= \frac{\frac{-30}{0.4}}{1 + \frac{30}{0.4\cdot 9} + \frac{30}{0.4}\frac{0.292}{-1.219}}\cdot 0.5 = \frac{-37.5}{-8.632} = 4.344$$

El error total será: $e = e_1 + e_2 = -3.244 + 4.344 = 1.1$

Luego la introducción del regulador habrá modificado la forma de la respuesta a la deseada pero el error de régimen permanente ha tenido un gran incremento.

EJERCICIO 3.9.

Hallar el valor de K para que la salida c(t) en régimen permanente sea de valor 3 cuando la entrada r(t) es un escalón de amplitud 10 y la perturbación p(t) una exponencial decreciente de amplitud unidad y constante de tiempo 1/3 segundos.



Se calcula inicialmente el valor de la perturbación: $p(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{T}}$

donde la amplitud es K = 1 y la constante de tiempo $T = 1/3$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$p(t) = e^{\frac{-t}{1/3}} = e^{-3t}$$

Tomando transformadas de Laplace:

$$P(s) = \frac{1}{s+3}$$

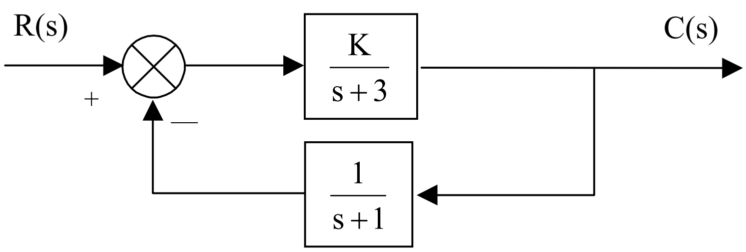
La entrada *r(t)* es un escalón de amplitud 10, luego: $r(t) = 10\,u(t)$

que tomando transformadas de Laplace:

$$R(s) = \frac{10}{s}$$

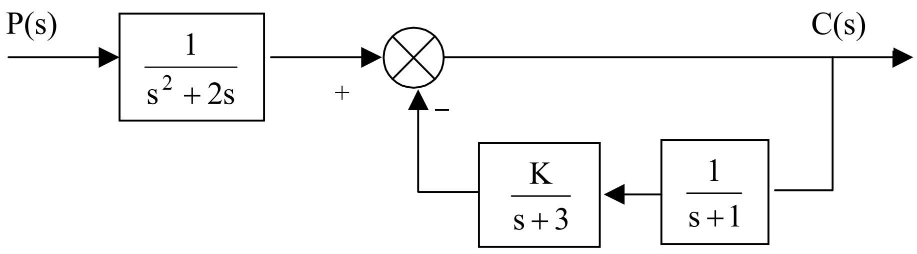
Aplicando superposición, la salida será la suma de la salida para la señal de entrada eliminando la perturbación más la salida para la perturbación eliminando la señal de entrada:

Considerando la entrada R(s):



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{K}{s+3}}{1+\dfrac{K}{s+3}\cdot\dfrac{1}{s+1}}=\frac{K(s+1)}{(s+3)(s+1)+K}=\frac{K(s+1)}{s^2+4s+3+K}$$

Ahora considerando la perturbación:



$$\frac{C(s)}{P(s)}=\frac{1}{s^2+2s}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{K}{s+3}\cdot\dfrac{1}{s+1}}=\frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)\left[(s+1)(s+3)+K\right]}$$

Aplicando el teorema del valor final obtendremos el valor de régimen permanente:

$$C_R(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K(s+1)}{(s+3)(s+1)+K}\cdot\frac{10}{s}=\frac{10K}{3+K}$$

$$C_P(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)\left[(s+1)(s+3)+K\right]}\cdot\frac{1}{s+3}=\frac{1}{2(3+K)}$$

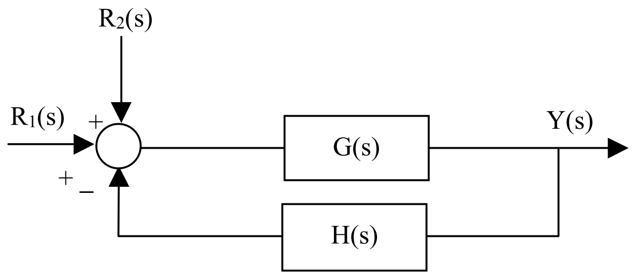
Aplicando superposición, la suma de estos valores de régimen permanente es 3:

$$\frac{10}{3+K}+\frac{1}{2(3+K)}=3$$

$$\boxed{K=\frac{17}{14}}$$

EJERCICIO 3.10.

Obtener el error en régimen permanente del sistema de la figura:



Donde: $$G(s) = \frac{5}{s(s+3)^2} \qquad H(s) = \frac{6}{s+5}$$

Cuando las entradas son: $r_1(t) = 3 \qquad r_2(t) = 4t$

Primer método:

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

Para el escalón $E_1(s)$:

$$E_1(s) = R_1(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} R_1(s)$$

$$E_1(s) = \frac{3}{s} - \frac{\frac{5}{s(s+3)^2}}{1+\frac{5}{s(s+3)^2}\cdot\frac{6}{s+5}}\cdot\frac{3}{s} = \frac{3}{s} - \frac{15(s+5)}{(s(s+3)^2(s+5)+30)s}$$

$$e_{1\infty} = \lim_{s\to 0} s\cdot E_1(s) = \lim_{s\to 0} s\left[\cdot\frac{3}{s} - \frac{15(s+5)}{(s(s+3)^2(s+5)+30)s}\right] = \lim_{s\to 0} 3 - \frac{15(s+5)}{s(s+3)^2(s+5)+30} = 0.5$$

Para la rampa $E_2(s)$:

$$E_2(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{5(s+5)}{s(s+3)^2(s+5)+30}\cdot\frac{4}{s^2}$$

$$E_2(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{20(s+5)}{(s(s+3)^2(s+5)+30)s^2}$$

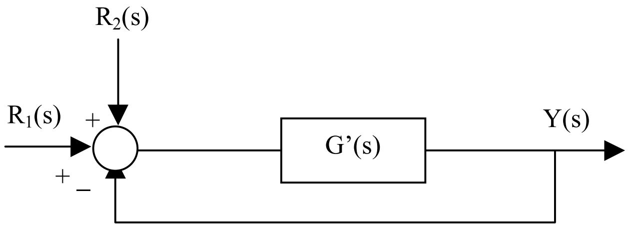
$$e_{2\infty} = \lim_{s\to 0} s\cdot E_2(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\left[\frac{4}{s^2} - \frac{20(s+5)}{(s(s+3)^2(s+5)+30)s^2}\right]$$

$$e_{2\infty} = \lim_{s\to 0}\frac{4(s(s+3)^2(s+5)+30) - 20(s+5)}{(s(s+3)^2(s+5)+30)s} = \infty$$

Aplicando superposición:

$$e_{total} = e_{1\infty} + e_{2\infty} = 0.5 + \infty = \infty$$

Segundo método:



$$G'(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)\cdot(H(s) - 1)}$$

$$H(s) - 1 = \frac{6}{s+5} - 1 = \frac{1-s}{s+5}$$

$$G'(s) = \frac{\dfrac{5}{s(s+3)^2}}{1 + \dfrac{5}{s(s+3)^2}\cdot\dfrac{1-s}{s+5}} = \frac{5(s+5)}{s(s+3)^2(s+5) + 5(1-s)}$$

Para el escalón:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0}\frac{5(s+5)}{s(s+3)^2(s+5) + 5(1-s)} = \frac{25}{5} = 5$$

$$e_p = 3\cdot\frac{1}{1+5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Para la rampa:

$$e_v = \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{5(s+5)}{s(s+3)^2(s+5) + 5(1-s)} = 0$$

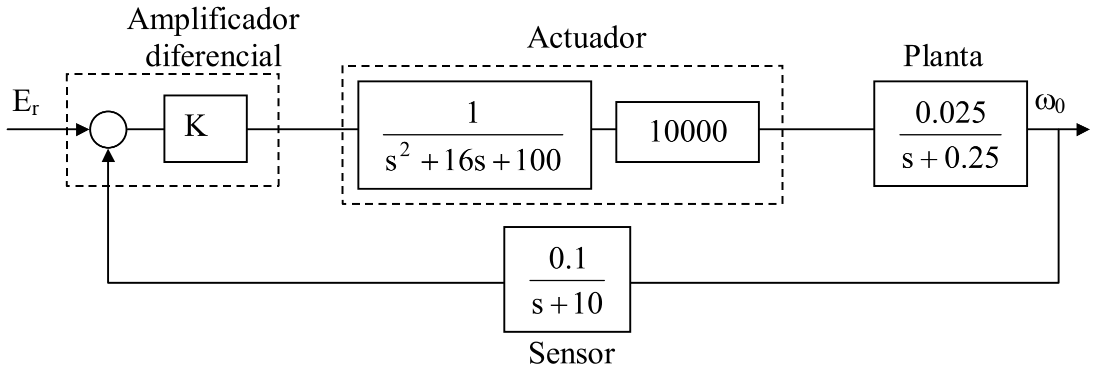
$$e_v = \frac{1}{0} = \infty$$

Aplicando superposición al sistema lineal tiempo invariante:

$$e_{total} = e_p + e_v = 0.5 + \infty = \infty$$

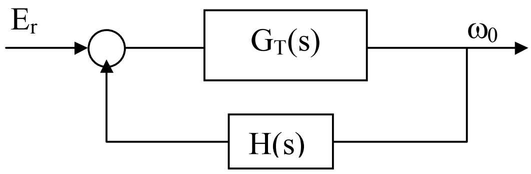
EJERCICIO 3.11.

Para el sistema del ejercicio 4.13, calcular el error ante una entrada (E_r) escalón de amplitud 2. y ante una rampa de pendiente 10.



$$G_T(s) = K \cdot \frac{1}{s^2+16s+100} \cdot 1000 \cdot \frac{0.025}{s+0.25} = \frac{250K}{(s^2+16s+100)(s+0.25)}$$

$$H(s) = \frac{0.1}{s+10}$$



El sistema es tipo 0, por lo tanto presentará error finito ante entrada escalón y error infinito ante la entrada rampa.

Para la entrada escalón se tiene:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G_T(s) \cdot H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{250K}{(s^2+16s+100)(s+0.25)} \cdot \frac{0.1}{s+10} = 0.1K$$

$$e_p = \frac{2}{1+K_p} = \frac{2}{1+0.1K}$$

Ante la entrada escalón presenta un error finito que depende del valor de la ganancia K del amplificador.

Para la entrada rampa se tiene:

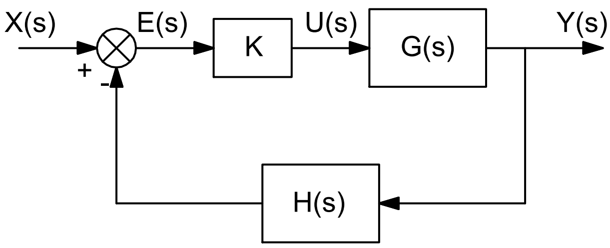
$$K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G_T(s) \cdot H(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{250K}{(s^2+16s+100)(s+0.25)} \cdot \frac{0.1}{s+10} = 0$$

$$e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ante la rampa tendrá error infinito.

EJERCICIO 3.12.

Para el sistema de control cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura:



$$G(s) = \frac{3(s+0.66)}{s^2+4s+5}$$

$$H(s) = \frac{10}{(2s+8)(s+6)}$$

$$K = 1$$

1. Calcular el error de posición mediante las fórmulas (ep=1/(1+Kp))
2. Calcular el error como Y(s)-X(s)
3. Comprobar si ambos errores coinciden y por qué
4. Obtener la función temporal de la señal de error

1. Error de posición:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s+2}{s^2+4s+5}\frac{5}{(s+4)(s+6)} = \frac{10}{120} = 0.083$$

$$e_{p1} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+0.083} = 0.923$$ Error muy elevado para la entrada escalón unidad.

2. Error como diferencia entre entrada y salida.

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\frac{(3s+2)(s+4)(s+6)}{(s^2+4s+5)(s+4)(s+6)+15s+10}$$

$$e_{p2} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\frac{(3s+2)(s+4)(s+6)}{(s^2+4s+5)(s+4)(s+6)+15s+10}\right)$$

$$e_{p2} = \lim_{s\to 0} 1 - \frac{(3s+2)(s+4)(s+6)}{(s^2+4s+5)(s+4)(s+6)+15s+10} = 1 - \frac{48}{130} = 1 - 0.37 = 0.63$$

3. Comparación de errores.

No, no coinciden y es lógico porque en el apartado 1 se considera el error después del comparador, teniendo en cuenta la realimentación. En el apartado 2 se hace la diferencia entre entrada y salida sin tener en cuenta la realimentación. En algunos sistemas mirar este error puede ser incluso erróneo.

4. Función temporal de la señal de error.

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+K\cdot G(s)H(s)}=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{3s+2}{s^2+4s+5}\cdot\frac{5}{(s+4)(s+6)}}=\frac{1}{s}\frac{(s^2+4s+5)(s+4)(s+6)}{(s^2+4s+5)(s+4)(s+6)+5(3s+2)}$$

$$E(s)=\frac{(s^2+4s+5)(s+4)(s+6)}{s(s+1.546)(s+7.132)((s+2.661)^2+2.170^2)}$$

Descomponiendo E(s) en fracciones se llega a:

$$E(s)=\frac{0.923}{s}-\frac{0.256}{s+1.546}+\frac{0.0985}{s+7.132}+\frac{0.235s+1.556}{(s+2.661)^2+2.170^2}$$

$$\frac{0.235s+1.556}{(s+2.661)^2+2.170^2}=0.235\frac{s+6.621}{(s+2.661)^2+2.170^2}=0.235\frac{s+6.621-3.96+3.96}{(s+2.661)^2+2.170^2}=$$

$$=0.235\frac{s+6.621-3.96+3.96}{(s+2.661)^2+2.170^2}=0.235\left[\frac{s+2.661}{(s+2.661)^2+2.170^2}+\frac{3.96}{(s+2.661)^2+2.170^2}\right]=$$

$$=0.235\left[\frac{s+2.661}{(s+2.661)^2+2.170^2}+\frac{3.96}{2.170}\frac{2.170}{(s+2.661)^2+2.170^2}\right]=$$

$$=0.235\left[\frac{s+2.661}{(s+2.661)^2+2.170^2}+1.825\frac{2.170}{(s+2.661)^2+2.170^2}\right]$$

$$E(s)=\frac{0.923}{s}-\frac{0.256}{s+1.546}+\frac{0.0985}{s+7.132}+0.235\left[\frac{s+2.661}{(s+2.661)^2+2.170^2}+1.825\frac{2.170}{(s+2.661)^2+2.170^2}\right]$$

Aplicando las tablas de las transformadas de Laplace:

$$\frac{1}{s}\ \rightarrow\ 1$$

$$\frac{1}{s+a}\ \rightarrow\ e^{-at}$$

$$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\ \rightarrow\ e^{-at}\cos\omega t$$

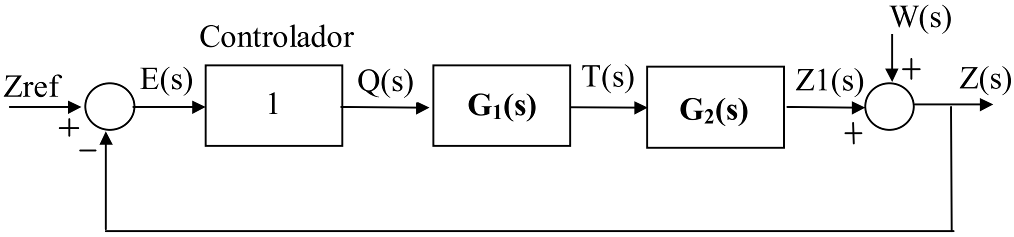
$$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\ \rightarrow\ e^{-at}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$e(t)=0.923-0.256e^{-1.546t}+0.0985e^{-7.132t}+0.235e^{-2.661t}\left[\cos(2.170t)+1.825\,\mathrm{sen}(2.170t)\right]$$

$$\boxed{e(t)=0.923-0.256e^{-1.546t}+0.0985e^{-7.132t}+0.489e^{-2.661t}\,\mathrm{sen}(2.170t+0.501)}$$

EJERCICIO 3.13.

Para el sistema del ejercicio 4.14. donde el diagrama de bloques del sistema es:



$$G_1(s)=\frac{T(s)}{Q(s)}=\frac{1}{s+5} \qquad G_2(s)=\frac{Z_1(s)}{T(s)}=\frac{0.3}{s(s+50)}$$

- Calcular los errores en estado estacionario ante entradas escalón, rampa y aceleración, cuando la perturbación W(s) es nula.
- Calcular los mismos errores anteriores cuando la perturbación W(s) es un escalón de amplitud 2.
- Calcular el valor de la salida, en régimen permanente debido exclusivamente a la perturbación W(s).
- ¿Es lógico este último valor obtenido? ¿Porqué? ¿Cómo sería el movimiento del globo?

En este caso para el cálculo del error de estado estacionario ante las diferentes entradas de prueba basta con la aplicación inmediata de las formulas de error en estado estacionario.

$$\boxed{G(s)=\frac{Z_1(s)}{Q(s)}=\frac{0.3}{s(s+50)(s+5)}}$$

- Error de Posición:

$$e_p=\frac{1}{1+K_p}; \quad K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{0.3}{s(s+50)(s+5)}=\infty$$

$$e_p=\frac{1}{1+K_p}=0$$

Lo que ya se sabía de antemano por ser tipo 1.

- Error de Velocidad:

$$e_v=\frac{1}{K_v}; \quad K_v=\lim_{s\to 0}s\cdot G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{0.3}{s(s+50)(s+5)}=0.0012$$

$$e_p=\frac{1}{0.0012}=833.33\ \text{mtros}$$

- Error de Aceleración:

$$e_a=\frac{1}{K_a}; \quad K_a=\lim_{s\to 0}s^2\cdot G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}s^2\frac{0.3}{s(s+50)(s+5)}=0$$

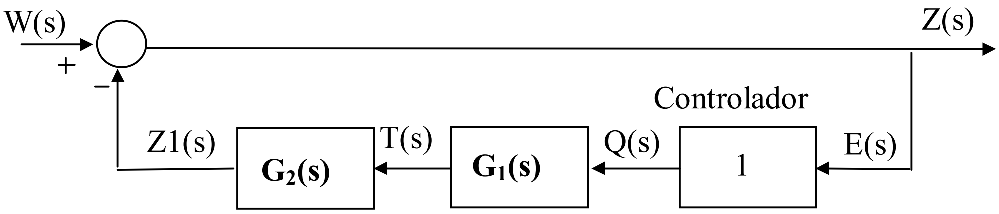
$$e_a = \frac{1}{0} = \infty$$

Algo que también se sabía ya que es tipo 1.

- Cálculo de los errores anteriores cuando la perturbación es un escalón de amplitud 2.

Al aparecer la señal de perturbación, la señal de error para cada entrada típica de prueba va a verse modificada por la acción de aquella, de forma que será necesario calcular la aportación que produce W en E(s).

Por superposición:
Se muestra a continuación el diagrama de bloques cuando la entrada Zref es cero y sólo existe la entrada correspondiente a la perturbación.



Se comprueba cómo la señal de error del sistema original es igual, cuando Zref=0, a la salida del sistema y al error del diagrama de bloques anterior (señal de error de perturbación). Luego, el valor en estado estacionario de la señal de error original debido a la perturbación, se puede calcular de varias formas, una de ellas es la siguiente:

$$M(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{s^3 + 55s^2 + 250s}{s^3 + 55s^2 + 250s + 0.3}$$

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot M(s) \cdot W(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s^3 + 55s^2 + 250s}{s^3 + 55s^2 + 250s + 0.3} \cdot \frac{2}{s} = 0$$

Esto indica que en estado estacionario la perturbación tipo escalón no va a tener influencia en la salida y que no va a influir en el error en estado estacionario.
El error en estado estacionario, para las señales típicas de prueba en la entrada y cuando la perturbación es un escalón de amplitud 2, coincide con lo calculado en el apartado anterior.

- Cálculo del valor de la salida, en régimen permanente, debido exclusivamente a la perturbación.

La transformada de la señal de salida, cuando sólo existe la perturbación:

$$Z(s) = M'(s) \cdot W(s) = \frac{s^3 + 55s^2 + 250s}{s^3 + 55s^2 + 250s + 0.3} \cdot W(s)$$

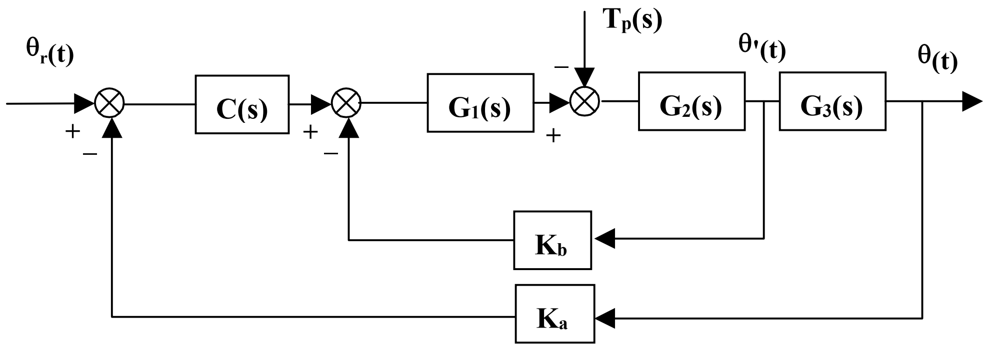
Y, como se ha comprobado en el apartado anterior la salida, el valor que toma ante una entrada escalón de amplitud 2 y en estado estacionario, es cero.

- ¿Es lógico este último valor obtenido? ¿Por qué?

Sí es lógico que la perturbación tipo escalón no tenga efecto en la salida en estado estacionario ya que, como se ve en el diagrama de bloques con sólo la entrada de perturbación, la realimentación presenta un integrador de forma que irá incrementando su valor hasta igualar el valor de amplitud del escalón de la perturbación, momento en el cual la diferencia será cero y la salida también. Decir, a este respecto, que ésta es una de las principales ventajas del controlador tipo integral y que esta planta tiene componentes similares.

EJERCICIO 3.14.

El diagrama de bloques del sistema de control de posición y velocidad de una de las articulaciones de un brazo industrial robotizado tiene la siguiente estructura:

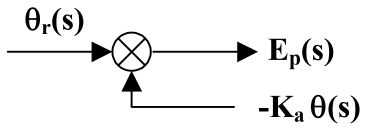


Donde:

$$G_1(s)=\frac{0.1}{0.03s+1};\qquad G_2(s)=\frac{1}{0.05s+1};\qquad K_a=5\qquad y\qquad K_b=2s+1$$

1- Calcular los errores de posición y velocidad que tendrá el brazo robótico, en estado estacionario, ante señales de entrada unitarias tipo escalón y rampa cuando el controlador C(s) es una ganancia de valor unidad y la señal de perturbación es nula.
2- ¿Cuáles serán los nuevos valores de los errores anteriores si la señal de perturbación es un escalón unitario?.

1- La señal de error de posición será la salida del primer punto de suma:



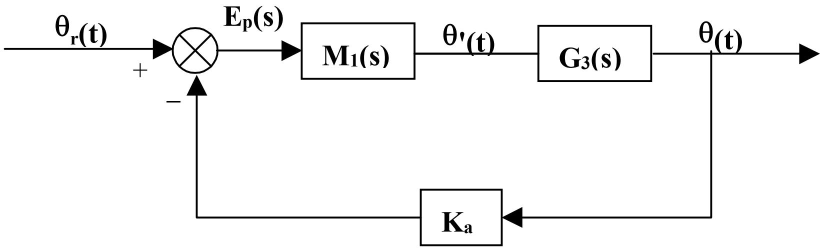
Resolviendo el bucle interno, se tiene:

$$M_1(s)=\frac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{1+G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot K_b}$$

y sustituyendo y operando:

$$M_1(s) = \frac{\frac{0.1}{0.03s+1}\cdot\frac{1}{0.05s+1}}{1+\frac{0.1}{0.03s+1}\cdot\frac{1}{0.05s+1}\cdot(2s+1)} = \frac{0.1}{0.0015s^2+0.28s+1.1}$$

Dicha resolución simplifica el diagrama inicial de bloques al siguiente:



No se conoce la función de transferencia de $G_3(s)$. Pero en el diagrama de bloques del enunciado puede verse que la entrada de dicho bloque es la derivada de θ(t) y la respuesta es la propia θ(t), luego el bloque será un elemento integrador, por lo que se tiene:

$$G_3(s) = \frac{1}{s}$$

Quedando la función de transferencia de lazo abierto:

$$\text{F.T.L.A.} = M_1(s)\cdot G_3(s)\cdot K_a = \frac{0.1}{0.0015s^2+0.28s+1.1}\cdot\frac{1}{s}\cdot 5 = \frac{0.5}{s\,(0.0015s^2+0.28s+1.1)}$$

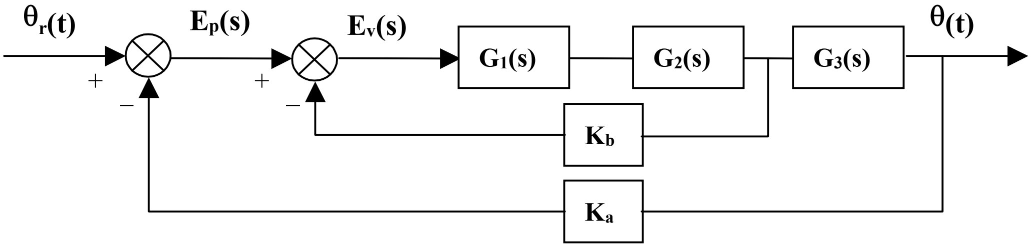
Luego el error de posición ante una entrada escalón unitario, será:

$$e_{rp} = \frac{1}{1+K_p};\quad \text{siendo}\ \ K_p = \lim_{s\to 0}\text{F.T.L.A.} = \frac{0.5}{0} = \infty \quad \text{luego:}\ \ e_{rp} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

y el error de posición ante una entrada rampa unitaria:

$$e_{rp} = \frac{1}{K_v};\quad \text{siendo}\ \ K_v = \lim_{s\to 0} s\cdot(\text{F.T.L.A.}) = \frac{0.5}{1.1} = 0.4545 \quad \text{luego:}\ \ e_{rp} = \frac{1}{0.4545} = 2.2$$

Se calculan ahora los errores de velocidad. Será necesario relacionar $E_v(s)$ con la entrada $\Theta_r(s)$ al sistema, definiendo $E_v(s)$ de la siguiente forma:



$$E_v(s) = E_p(s) - K_b \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot E_v(s) \quad \Rightarrow \quad E_v(s) = \frac{E_p(s)}{1 + K_b \cdot G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

Pero en dicha ecuación se desconoce $E_p(s)$. Por otro lado, se tiene:

$$E_p(s) = \Theta_r(s) - K_a \cdot G_3(s) \cdot M_1(s) \cdot E_p(s) \quad \Rightarrow \quad E_p(s) = \frac{\Theta_r(s)}{1 + K_a \cdot G_3(s) \cdot M_1(s)}$$

sustituyendo este valor en la ecuación anterior:

$$E_v(s) = \frac{\Theta_r(s)}{\left[1 + K_b \cdot G_1(s) \cdot G_2(s)\right]\left[1 + K_a \cdot G_3(s) \cdot M_1(s)\right]} \quad \text{y} \quad e_{rp} = \lim_{s \to 0} s \cdot E_v(s)$$

Luego el error de velocidad ante una entrada escalón unitario, será:

$$e_{rp} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{\frac{1}{s}}{\left[1 + K_a G_3(s) M_1(s) + K_b G_1(s) G_2(s) + K_a K_b G_1(s) G_2(s) G_3(s) M_1(s)\right]}$$

$$e_{rp} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + K_1 + K_2 + K_3}$$

con:

$$K_1 = \lim_{s \to 0} K_a\, G_3(s)\, M_1(s) = \lim_{s \to 0} \left(5 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{0.1}{0.0015 s^2 + 0.28 s + 1.1} \right) = \frac{0.5}{0} = \infty$$

$$K_2 = \lim_{s \to 0} K_b\, G_1(s)\, G_2(s) = \lim_{s \to 0} \left((2s + 1) \cdot \frac{0.1}{0.03 s + 1} \cdot \frac{1}{0.05 s + 1} \right) = \frac{0.1}{1} = 0.1$$

$$K_3 = \lim_{s \to 0} K_a\, K_b\, G_1(s)\, G_2(s)\, G_3(s)\, M_1(s) =$$

$$= \lim_{s \to 0} \left(5 \cdot (2s + 1) \cdot \frac{0.1}{0.03 s + 1} \cdot \frac{1}{0.05 s + 1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{0.1}{0.0015 s^2 + 0.28 s + 1.1} \right) = \frac{0.05}{0} = \infty$$

Luego sustituyendo los valores de K_1, K_2 y K_3 en la ecuación del error en régimen permanente, se tiene:

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + \infty + 0.1 + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

y el error de velocidad ante una entrada rampa unitaria:

$$e_{rp} = \frac{1}{K_1^{'} + K_2^{'} + K_3^{'}}$$

$$K_1^{'} = \lim_{s\to 0} s \cdot K_a\, G_3(s) M_1(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{0.1}{0.0015 s^2 + 0.28 s + 1.1} \right) = \frac{0.5}{1.1} = 0.4545$$

$$K_2^{'} == \lim_{s\to 0} s \cdot K_b\, G_1(s) G_2(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \left((2s+1) \cdot \frac{0.1}{0.03s+1} \cdot \frac{1}{0.05s+1} \right) = 0$$

$$K_3^{'} = \lim_{s\to 0} s \cdot K_a\, K_b\, G_1(s) G_2(s) G_3(s) M_1(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s \cdot \left(5 \cdot (2s+1) \cdot \frac{0.1}{0.03s+1} \cdot \frac{1}{0.05s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{0.1}{0.0015 s^2 + 0.28 s + 1.1} \right) = \frac{0.05}{1.1} = 0.0455$$

Y sustituyendo los valores hallados en la ecuación anterior, obtenemos el error de velocidad en régimen permanente para la entrada rampa unitaria:

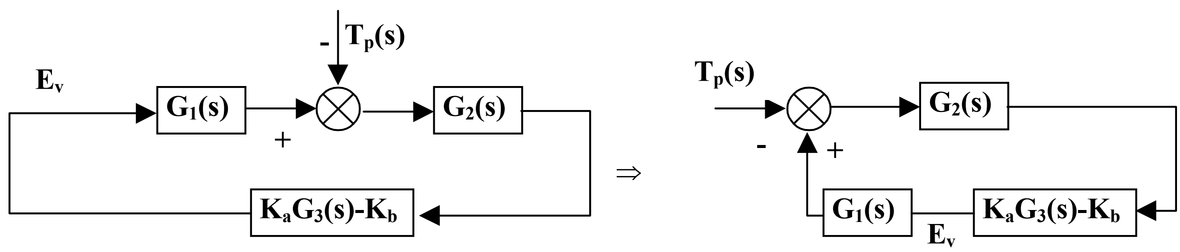
$$e_{rp} = \frac{1}{0.4545 + 0 + 0.0455} = \frac{1}{0.5} = 2$$

Ahora debemos considerar que la perturbación $\mathbf{T_p(s)}$ es un escalón unitario. Aplicaremos el principio de superposición:

$$e_{rp\,(total)} = e_{rp}\Big|_{\Theta_r} + e_{rp}\Big|_{T_p} \quad = \text{Error de posición con las dos entradas.}$$

$$e_{rp\,(total)} = e_{rp}\Big|_{\Theta_r} + e_{rp}\Big|_{T_p} \quad = \text{Error de velocidad con las dos entradas.}$$

Comenzando por el cálculo del error de velocidad. El diagrama de bloques se puede simplificar de la siguiente manera:



$$E_v(s) = \left[K_a \cdot G_3(s) - K_b\right] \cdot G_2(s) \cdot \left[G_1(s) \cdot E_v(s) - T_p(s)\right] =$$

$$= \left[K_b G_2(s) - K_a G_2(s) \cdot G_3(s)\right] \cdot T_p(s) + \left[K_a G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) - K_b G_1(s) \cdot G_2(s)\right] \cdot E_v(s)$$

despejando $E_v(s)$:

$$E_v(s) = \frac{\left[K_b G_2(s) - K_a G_2(s) \cdot G_3(s)\right] \cdot T_p(s)}{1 + \left[K_a G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) - K_b G_1(s) \cdot G_2(s)\right]} =$$

$$= \frac{\left[(2s+1)\dfrac{1}{0.05s+1} - 5\dfrac{1}{0.05s+1}\dfrac{1}{s}\right]\dfrac{1}{s}}{1+(2s+1)\dfrac{0.1}{0.03s+1}\dfrac{1}{0.05s+1} - 5\dfrac{0.1}{0.03s+1}\dfrac{1}{0.05s+1}\dfrac{1}{s}} = \frac{(2s^2+s-5)\,(0.03s+1)}{s(0.0015s^3+0.28s^2+1.1s-0.5)}$$

Luego el error de velocidad será:

$$e_{rp}\Big|_{T_p} = \lim_{s\to 0} s\cdot E_v(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{(2s^2+s-5)\,(0.03s+1)}{s(0.0015s^3+0.28s^2+1.1s-0.5)} = \frac{-5}{-0.5} = 10$$

Si ahora se tiene en cuenta solamente la entrada $\Theta_r(s)$ y se halla el error de velocidad: (ya calculado en el apartado anterior),

$$e_{rp}\Big|_{\Theta_r} = 0$$

Quedando el error de velocidad total (Ambas entradas son escalón):

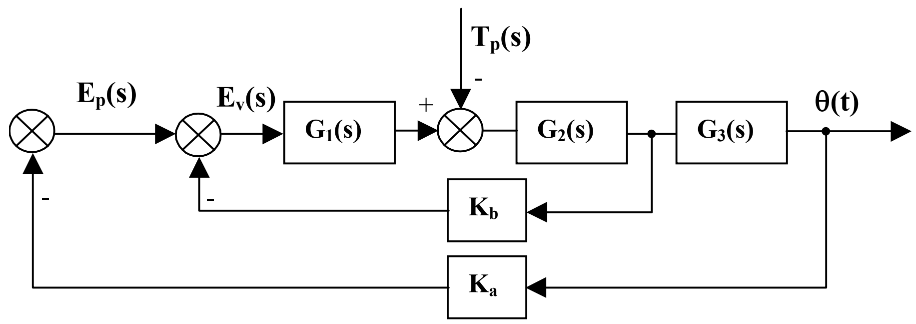
$$e_{rp(total)} = e_{rp}\Big|_{\Theta_r} + e_{rp}\Big|_{T_p} = 0+10 = 10$$

Ahora considerando que la entrada $\Theta_r(s)$ es una rampa unitaria $\left[\Theta_r(s) = \dfrac{1}{s^2}\right]$

Del apartado anterior, se tiene que el error de velocidad del sistema ante la entrada rampa unitaria es 2. Luego el error de velocidad total será:

$$e_{rp(total)} = e_{rp}\Big|_{\Theta_r} + e_{rp}\Big|_{T_p} = 2+10 = 12$$

Calculando ahora el error de posición. Del diagrama de bloques obtenemos:



$$E_p(s) = -K_a\cdot\Theta(s) = -K_a\cdot\left[E_v(s)\cdot G_1(s) - T_p(s)\right]\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)$$

$$E_v(s) = E_p(s) - K_b(s)\left[E_v(s)\cdot G_1(s) - T_p(s)\right]\cdot G_2(s)$$

operando:

$$E_v(s)\left[1+K_b(s)G_1(s)G_2(s)\right] = E_p(s) + K_b(s)T_p(s)G_2(s)$$

con lo que:

$$E_v(s) = \frac{E_p(s) + K_b(s)T_p(s)G_2(s)}{1 + K_b(s)G_1(s)G_2(s)};$$

sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$E_p(s) = -K_a\left[\frac{E_p(s) + K_b(s)T_p(s)G_2(s)}{1 + K_b(s)G_1(s)G_2(s)}\,G_1(s) - T_p(s)\right]G_2(s)G_3(s)$$

Operando:

$$E_p(s)\left[1 + K_b(s)G_1(s)G_2(s)\right] = -K_a\,G_1(s)G_2(s)G_3(s)E_p(s) - K_a\,G_1(s)G_2^2(s)G_3(s)T_p(s) + \\ + K_a\,T_p(s)G_2(s)G_3(s)\left[1 + K_b(s)G_1(s)G_2(s)\right]$$

luego:

$$E_p(s) = \frac{-K_a\,T_p(s)G_2^2(s)G_1(s)G_3(s) + K_a\,T_p(s)G_2(s)G_3(s)\left[1 + K_b(s)G_1(s)G_2(s)\right]}{1 + K_b(s)G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

sustituyendo las funciones de transferencia, tenemos:

$$E_p(s) = \frac{-5\frac{1}{s}\left(\frac{1}{0.05s+1}\right)^2\frac{0.1}{0.03s+1}\frac{1}{s} + 5\frac{1}{s}\frac{1}{0.05s+1}\frac{1}{s}\left(1 + (2s+1)\frac{0.1}{0.03s+1}\frac{1}{0.05s+1}\right)}{1 + (2s+1)\frac{0.1}{0.03s+1}\frac{1}{0.05s+1} + \frac{0.1}{0.03s+1}\frac{1}{0.05s+1}\frac{1}{s}} =$$

$$= \frac{0.0075s^2 + 1.4s + 5}{s(0.05s+1)(0.0015s^3 + 0.28s^2 + 1.1s + 0.5)}$$

luego,

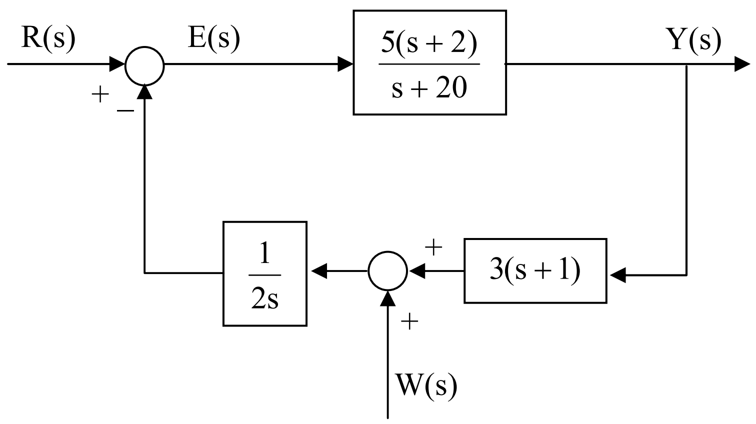
$$e_{rp}\Big|_{T_p} = \lim_{s\to 0} s\cdot E_p(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{0.0075s^2 + 1.4s + 5}{s(0.05s+1)\,(0.0015s^3 + 0.28s^2 + 1.1s + 0.5)} = \frac{5}{1\cdot 0.5} = 10$$

Luego el error de posición total será:

$$e_{rp\,(total)} = e_{rp}\Big|_{\Theta_r} + e_{rp}\Big|_{T_p} = 2.2 + 10 = 12.2$$

EJERCICIO 3.15.

Calcular el valor de los errores de régimen permanente para el sistema mostrado en la figura cuando la perturbación W(s) un escalón de amplitud 5.



Considerando como entrada únicamente R(s):

Escalón:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)\cdot H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{5(s+2)}{s+20}\cdot\frac{1}{2s}\cdot 3(s+1) = \infty$$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Rampa:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\cdot G(s)\cdot H(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{5(s+2)}{s+20}\cdot\frac{1}{2s}\cdot 3(s+1) = \frac{5\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 2} = \frac{3}{4}$$

$$e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{4}{3} = 1.33$$

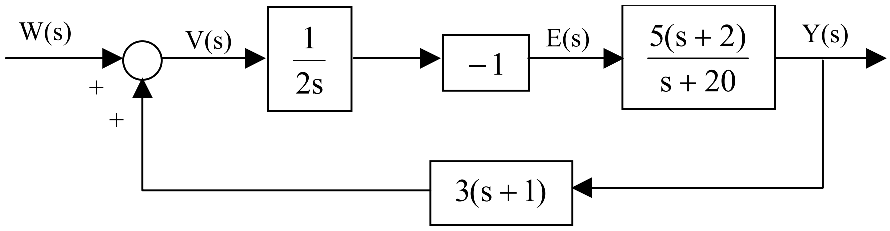
Aceleración:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2\cdot G(s)\cdot H(s) = \lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{5(s+2)}{s+20}\cdot\frac{1}{2s}\cdot 3(s+1) = 0$$

$$e_a = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

Se considera ahora como entrada únicamente la perturbación W(s).

El diagrama de bloques al anular la entrada R(s) queda según se muestra en la siguiente figura.



$$V(s) = W(s) + 3(s+1)Y(s)$$

$$V(s) = W(s) + \frac{1}{2s}\cdot(-1)\cdot\frac{5(s+2)}{s+20}\cdot 3(s+1)\cdot V(s)$$

$$V(s) = W(s) + \frac{-7.5(s+2)(s+1)}{s(s+20)}\cdot V(s)$$

$$\left(1 + \frac{7.5(s+2)(s+1)}{s(s+20)}\right)V(s) = W(s)$$

$$E(s) = \frac{-1}{2s}V(s)$$

$$\left(1 + \frac{7.5(s+2)(s+1)}{s(s+20)}\right)(-2s)E(s) = W(s)$$

$$\left(\frac{s(s+20) + 7.5(s+2)(s+1)}{s(s+20)}\right)(-2s)E(s) = W(s)$$

$$E(s) = -\frac{s+20}{2s(s+20) + 15(s+2)(s+1)}W(s)$$

Luego el valor del error en estado estacionario debido a la perturbación es:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{-(s+20)}{2s(s+20)+15(s+2)(s+1)}\frac{5}{s} = \frac{-5\cdot 20}{15\cdot 2} = \frac{-10}{3} = -3.33$$

Aplicando superposición se tiene:

$$e_{total}(\infty) = e_{R(s)}(\infty) + e_{W(s)}(\infty)$$

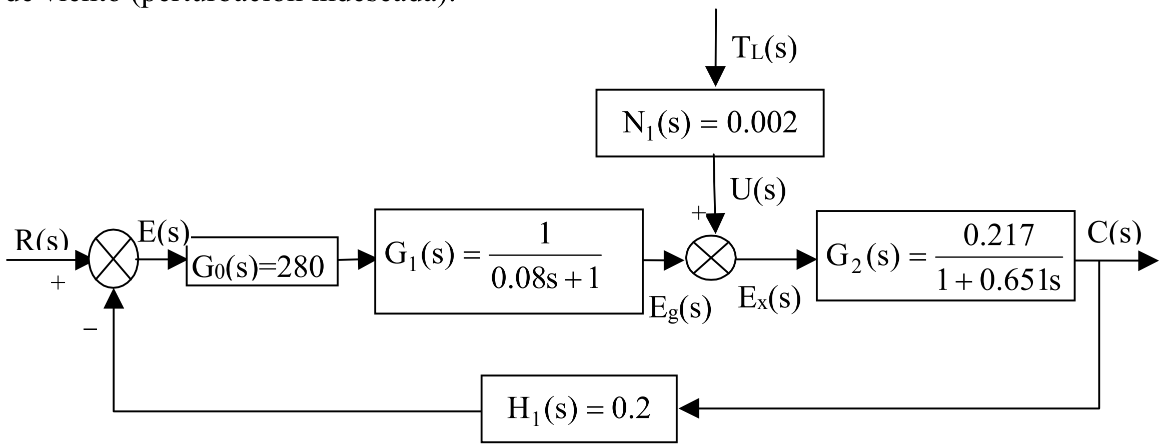
$$e_p = 0 - 3.33 = -3.33$$

$$e_v = 1.33 - 3.33 = -2$$

$$e_a = \infty - 3.33 = \infty$$

EJERCICIO 3.16.

En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de posición de una antena giratoria de un radar, en el que en un momento determinado está sometido a una racha de viento (perturbación indeseada):



1. Calcular el error E(s) que tendrá la antena, en estado estacionario, si ambas entradas, R(s) y $T_L(s)$ son un escalón unitario.

2. Calcular el error $E_x(s)$ bajo los mismos supuestos del apartado anterior.

Suponiendo inicialmente que la perturbación $T_L(s) = 0$, se calcula el error E(s) cuando la entrada del sistema es $R(s) = \frac{1}{s}$:

$$E(s) = R(s) - C(s) \cdot H_1(s)$$

$$C(s) = M_1(s) \cdot R(s)$$

$$M_1(s) = \frac{G_0(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_0(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H_1(s)} = \frac{280 \cdot \frac{1}{0.08s+1} \cdot \frac{0.217}{0.651s+1}}{1 + 280 \cdot \frac{1}{0.08s+1} \cdot \frac{0.217}{0.651s+1} \cdot 0.2}$$

$$M_1(s) = \frac{60.76}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152}$$

Luego: $$E(s) = R(s)\left[1 - M_1(s) \cdot H_1(s)\right] = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{0.2 \cdot 60.76}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152}\right]$$

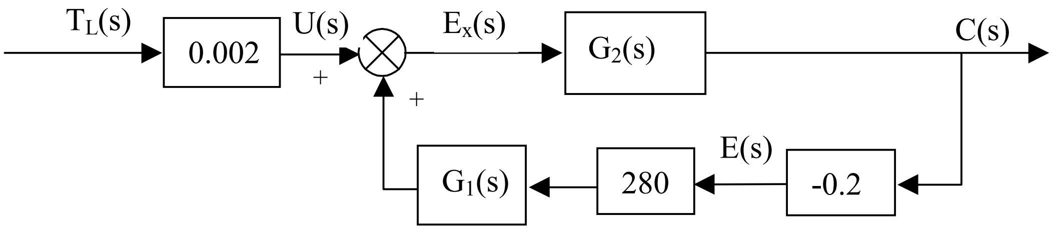
$$E(s) = \frac{1}{s} \frac{0.0521s^2 + 0.731s + 1}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152}$$

El error en régimen permanente será:

$$e_{rp}\Big|_{T_L=0} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{0.0521s^2 + 0.731s + 1}{s(0.0521s^2 + 0.731s + 13.152)} = \frac{1}{13.152} = 0.0760$$

Ahora considerando que la entrada R(s) es nula y que únicamente actúa la perturbación $T_L(s) = \frac{1}{s}$:

Ahora el sistema se puede representar como sigue:



$$E(s) = -0.2 \cdot C(s)$$

$$C(s) = M_2(s) \cdot U(s) = M_2(s) \cdot 0.002 \cdot T_L(s)$$

$$M_2(s) = \frac{G_2(s)}{1 - G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot 280 \cdot (-0.2)} = \frac{\frac{0.217}{1 + 0.651s}}{1 + \frac{280 \cdot 0.217 \cdot 0.2}{(0.08s + 1)\ (0.651s + 1)}}$$

$$M_2(s) = \frac{0.217(0.08s + 1)}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152}$$

Quedando:

$$E(s) = -0.2 \cdot M_2(s) \cdot 0.002 \cdot T_L(s) = \frac{1}{s} \frac{-0.2 \cdot 0.002 \cdot 0.217\ (0.08s + 1)}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152}$$

$$E(S) = \frac{-0.0000868\ (0.08s + 1)}{s\ (0.0521s^2 + 0.731s + 13.152)}$$

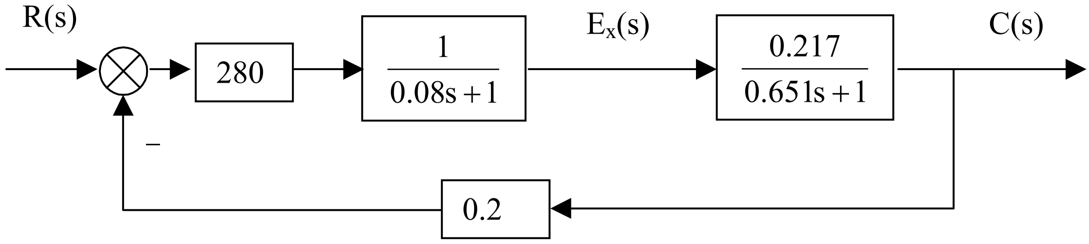
El error en régimen permanente será:

$$e_{rp}\Big|_{R(s)=0} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{-0.0000868(0.08s + 1)}{s(0.0521s^2 + 0.731s + 13.152)} = -0.0000065$$

Aplicando el principio de superposición, se tiene:

$$e_{rp(total)} = e_{rp}\Big|_{T_L(s)=0} + e_{rp}\Big|_{R(s)=0} = 0.076 - 0.0000065 = 0.0760$$

2. Igualmente, se comienza suponiendo que $T_L(s) = 0$ y la entrada R(s) es un escalón unitario. Quedando el sistema:



$$E_x(s) = \frac{280}{0.08s+1}\cdot E(s) = \frac{280}{0.08s+1}\cdot\left[R(s) - 0.2\ C(s)\right] =$$

$$= \frac{280}{0.08s+1}\left[R(s) - 0.2\frac{280\cdot 0.217}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152}\right] =$$

$$= \frac{280}{0.08s+1}\frac{0.0521s^2 + 0.731s + 1}{s(0.0521s^2 + 0.731s + 13.152)}$$

$$e_{rp}\Big|_{T_L=0} = \lim_{s\to 0} s\cdot E_x(s) = \lim_{s\to 0}\frac{280}{0.08s+1}\cdot\frac{0.0521s^2 + 0.731s + 1}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152} = 280\cdot\frac{1}{13.152} = 21.2895$$

Ahora considerando que la entrada nula es R(s) y $T_L(s)$ es un escalón unitario. El sistema quedará de la misma forma que en el primer apartado, teniendo ahora que:

$$E_x(s) = U(s) - \frac{280\cdot 0.2}{0.08s+1}\cdot C(s) = 0.002\cdot T_L(s) - \frac{56}{0.08s+1}\cdot M_2(s)\cdot U(s) =$$

$$= 0.002\cdot T_L(s)\left[1 - \frac{56}{0.08s+1}\cdot\frac{0.217(0.08s+1)}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152}\right] =$$

$$= 0.002\frac{1}{s}\left[\frac{0.0521s^2 + 0.731s + 1}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152}\right]$$

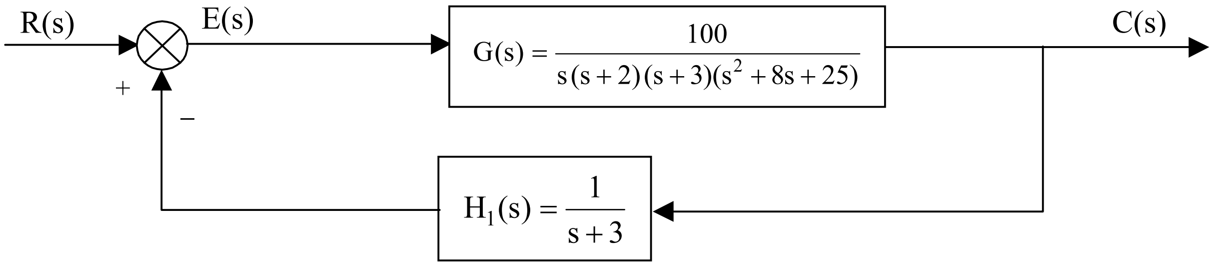
$$e_{rp}\Big|_{R=0} = \lim_{s\to 0} s\cdot E_x(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{0.002}{s}\cdot\left[\frac{0.0521s^2 + 0.721s + 1}{0.0521s^2 + 0.731s + 13.152}\right] = \frac{0.002}{13.152} = 0.000152$$

Aplicando el principio de superposición, se tendrá:

$$e_{rp(total)} = e_{rp}\Big|_{T_L(s)=0} + e_{rp}\Big|_{R(s)=0} = 21.2895 + 0.000152 = 21.2897$$

EJERCICIO 3.17.

Para el sistema del ejercicio 1.13. cuyo diagrama de bloques es:



Calcular el error en régimen permanente ante una entrada escalón unitario y el error en régimen permanente ante una entrada en rampa unitaria.

Se calcula el error E(s) cuando la entrada del sistema es $R(s) = \frac{1}{s}$.

$$E(s) = R(s) - C(s) \cdot H_1(s)$$

$$C(s) = M(s) \cdot R(s)$$

Luego:

$$E(s) = R(s)\left[1 - M(s) \cdot H_1(s)\right] = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{100(s+3)}{s^6+16s^5+110s^4+386s^3+669s^2+450s+100} \cdot \frac{1}{s+3}\right] =$$

$$= \frac{1}{s}\left[\frac{s^6+16s^5+110s^4+386s^3+669s^2+450s}{s^6+16s^5+110s^4+386s^3+669s^2+450s+100}\right] =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{s(s^5+16s^4+110s^3+386s^2+669s+450)}{s^6+16s^5+110s^4+386s^3+669s^2+450s+100} =$$

$$= \frac{s^5+16s^4+110s^3+386s^2+669s+450}{s^6+16s^5+110s^4+386s^3+669s^2+450s+100}$$

El error en régimen permanente será:

$$e_{rp}\Big|_{R(s)} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s^5+16s^4+110s^3+386s^2+669s+450}{s^6+16s^5+110s^4+386s^3+669s^2+450s+100} = \frac{0}{100} = 0$$

Se puede comprobar aplicando:

$$e_{rp}\Big|_{R(s)} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} F.T.L.A.} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{100}{s(s+2)(s+3)^2(s^2+8s+25)}} = \frac{1}{1+\dfrac{100}{0}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

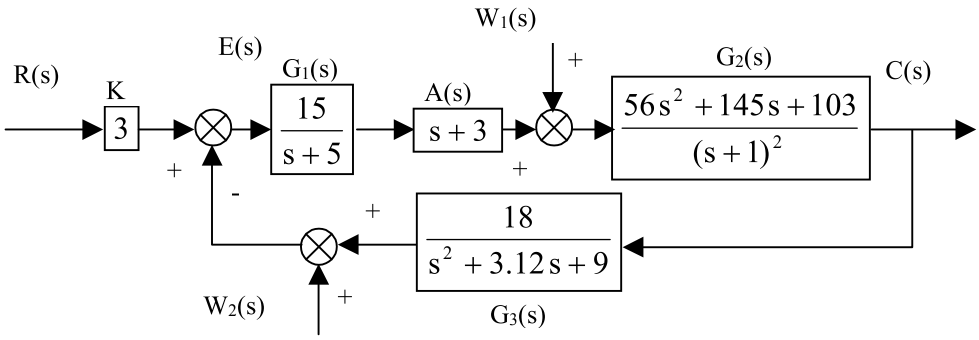
Obviamente debe ser cero ya que se trata de un sistema de tipo 1, sin error ante una entrada escalón.

Ahora consideramos que la entrada R(s) es una rampa unitaria. Se puede seguir el planteamiento del inicio del apartado anterior, pero para evitar operaciones, se aplicará:

$$e_{rp}\Big|_{R(s)=\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s\cdot F.T.L.A.} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s\cdot\dfrac{100}{s(s+2)(s+3)^2(s^2+8s+25)}} = \frac{1}{\dfrac{100}{2\cdot 3^2\cdot 25}} = 4.5$$

EJERCICIO 3.18.

Para el sistema del ejercicio 4.16. cuyo diagrama de bloques final se representa en la siguiente figura:



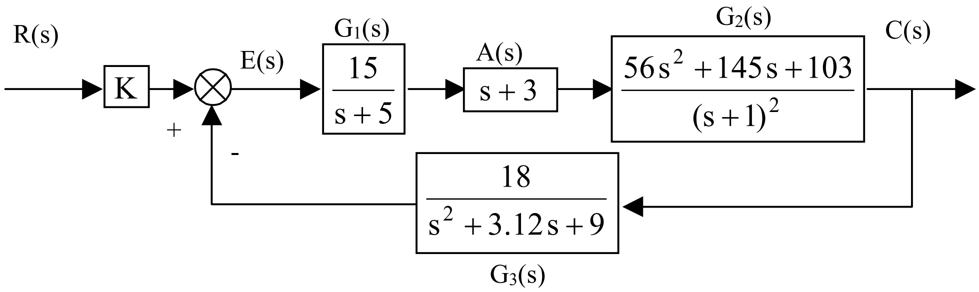
- Calcular la señal de error del sistema cuando todas las entradas al sistema corresponden a señales tipo escalón unidad.

- Comentar ampliamente el efecto que tiene la presencia de la perturbación $W_1(s)$ en el error, y la que tiene $W_2(s)$. ¿Cuál afecta más y por qué?.

Aplicado el principio de superposición se tendrán tres sumandos correspondientes a considerar cada una de las entradas por separado anulando el resto de las entradas en cada caso:

$$e_{rp\,(total)} = e_{rp}\Big|_{R(s)} + e_{rp}\Big|_{W_1(s)} + e_{rp}\Big|_{W_2(s)}$$

Se comienza teniendo en cuenta la entrada R(s) y considerando en resto de las entradas nulas.



La señal de error E(s) valdrá:

$$E(s) = R(s)\cdot K - C(s)\cdot G_3(s) = R(s)\cdot K - E(s)\cdot G_1(s)\cdot A(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)$$

$$E(s)(1 + G_1(s)\cdot A(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)) = R(s)\cdot K$$

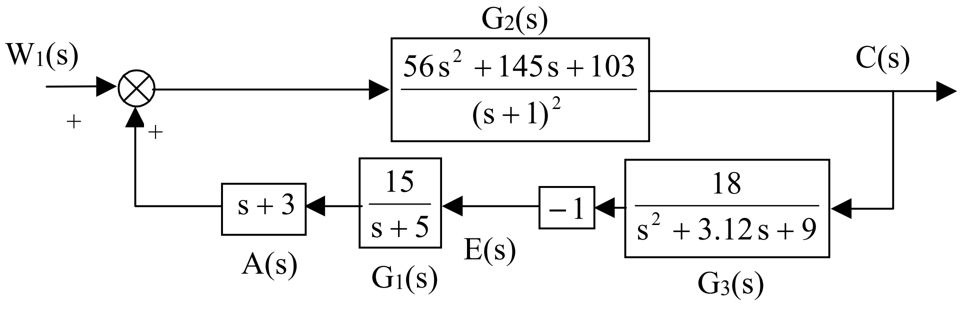
$$E(s) = R(s)\cdot \frac{K}{1 + G_1(s)\cdot A(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)}$$

$$e_{rp}\Big|_{R(s)} = \lim_{s\to 0} s\cdot R(s)\cdot \frac{K}{1 + G_1(s)\cdot A(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)}$$

$$e_{rp}\Big|_{R(s)} = \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{1}{s}\cdot \frac{K}{1 + \frac{15}{s+5}\cdot (s+3)\cdot \frac{56s^2 + 145s + 103}{(s+1)^2}\cdot \frac{18}{s^2 + 3.12s + 9}}$$

$$e_{rp}\Big|_{R(s)} = \lim_{s\to 0} \cdot \frac{3}{1 + \frac{15}{5}\cdot 3\cdot \frac{103}{1}\cdot \frac{18}{9}} = \frac{3}{1 + 3\cdot 3\cdot 103\cdot 2} = 0.0016$$

Ahora suponiendo que la entrada es $W_1(s)$ y las otras dos son nulas, el diagrama de bloques quedará:



Ahora la señal de error E(s) vale:

$$E(s) = -G_3(s)\cdot C(s)$$

$$C(s) = W_1(s)\cdot M(s)$$

siendo:

$$M(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) \cdot A(s) \cdot G_1(s) \cdot G_3(s)}$$

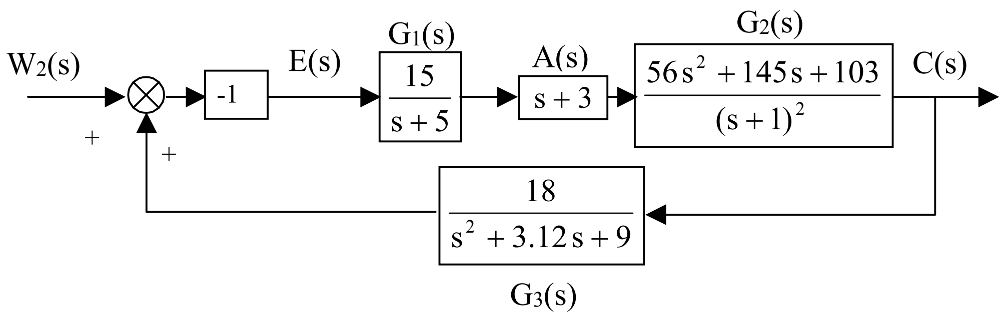
$$e_{rp}\Big|_{W_1(s)} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = -\lim_{s \to 0} s \cdot G_3(s) \cdot C(s) = -\lim_{s \to 0} s \cdot G_3(s) \cdot W_1(s) \cdot M(s)$$

$$e_{rp}\Big|_{W_1(s)} = -\lim_{s \to 0} s \cdot G_3(s) \cdot W_1(s) \cdot \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) \cdot A(s) \cdot G_1(s) \cdot G_3(s)}$$

$$e_{rp}\Big|_{W_1(s)} = -\lim_{s \to 0} s \cdot \frac{18}{s^2 + 3.12s + 9} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\dfrac{56s^2 + 145s + 103}{(s+1)^2}}{1 + \dfrac{56s^2 + 145s + 103}{(s+1)^2} \cdot (s+3) \cdot \dfrac{15}{s+5} \cdot \dfrac{18}{s^2 + 3.12s + 9}}$$

$$e_{rp}\Big|_{W_1(s)} = -\frac{18}{9} \cdot \frac{103}{1 + 103 \cdot 3 \cdot \dfrac{15}{5} \cdot \dfrac{18}{9}} = -2 \cdot \frac{103}{1 + 103 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = -0.111$$

Ahora suponiendo que la entrada es $W_2(s)$ y las otras dos son nulas. Luego el diagrama de bloques quedará:



Ahora la señal de error, vale:

$$E(s) = -\left[W_2(s) + C(s) \cdot G_3(s)\right] = -\left[W_2(s) + E(s) \cdot G_1(s) \cdot A(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)\right]$$

$$E(s)\left[1 + G_1(s) \cdot A(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)\right] = -W_2(s)$$

$$E(s) = -\frac{W_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot A(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)}$$

$$e_{rp}\Big|_{W_2(s)} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = -\lim_{s \to 0} s \cdot \frac{W_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot A(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)}$$

$$e_{rp}\Big|_{W_2(s)} = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = -\lim_{s\to 0} s\cdot \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s+5}\cdot(s+3)\cdot\frac{56s^2+145s+103}{(s+1)^2}\cdot\frac{18}{s^2+3.12s+9}}$$

$$e_{rp}\Big|_{W_2(s)} = -\frac{1}{1+\frac{15}{5}\cdot 3\cdot 103\cdot\frac{18}{9}} = -\frac{1}{1+3\cdot 3\cdot 103\cdot 2} = -0.0005$$

Luego el error total será:

$$e_{rp\,(total)} = e_{rp}\Big|_{R(s)} + e_{rp}\Big|_{W_1(s)} + e_{rp}\Big|_{W_2(s)} = 0.0016 - 0.111 - 0.0005 = 0.11$$

Se observa que las perturbaciones, tanto $W_1(s)$ como $W_2(s)$, influyen en el error del sistema. Sin embargo $W_2(s)$ influye mucho menos que $W_1(s)$.

Cabría esperar que fuese la perturbación en la realimentación la que tuviese una mayor incidencia, pero no es así.

$$e_{rp}\Big|_{W_1(s)} = -\lim_{s\to 0} s\cdot W_1(s)\cdot\frac{G_2(s)\cdot G_3(s)}{1+A(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)}$$

$$e_{rp}\Big|_{W_2(s)} = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = -\lim_{s\to 0} s\cdot W_2(s)\frac{1}{1+A(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)}$$

Como puede verse para ambos errores el denominador es el mismo diferenciándose en el numerador, donde para $W_1(s)$ depende del producto de las ganancias de $G_2(s)$ y $G_3(s)$, mientras que para $W_2(s)$ el numerador vale 1.

Ganancia de la planta $G_2(s)$:

$$\lim_{s\to 0} G_2(s) = \lim_{s\to 0}\frac{56s^2+145s+103}{(s+1)^2} = 103$$

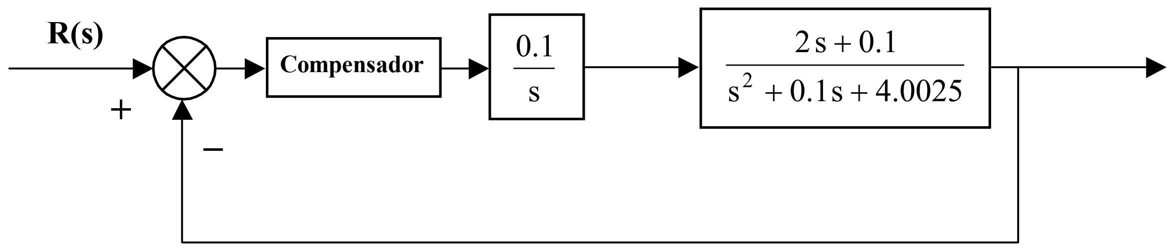
Ganancia de la planta $G_3(s)$:

$$\lim_{s\to 0} G_3(s) = \lim_{s\to 0}\frac{18}{s^2+3.12s+9} = 2$$

Por tanto la influencia mayor de la perturbación $W_1(s)$ se debe a que la planta $G_2(s)$ presenta una ganancia muy alta, de forma que el sistema tiende a seguir muy bien la señal de perturbación $W_1(s)$.

EJERCICIO 3.19.

En la figura se representa el diagrama de bloques de un modelo para un sistema de control de cambio de posición:



Calcular el compensador necesario para que el sistema ante la entrada *r(t) = 2t + 4.0025* tenga un error en régimen permanente de 80.05.

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{0.1(2s + 0.1)}{s(s^2 + 0.1s + 4.0025)}$$

El error en régimen permanente ante una entrada que es la suma de una rampa de amplitud 2 y un escalón de valor 4.0025 será:

Ante la entrada escalón el error es cero al ser el sistema tipo 1.

Ante la entrada rampa:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{0.1(2s+0.1)}{s(s^2+0.1s+4.0025)} = \lim_{s\to 0}\frac{0.1(2s+0.1)}{(s^2+0.1s+4.0025)} = \frac{0.1\cdot 0.1}{4.0025} = \frac{0.01}{4.0025}$$

$$e_{rp} = \frac{2}{K_v} = \frac{2}{\frac{0.01}{4.0025}} = 800.5$$

El error final coincide por tanto con el error a la rampa.

Si se desea que el error sea 80.05:

$$e'_{rp} = 80.05 = \frac{2}{K'_v} \qquad \Rightarrow \qquad K'_v = \frac{2}{80.05}$$

luego:

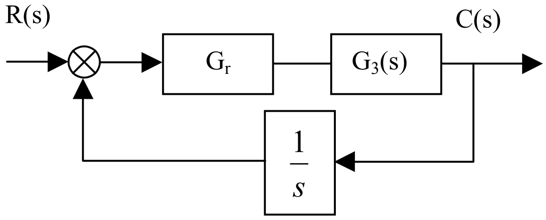
$$K'_v = \lim_{s\to 0} s\frac{K\cdot 0.1(2s+0.1)}{s(s^2+0.1s+4.0025)} = \frac{K\cdot 0.1\cdot 0.1}{4.0025} = \frac{0.01\cdot K}{4.0025} = \frac{2}{80.05}$$

por lo que el compensador será:

$$K = \frac{2\cdot 4.0025}{0.01\cdot 80.05} = \frac{8.005}{0.8005} = 10$$

EJERCICIO 3.20.

Para el sistema resultante del ejercicio 2.16. con K = 1000, diseñar un compensador de tal forma que el error a la salida del comparador ante una entrada: *r(t) = 1000 + t,* sea *0,5.*



$$G_3(s) = \frac{K}{(s^2 + 10s + 1025)}$$

La entrada al sistema es:

$$r(t) = 1000 + t\ .$$

Y la función de transferencia del lazo abierto es:

$$F.T.L.A.' = \frac{1}{s} \cdot K \cdot G_3(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 10s + 1025)}$$

Por tanto el sistema es tipo 1, con lo que presenta un error cero ante entradas escalón y error finito ante entradas rampa. Por tanto de la entrada r(t) sólo afectará al error la parte correspondiente a la rampa t.

Por lo tanto:

$$e_{ss} = 0.5 = \frac{1}{K_v^{'}} \qquad \Rightarrow \qquad K_v^{'} = 25$$

$$K_v^{'} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1000 \cdot G_r}{s(s^2 + 10s + 1025)} = 2 = \frac{1000 \cdot G_r}{1025} \qquad \Rightarrow \qquad G_r = 2.0$$

Luego introduciremos en la cadena abierta un regulador proporcional con G_r= 2.05 para cumplir la especificación de error permanente.

EJERCICIO 3.21.

Un sistema de control tiene una función de transferencia de cadena directa:

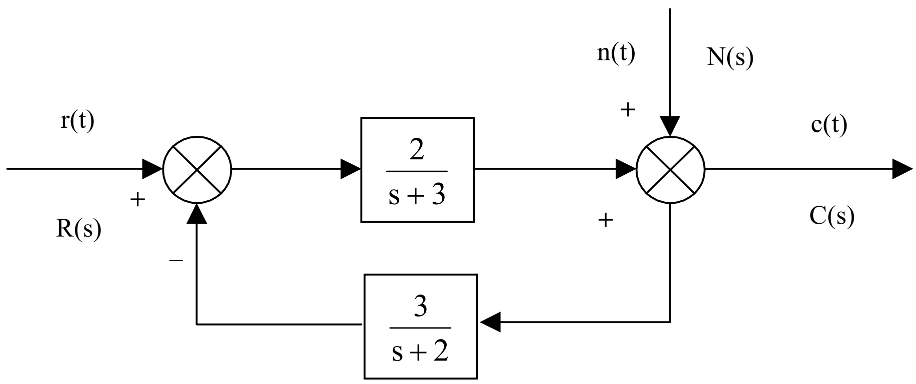
$$G(s) = \frac{2}{s+3}$$

y una función de transferencia de la cadena de realimentación:

$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

Se desea analizar el comportamiento del sistema cuando se introduce en la entrada un escalón de amplitud 2 en el mismo instante que se produce una perturbación, a la salida de la planta, de tipo exponencial decreciente, de amplitud unidad y constante de tiempo 1/3 segundos. Determínese el valor de régimen permanente de la respuesta en ausencia y presencia del ruido.

Del enunciado, se obtiene el siguiente diagrama de bloques:



Para la entrada *r(t) = 2 t,* su transformada es R(s) = 2/s.

Para la entrada *n(t) = e^{-3t},* su transformada es N(s) = 1/(s+3).

La función de transferencia salida/referencia, será:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s+3}}{1+\frac{2}{s+3}\frac{3}{s+2}} = \frac{2(s+2)}{s^2+5s+12}$$

Y la función de transferencia salida/ruido, será:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+\frac{2}{s+3}\frac{3}{s+2}} = \frac{(s+2)(s+3)}{s^2+5s+12} = \frac{s^2+5s+6}{s^2+5s+12}$$

Sin considerar el ruido, se tendrá:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2(s+2)}{s^2+5s+12} \Rightarrow C(s) = R(s)\cdot\frac{2(s+2)}{s^2+5s+12} = \frac{2}{s}\cdot\frac{2(s+2)}{s^2+5s+12}$$

Y aplicando el teorema del valor final se obtiene el valor de régimen permanente:

$$C(\infty) = \lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot C(s) = \frac{2\cdot 2(0+2)}{0+0+12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Considerando ahora el ruido N(s):

La respuesta a la aplicación simultánea de la entrada de referencia y el ruido (perturbación), se obtendrá aplicando superposición:

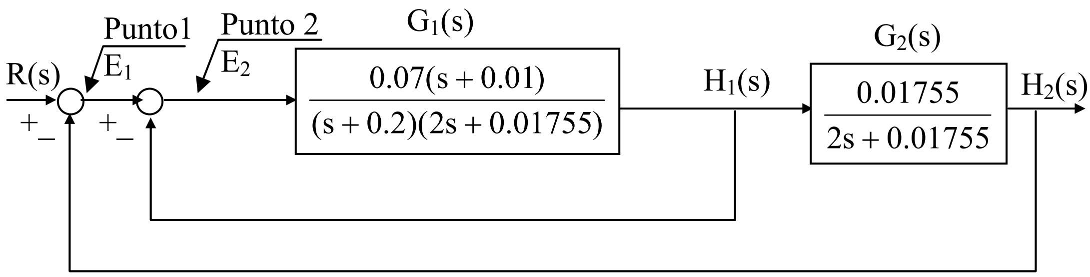
$$C(s) = C_R(s) + C_N(s) = \frac{2}{s}\cdot\frac{2(s+2)}{s^2+5s+12} + \frac{s^2+5s+6}{s^2+5s+12}\cdot\frac{1}{s+3}$$

Por el teorema del valor final, se tendrá:

$$C(\infty) = \lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot C(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\left[C_R(s) + C_N(s)\right] = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

EJERCICIO 3.22.

Para el sistema del ejercicio 1.16. cuyo diagrama de bloques se presenta a continuación:



Calcular los errores que se producen en los puntos 1 y 2 en régimen permanente, cuando a la entrada R(s) se introduce una entrada escalón de amplitud 2.

Lo mismo cuando a la entrada se introduce una rampa de pendiente 2

<u>En el punto 1:</u>

Ante entrada escalón de amplitud 2:

$$K_p = \lim_{s\to 0} M_1(s)G_2(s) = \lim_{s\to 0}\frac{0.07(s+0.01)}{2s^2+0.48755s+0.00421}\cdot\frac{0.01755}{2s+0.01755}$$

$$K_p = \frac{0.07 \cdot 0.01 \cdot 0.01755}{0.00421 \cdot 0.01755} = 0.166$$

$$e_{p1} = \frac{2}{1 + k_p} = \frac{2}{1 + 0.166} = 1.715$$

Ante entrada rampa de pendiente 2:

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{0.07(s + 0.01)}{(s + 0.2)(2s + 0.01755)} \cdot \frac{0.01755}{2s + 0.01755} = 0$$

$$e_{v1} = \frac{2}{1 + k_v} = \frac{2}{0} = \infty$$

<u>En el punto 2:</u>

$$E_2(s) = E_1(s) - H_1(s) = E_1(s) - E_2(s) \cdot G_1(s)$$

$$\boxed{[1 + G_1(s)] \cdot E_2(s) = E_1(s)}$$

$$E_1(s) = R(s) - H_2(s) = R(s) - H_1(s) \cdot G_2(s) = R(s) - E_2(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$\boxed{E_1(s) = R(s) - E_2(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

Sustituyendo una ecuación en la otra se tiene:

$$[1 + G_1(s)] \cdot E_2(s) = R(s) - E_2(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$[1 + G_1(s) + G_1(s) \cdot G_2(s)] \cdot E_2(s) = R(s)$$

$$\boxed{E_2(s) = \frac{R(s)}{1 + G_1(s) + G_1(s) \cdot G_2(s)}}$$

Ante entrada escalón de amplitud 2:

$$e_{p2} = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{2}{s}}{1 + G_1(s) + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

$$e_{p2} = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{2}{s}}{1 + \frac{0.07(s + 0.01)}{(s + 0.2)(2s + 0.01755)} + \frac{0.07(s + 0.01)}{(s + 0.2)(2s + 0.01755)} \cdot \frac{0.01755}{2s + 0.01755}}$$

$$e_{p2} = \frac{2}{1 + \frac{0.07 \cdot 0.01}{0.2 \cdot 0.01755} + \frac{0.07 \cdot 0.01}{0.2 \cdot 0.01755} \cdot \frac{0.01755}{0.01755}} = 1.43$$

Ante entrada rampa de pendiente 2:

$$e_{v2} = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{2}{s^2}}{1+G_1(s)+G_1(s)\cdot G_2(s)}$$

$$e_{v2} = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{2}{s^2}}{1+\frac{0.07(s+0.01)}{(s+0.2)(2s+0.01755)}+\frac{0.07(s+0.01)}{(s+0.2)(2s+0.01755)}\cdot\frac{0.01755}{2s+0.01755}}$$

$$e_{v2} = \frac{2}{0} = \infty$$

También se podrían haber obtenido los valores del error en el punto 1 a través de las expresiones anteriores:

$$\boxed{\left[1+G_1(s)\right]\cdot E_2(s) = E_1(s)}$$

$$\boxed{E_1(s) = R(s) - E_2(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)}$$

$$E_1(s) = R(s) - \frac{E_1(s)}{1+G_1(s)}\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)$$

$$\left(1+\frac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{1+G_1(s)}\right)E_1(s) = R(s)$$

$$\left(\frac{1+G_1(s)+G_1(s)\cdot G_2(s)}{1+G_1(s)}\right)E_1(s) = R(s)$$

$$E_1(s) = R(s)\frac{1+G_1(s)}{1+G_1(s)+G_1(s)\cdot G_2(s)}$$

$$e_{p1} = \lim_{s\to 0} s\cdot R(s)\frac{1+G_1(s)}{1+G_1(s)+G_1(s)\cdot G_2(s)}$$

$$e_{p1} = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{2}{s}\frac{1+\frac{0.07(s+0.01)}{(s+0.2)(2s+0.01755)}}{1+\frac{0.07(s+0.01)}{(s+0.2)(2s+0.01755)}+\frac{0.07(s+0.01)}{(s+0.2)(2s+0.01755)}\cdot\frac{0.01755}{2s+0.01755}}$$

$$e_{p1} = \lim_{s\to 0} 2\frac{1+\frac{0.07\cdot 0.01}{0.2\cdot 0.01755}}{1+\frac{0.07\cdot 0.01}{0.2\cdot 0.01755}+\frac{0.07\cdot 0.01}{0.2\cdot 0.01755}\cdot\frac{0.01755}{0.01755}} = 1.715$$