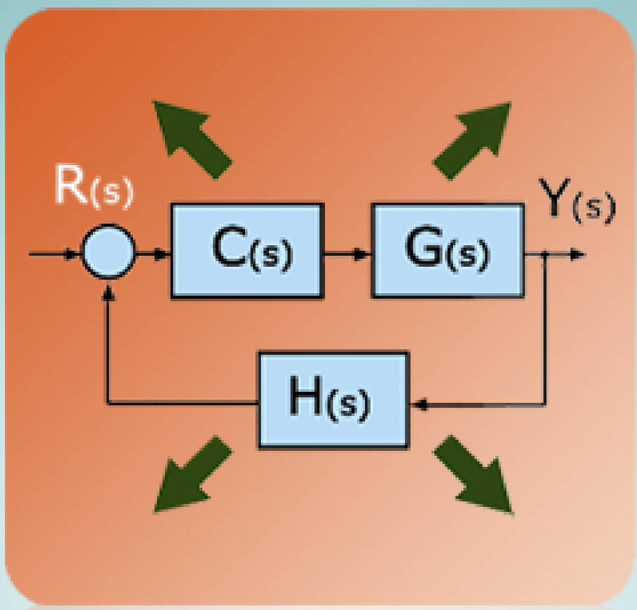
Automática

Ejercicios

Capítulo 4. Respuesta de Régimen Transitorio



José Ramón Llata García

Esther González Sarabia

Dámaso Fernández Pérez

Carlos Torre Ferrero

María Sandra Robla Gómez

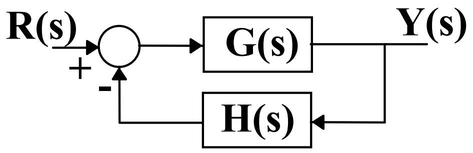
Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 3.0]

EJERCICIO 4.1.

Calcular los valores de K y K_h para que el sistema tenga una respuesta con un sobreimpulso del 20% y un tiempo de 1sg.



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}; \quad H(s) = 1 + K_h s$$

$$M(s) = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + \frac{K(1+K_h s)}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2 + (1+KK_h)s + K}$$

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.2 \rightarrow \delta = 0.45$$

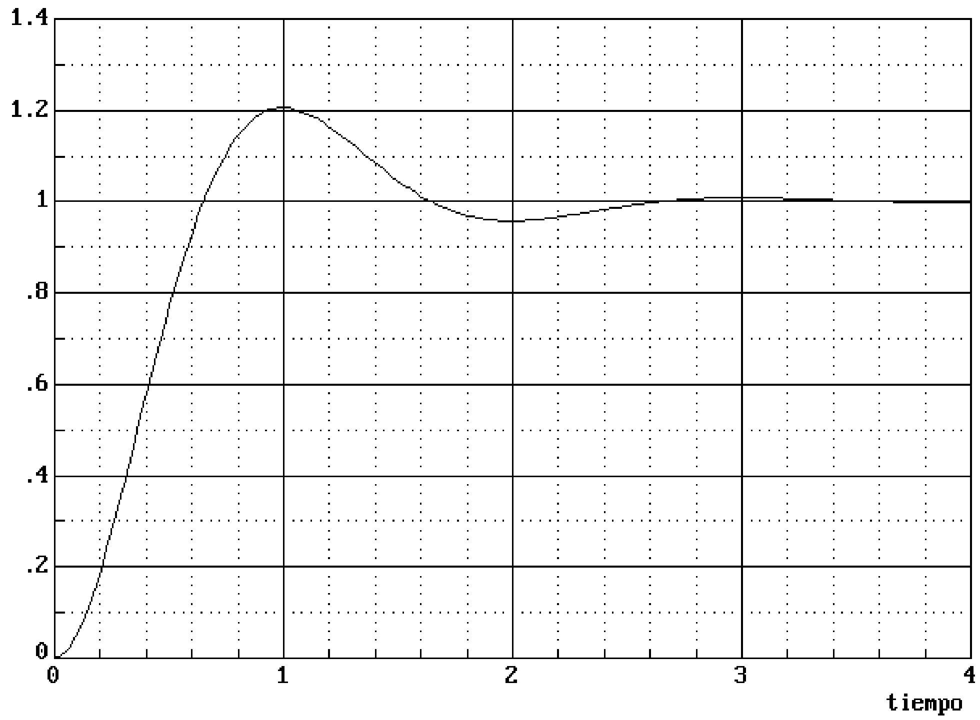
$$t_p = \frac{\pi}{w_d} = 1\text{sg} \rightarrow w_d = \pi \text{ rad/sg} \qquad w_d = w_n\sqrt{1-\delta^2} \rightarrow w_n = 3.52 \text{ rad/sg}$$

$$M(s) = \frac{3.52^2}{s^2 + 3.168s + 3.52^2} \qquad M(s) = \frac{K}{s^2 + (1+KK_h)s + K}$$

$$K = 3.52^2 = 12.39$$

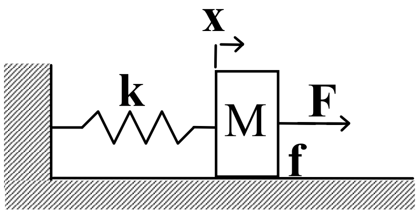
$$1 + KK_h = 3.16$$

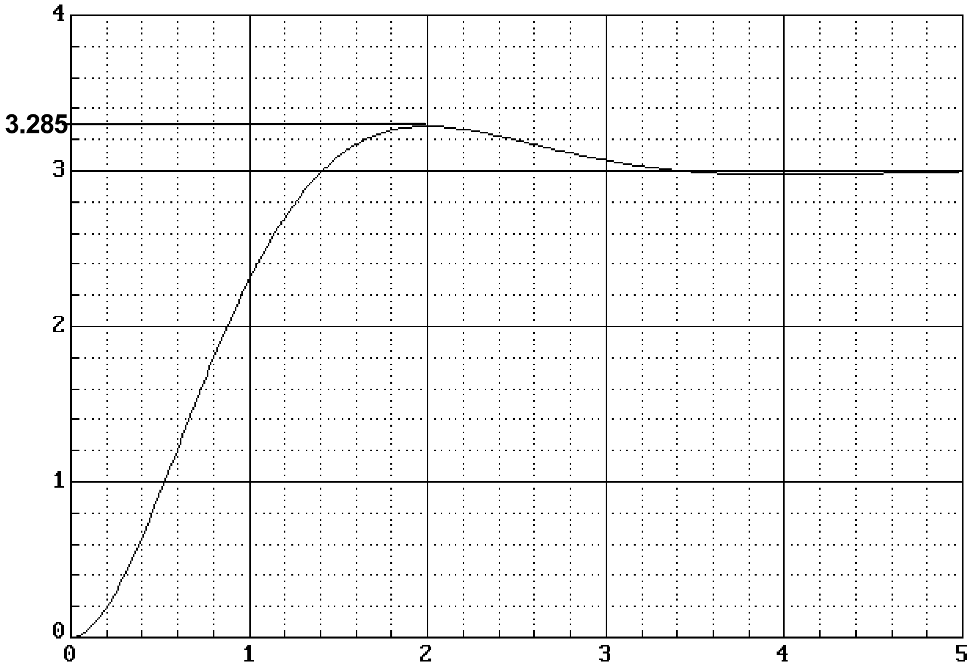
$$K_h = 2.16/12.39 = 0.178$$



EJERCICIO 4.2.

Dada la respuesta del siguiente sistema a una entrada escalón unidad, calcular k, f y M.





$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + fs + k} \qquad G(s) = C\frac{w_n^2}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2}$$

Comparando ambas expresiones se tiene:

$$w_n = \sqrt{k/M}\,; \quad \delta = f\big/(2\sqrt{Mk})\,; \quad C = 1/k$$

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} = \frac{3.285 - 3}{3} = 0.095$$

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.095 \rightarrow \delta = 0.6$$

$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\delta^2}} = 2sg \rightarrow w_n = 1.96\,rad/sg$$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) = 3$$

$$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{Ms^2+fs+k} = 3 \qquad C = 1/k = 3$$

$$\boxed{k = 1/3 N/m}$$

$$w_n = \sqrt{k/M} = 1.96 \qquad M = \frac{k}{1.96^2} = \frac{1}{3\cdot 1.96^2}$$

$$\boxed{M = 0.087 Kg}$$

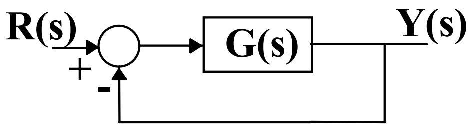
$$\delta = f/(2\sqrt{Mk}) = 0.6 \qquad \delta = 0.6\cdot 2\sqrt{Mk} = 0.6\cdot 2\sqrt{0.087\cdot\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{f = 0.204 N/(m/sg)}$$

EJERCICIO 4.3.

Para el sistema de la figura siguiente, calcular el valor de K y p para que cumpla:

$$M_p \le 5\% \qquad t_s \le 4sg$$



$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)}$$

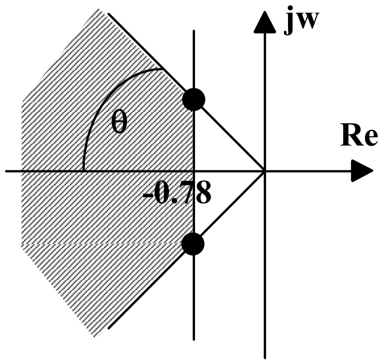
$$M(s) = \frac{K}{s^2+ps+K} \qquad M(s) = \frac{w^2{}_n}{s^2+2\delta w_n s + w^2{}_n}$$

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \le 0.05 \rightarrow \delta \ge 0.69$$

$$t_s = \frac{\pi}{\delta w_n} \le 4sg \rightarrow w_n \ge 1.13\, rad/sg$$

$$\theta \le ArcCos(\delta) = 46.36º$$

$$\sigma \ge \delta w_n = 0.69 * 1.13 = 0.78$$



$$M(s) = \frac{K}{s^2+ps+k}$$

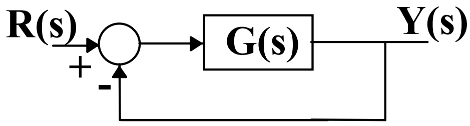
$$\boxed{K = w_n^2 = 1.27}$$

$$\boxed{p = 2\cdot\delta\cdot\omega_n = 2\cdot 0.69\cdot 1.13 = 1.56}$$

EJERCICIO 4.4.

Para el sistema de la figura siguiente, donde $G(s) = \dfrac{25}{s(s+6)}$

Calcular:
- Tiempo de subida
- Tiempo de pico.
- Sobreimpulso.
- Tiempo de asentamiento.



$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\dfrac{25}{s(s+6)}}{1+\dfrac{25}{s(s+6)}} = \frac{25}{s^2+6s+25}$$

$$w_n = 5\text{rad/sg}; \quad \delta = 0.6$$

- Tiempo de Subida:

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{w_d}$$

$$\theta = \text{ArcCos}(\delta) = \text{ArcCos}(0.6) = 0.927\text{rad/sg}$$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\delta^2} = 5\sqrt{1-0.6^2} = 4\text{rad/sg}$$

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - 0.927}{4} = 0.55\text{sg}}$$

- Tiempo de Pico:

$$t_p = \frac{\pi}{w_d}$$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{4} = 0.785\text{sg}}$$

- Sobreimpulso:

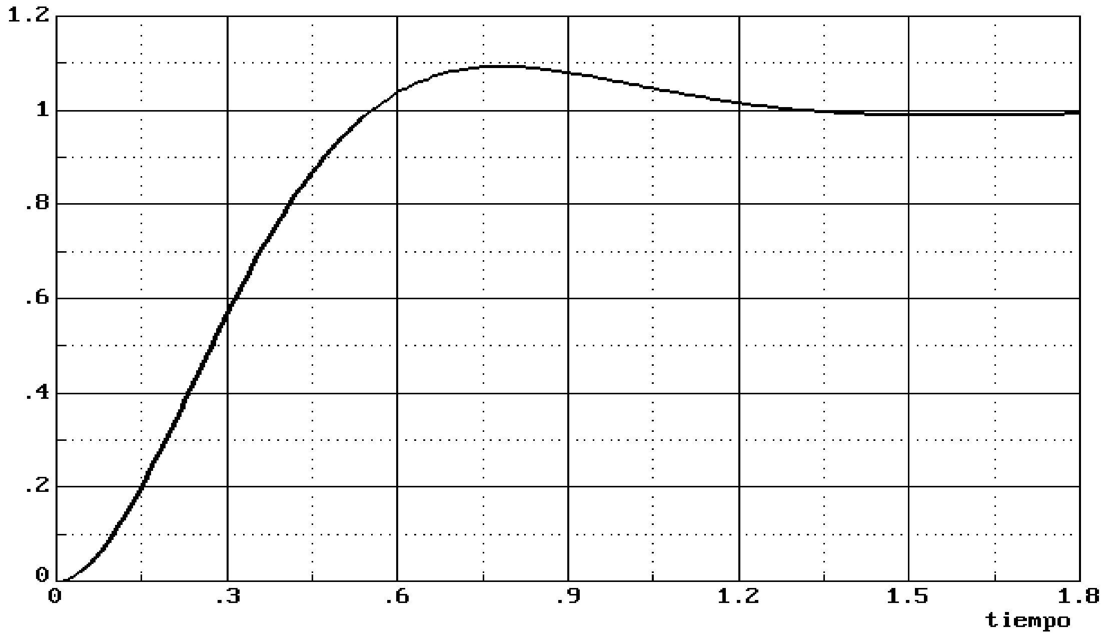
$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$\boxed{M_p = e^{-\frac{0.6\pi}{\sqrt{1-0.6^2}}} = 0.095 \rightarrow 9.5\%}$$

Tiempo de asentamiento:

$$t_s = \frac{\pi}{\delta w_n}$$

$$\boxed{t_s = \frac{\pi}{0.6*5} = 1.05sg}$$



EJERCICIO 4.5.

Para el sistema del ejercicio 1.1. suponiendo:

$$M = 1kg; f = 1N/(m/sg);$$
$$k = 1N/m;$$
$$F(t) = 1N;$$

Obtener la respuesta temporal del sistema ante un escalón unitario

---

Del ejercicio 1.1 se tiene:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2M + fs + k}$$

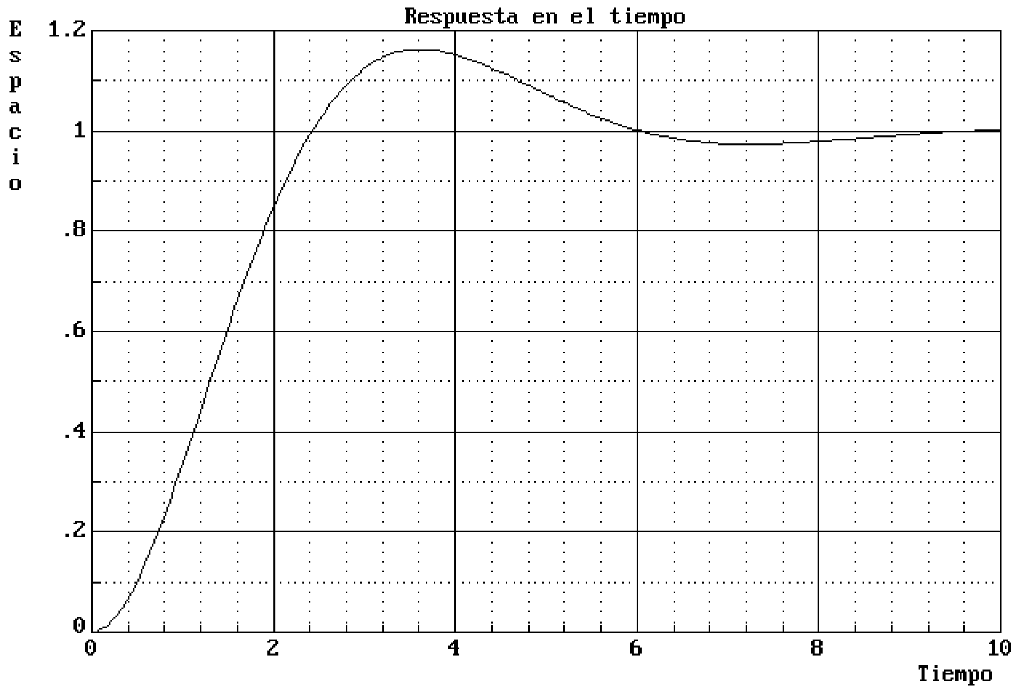
Aplicando una fuerza escalón unitario la salida del sistema será:

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)}\frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 0.5}{(s + 0.5)^2 + 0.866^2} - \frac{0.5}{0.866}\frac{0.866}{(s + 0.5)^2 + 0.866^2}$$

Aplicando tablas de transformadas:

$$\boxed{x(t) = 1 - e^{-0.5t}Cos(0.866t) - 0.576e^{-0.5t}Sen(0.866t)}$$



EJERCICIO 4.6.

Para el sistema del ejercicio 1.3. suponiendo:

$$M_1 = 1\,Kg; \quad M_2 = 0.5\,Kg; \quad f_1 = f_2 = 1\,N/m/sg; \quad k = 1\,N/m$$

Calcular la respuesta temporal del sistema ante una entrada escalón unitario.

En el ejercicio 2.3 se obtuvo las funciones de transferencia que relacionaban las variables del sistema:

$$\frac{V_1(s)}{F(s)} = \frac{M_2 s + f_2 + k/s}{(sM_1 + f_1 + f_2)(M_2 s + f_2 + k/s) - f_2^2}$$

$$\frac{V_2(s)}{F(s)} = \frac{f_2}{(sM_1 + f_1 + f_2)(M_2 s + f_2 + k/s) - f_2^2}$$

Sustituyendo por los valores:

$$\frac{V_1(s)}{F(s)} = \frac{0.5s + 1 + 1/s}{(s+2)(0.5s + 1 + 1/s) - 1} = \frac{0.5s^2 + s + 1}{0.5s^3 + 2s^2 + 2s + 2}$$

$$V_1(s) = \frac{0.5s^2 + s + 1}{(0.5s^3 + 2s^2 + 2s + 2)} \frac{1}{s}$$

$$V_1(s) = \frac{0.5}{s} - \frac{0.212}{s + 3.13} - \frac{0.288s - 0.086}{(s + 0.435)^2 + 1.043^2}$$

Aplicando las tablas de transformadas de Laplace:

$$\boxed{v_1(t) = 0.5 - 0.212e^{-3.13t} - 0.353\cos(1.043t + 0.613)e^{-0.435t}}$$

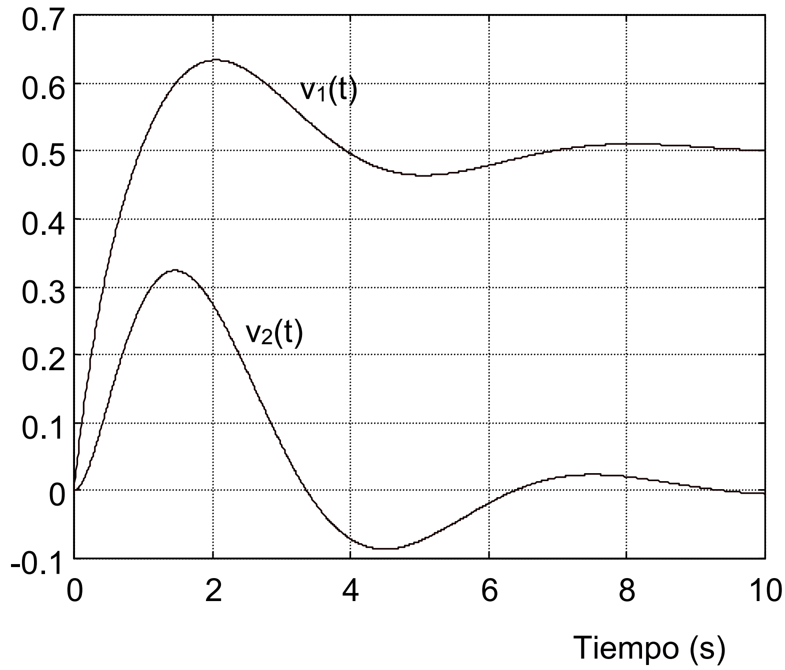
$$\frac{V_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{(s+2)(0.5s + 1 + 1/s) - 1} = \frac{s}{0.5s^3 + 2s^2 + 2s + 2}$$

$$V_2(s) = \frac{s}{(0.5s^3 + 2s^2 + 2s + 2)} \frac{1}{s}$$

$$V_2(s) = \frac{0.239}{s + 3.13} - \frac{0.239s - 0.541}{(s + 0.435)^2 + 1.043^2}$$

Aplicando las tablas de transformadas de Laplace:

$$\boxed{v_2(t) = 0.239e^{-3.13t} + 0.663\,\mathrm{sen}(1.043t - 0.369)e^{-0.435t}}$$



EJERCICIO 4.7.

Para el sistema del ejercicio 1.10. si se aplica una fuerza f(t) de 1 Newton, calcular:

- Posición del deslizador en estado estacionario.
- Posición máxima a la que llega.

En el ejercicio 1.10. se obtuvo la función de transferencia del sistema linealizada en torno del punto de reposo donde x = 1:

$$\Delta X(s) = \frac{\Delta F(s)}{3 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 10}$$

Valor en régimen estacionario:

$$\lim_{s \to 0} s \cdot \Delta X(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{\Delta F(s)}{3 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 10} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1/s}{3 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 10} = 0.1$$

Luego

$$\boxed{x_{est} = 1 + 0.1 = 1.1}$$

Valor máximo:

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta F(s)} = \frac{1/3}{s^2 + \frac{10}{3} \cdot s + \frac{10}{3}}$$

Comparando esta expresión con la de un sistema de segundo orden se tiene:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$2 \cdot \delta \cdot \omega_n = \frac{10}{3}$$

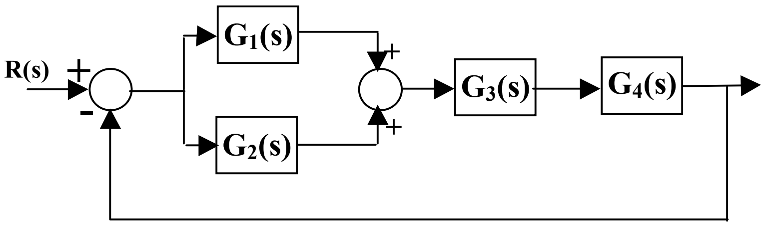
$$\delta = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{6} = 0.9128$$

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = e^{-\frac{0.9128\pi}{\sqrt{1-0.9128^2}}} = 0.88 \cdot 10^{-3} = 0.088\%$$

$$X_{max} = 1.1 + 1.1 \cdot 0.88 \cdot 10^{-3} = 1.1001$$

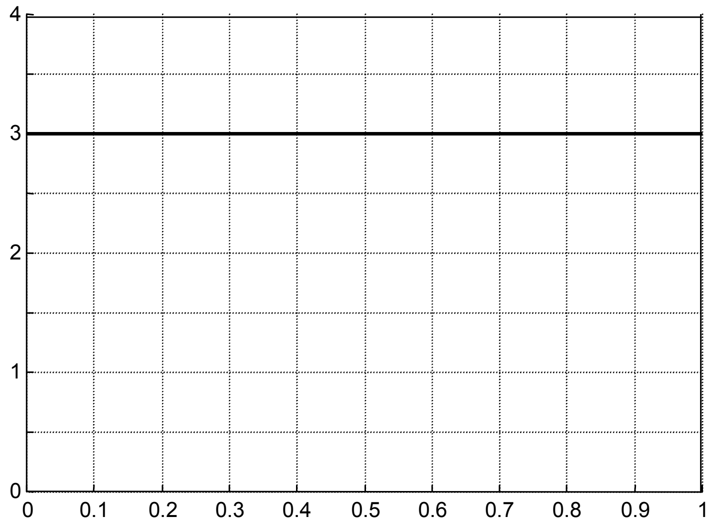
EJERCICIO 4.8.

1) Obtener las funciones de transferencia G_1, G_2, G_3, G_4.y total del sistema.
2) Introducir un controlador proporcional que haga al sistema comportarse como si fuese de 2º orden, con sobreimpulso, ante entrada escalón, del 4.321%

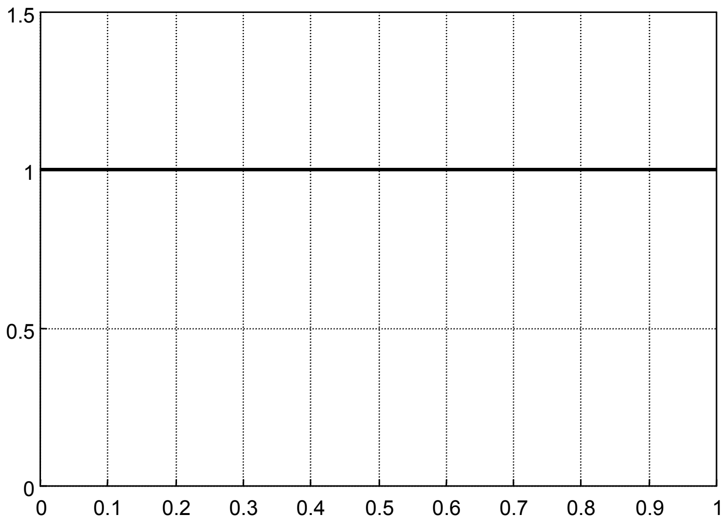


Para obtener la función de transferencia del sistema de la figura se han realizado una serie de ensayos a los bloques G_1, G_2, G_3 y G_4 que lo constituyen.

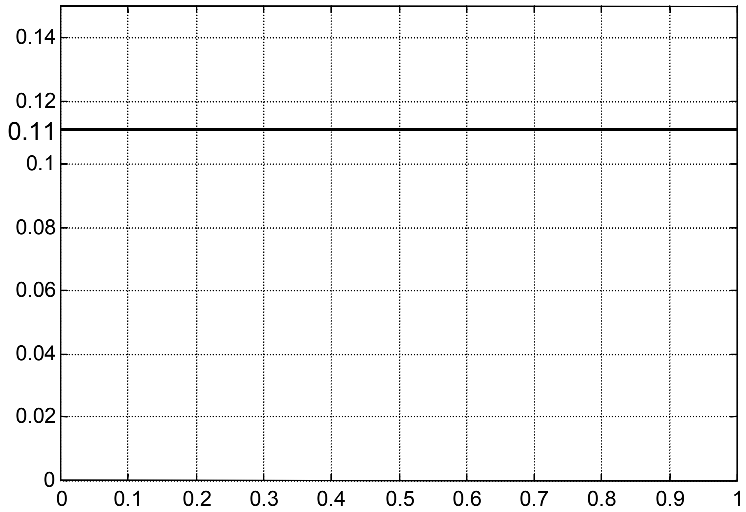
Al bloque G_1 se le ha sometido a una señal de entrada rampa unidad, obteniéndose la respuesta de la gráfica:



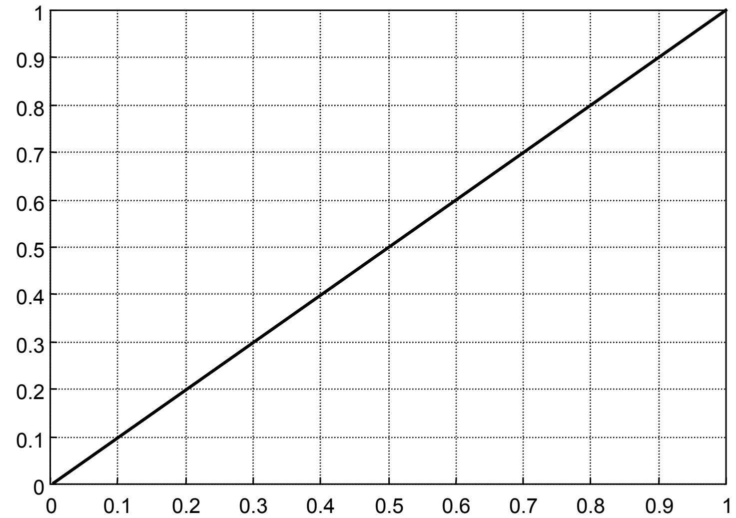
Al bloque G_2 se le ha introducido una señal escalón unidad, respondiendo como se puede ver en la gráfica:



Al bloque G_3 se le ha introducido una señal impulso unidad, obteniéndose:



Al bloque G_4 se le ha introducido una señal escalón unidad, obteniéndose



1) El bloque $G_1(s)$ corresponde con un derivador con ganancia 3: $G_1(s) = 3s$

El bloque $G_2(s)$ corresponde con una ganancia unitaria: $G_2(s) = 1$

El bloque $G_3(s)$ corresponde con un integrador de ganancia 0.11: $G_3(s) = \frac{0.11}{s} \approx \frac{1}{9s}$

El bloque $G_4(s)$ corresponde con un integrador de ganancia unidad: $G_4(s) = \frac{1}{s}$

Luego la cadena directa del sistema quedará:

$$G_T(s) = (G_1(s) + G_2(s)) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s) = (3s+1)\frac{1}{9s^2}$$

$$M(s) = \frac{G_T(s)}{1+G_T(s)} = \frac{\frac{3s+1}{9s^2}}{1+K\frac{3s+1}{9s^2}} = \frac{K(3s+1)}{9s^2+3Ks+K} = \frac{K}{9}\frac{(3s+1)}{s^2+\frac{3}{9}Ks+\frac{K}{9}}$$

2) Suponiendo que el cero no afecta a la respuesta:

$$M_p = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}} = 0.04321 \qquad \pi^2 = \frac{\pi^2 \cdot \delta^2}{1-\delta^1} \qquad 1-\delta^2 = \delta^2$$

$$2\delta^2 = 1 \qquad \delta = 0.7071$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_n &= \frac{\sqrt{K}}{3} \\ \frac{3}{9}K &= 2\delta\omega_n \end{aligned}\right\}$$

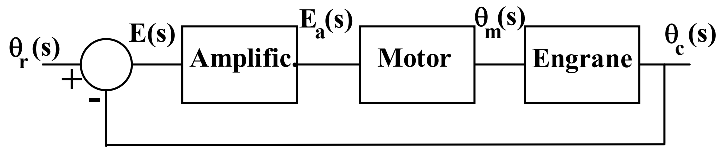
$$\frac{3}{9}K = 2\delta\frac{\sqrt{K}}{3} \qquad \sqrt{K} = 2\delta$$

$$\boxed{K = 2}$$

EJERCICIO 4.9.

Obtener la respuesta del sistema del ejercicio 1.9. ante una entrada escalón unitario. Analizar el posible uso de un sistema equivalente reducido.

En el ejercicio 1.9. se obtuvo la función de transferencia del sistema que relaciona el desplazamiento angular del eje de salida con el desplazamiento angular del eje de referencia:



$$\frac{\theta_c}{\theta_r} = \frac{50000}{s^3+50.5s^2+1725s+50000}$$

La transformada de la salida θ_c, para esta entrada escalón unitario es:

$$\theta_c(s) = \frac{50000}{s^3+50.5s^2+1725s+50000}\cdot\frac{1}{s}$$

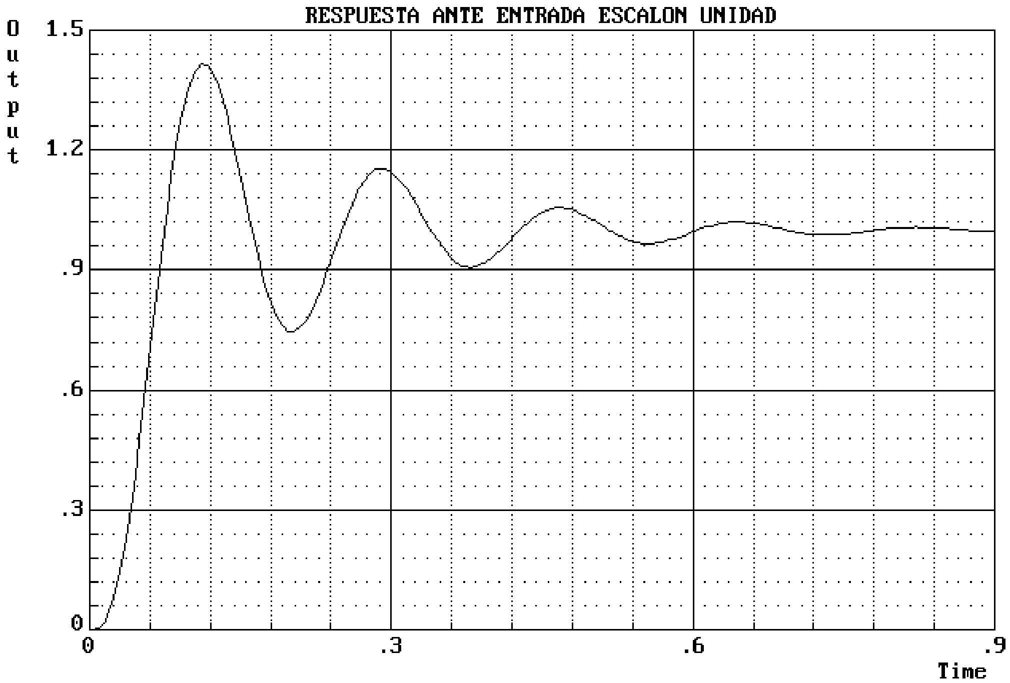
Expansión en fracciones parciales:

$$\theta_c(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.54}{s+39.1} - 0.458\left[\frac{s+35.3}{(s+5.7)^2+35.3^2} + \frac{22.34}{35.3}\frac{35.3}{(s+5.7)^2+35.3^2}\right]$$

y la respuesta del sistema ante una entrada escalón queda:

$$\theta_c(t) = 1 - 0.54e^{-39.1t} - 0.458\left[\mathrm{Cos}(35.3t)e^{-5.7t} + \frac{22.34}{35.3}\mathrm{Sin}(35.3t)e^{-5.7t}\right]$$

Que de forma gráfica sería:



La respuesta es muy similar al de un sistema de segundo orden subamortiguado, con las siguientes características:

Mp = 41%; tr = 0.07sg.; tp = 0.11sg.

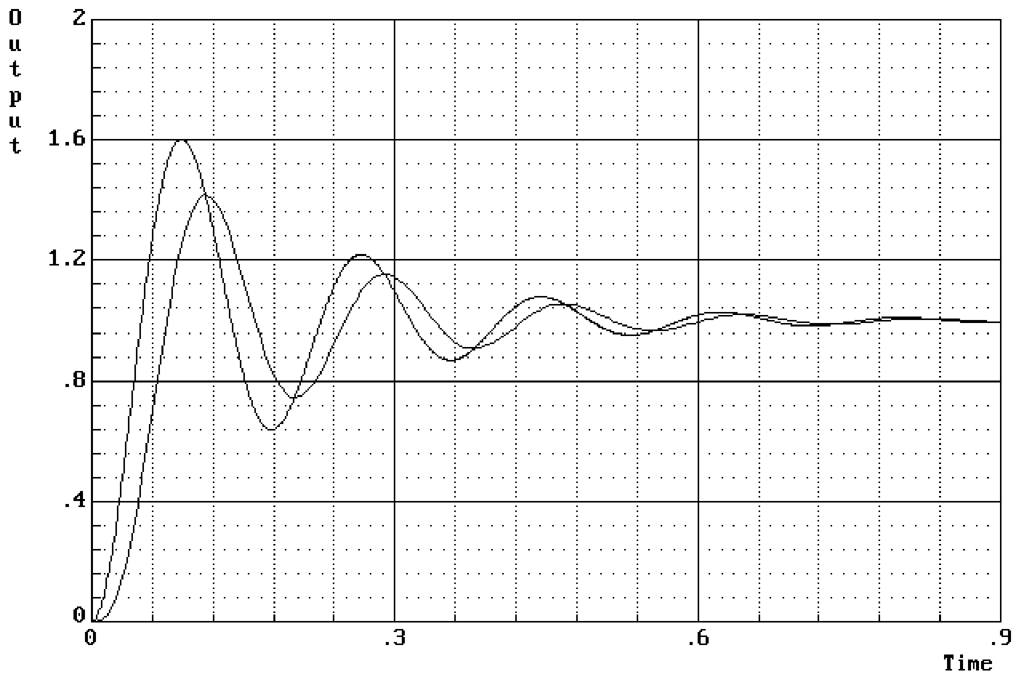
El motivo de que la respuesta sea similar a la de un sistema de segundo orden está en que, para este valor de ganancia del amplificador, la función de transferencia de lazo cerrado tiene dos polos complejos conjugados en -5.7±j35.3 (dominantes) y uno real en -39.1. De esta forma podemos ver que el polo del eje real tiene una constante de tiempo pequeña comparada con la de los otros dos polos y por eso la forma de la respuesta es dominada por los complejos.

Se podía pensar en aproximar el sistema por una simplificación con solo los polos complejos, como la siguiente:

$$\boxed{M(s) = \frac{1278.6}{s^2 + 11.4s + 1278.6}}$$

El problema está en que será una aproximación muy burda ya que la relación entre las distancias al eje imaginario, de los polos complejos con el polo real, es menor de 10 (6.8) luego no sería despreciable.

Para comprobar que no se puede realizar la aproximación (en principio) comparamos la respuesta, ante un escalón unidad, del sistema real con la del sistema reducido:

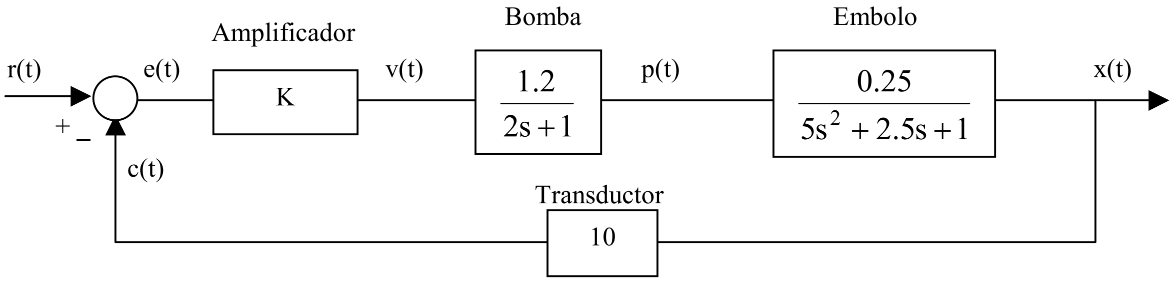


Se puede ver como en la parte transitoria se produce un error apreciable.

EJERCICIO 4.10.

Para el sistema del ejercicio 1.12., suponiendo que el amplificador K toma el valor 0.6, dibujar de forma aproximada la respuesta del sistema x(t) ante una entrada escalón unitario en la referencia de posición r(t). Indicar los valores numéricos de los principales parámetros de dicha respuesta.

En el ejercicio 1.12. se obtuvo el siguiente diagrama de bloques del sistema:



$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{1.2}{2s+1} \cdot \frac{0.25}{5s^2 + 2.5s + 1} = \frac{0.3}{10s^3 + 10s^2 + 4.5s + 1}$$

$$M(s)=\frac{K\cdot G(s)}{1+K\cdot G(s)H(s)}=\frac{0.6\dfrac{0.3}{10s^3+10s^2+4.5s+1}}{1+0.6\dfrac{0.3}{10s^3+10s^2+4.5s+1}10}=\frac{0.18}{10s^3+10s^2+4.5s+2.8}$$

Los polos de la función de transferencia de lazo cerrado se encuentran en:

$$p_{1,2}=-0.0718\pm j0.567$$
$$p_3=-0.856$$

Como p_3 está lo suficientemente alejado para poder despreciarlo frente a p_1 y p_2 se considerará el sistema equivalente de segundo orden formado por los dos polos dominantes p_1 y p_2.

Para estos polos se obtiene los principales parámetros del sistema:

$$p_{1,2}=-\sigma\pm j\omega_d=-\delta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}=-0.0718\pm j0.567$$

$$\delta\omega_n=0.0718$$

$$\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,0.567$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}=0.1266 \qquad 1.01604\delta^2=0.01604 \qquad \delta=0.1256$$

$$\omega_n=\frac{0.0718}{0.1256}=0.5717$$

$$\delta=\cos\theta \qquad \theta=\arccos\delta=1.445\text{rad}$$

$$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}=\frac{\pi-1.445}{0.567}=2.99\text{s}$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{0.567}=5.54\text{s}$$

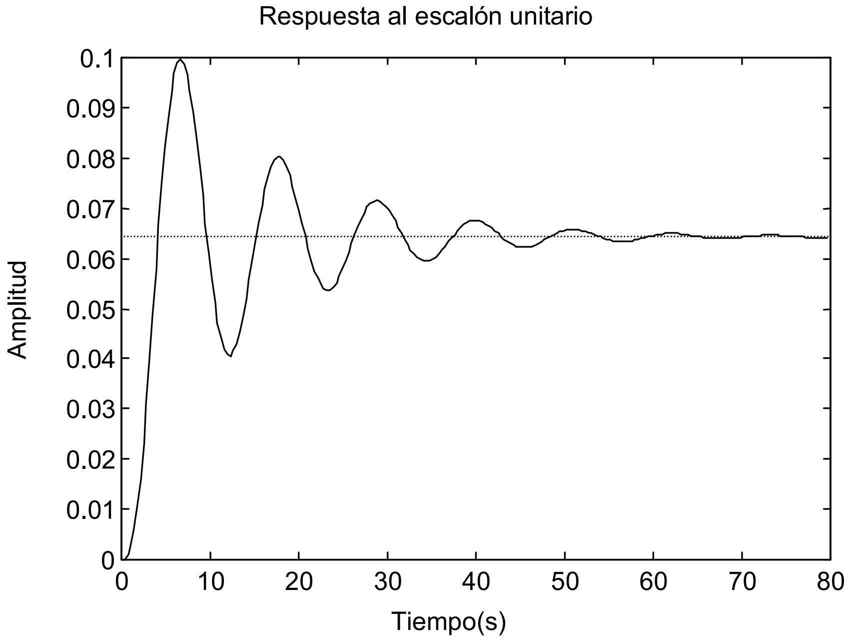
$$t_s=\frac{\pi}{\sigma}=\frac{\pi}{0.0718}=43.75\text{s}$$

$$M_p=e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}=e^{\frac{-0.1256\pi}{\sqrt{1-0.1256}}}=0.6718=67.18\%$$

Valor final:

$$\lim_{s\to 0}sM(s)R(s)=s\cdot\frac{0.18}{10s^3+10s^2+4.5s+2.8}\cdot\frac{1}{s}=0.064$$

La figura muestra la respuesta la respuesta del sistema completo.



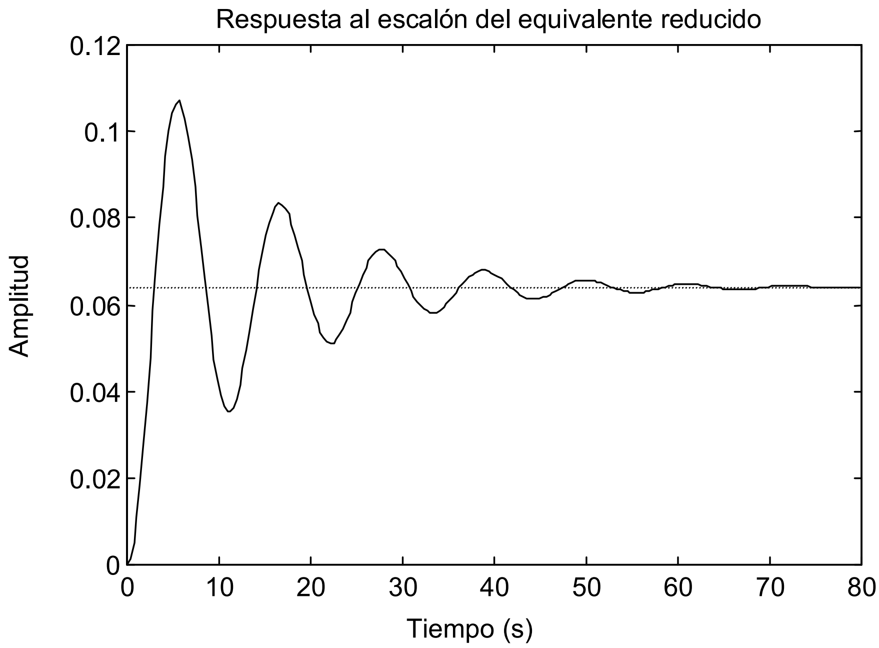
El sistema equivalente considerado para el cálculo de los parámetros ha sido:

$$M_{red}(s) = \frac{k_{red}}{(s+0.0718)^2 + 0.567^2} = \frac{k_{red}}{s^2 + 0.1436s + 0.3266}$$

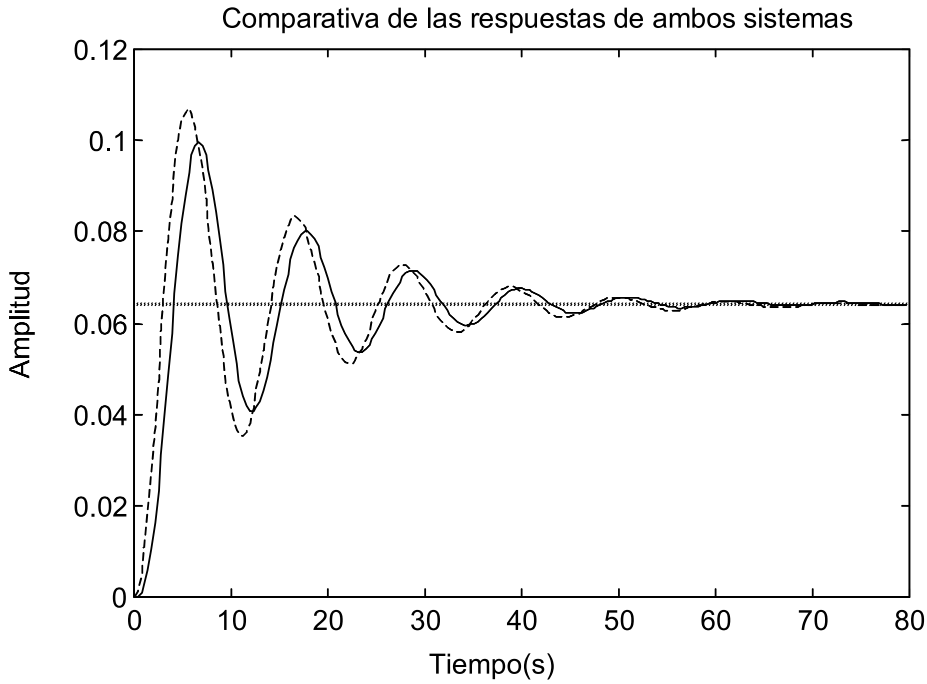
$$\lim_{s \to 0} sM(s)R(s) = s \cdot \frac{k}{s^2 + 0.1436s + 0.3266} \cdot \frac{1}{s} = 0.064 \qquad \frac{k_{red}}{0.3266} = 0.064 \qquad k_{red} = 0.0209$$

$$M_{red}(s) = \frac{0.0209}{s^2 + 0.1436s + 0.3266}$$

La respuesta del sistema reducido es:



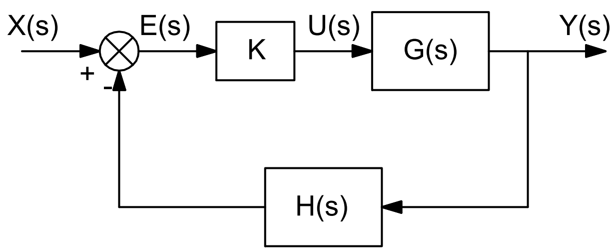
Comparando ambas respuestas en la misma gráfica pueden observarse las diferencias existentes al despreciar el polo más alejado del origen.



La respuesta en línea continua corresponde con el sistema total y la de línea discontinúa con el equivalente reducido.

EJERCICIO 4.11.

Para el sistema de control cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura:



$$G(s) = \frac{3(s+0.66)}{s^2+4s+5} \qquad H(s) = \frac{10}{(2s+8)(s+6)}$$

1. Obtener la transformada inversa de la respuesta del sistema para una entrada escalón unitario cuando K=1.
2. Calcular un sistema reducido equivalente al de lazo cerrado, para K= 0.1
3. Calcular los parámetros de la respuesta del sistema para una entrada escalón unitario:

   - Tiempo de subida (t_r)
   - Tiempo de pico (t_p)
   - Máximo sobreimpulso (M_p)
   - Tiempo de asentamiento (t_s)

1. Transformada inversa.

$$M(s)=\frac{K\cdot G(s)}{1+K\cdot G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{3s+2}{s^2+4s+5}}{1+\dfrac{3s+2}{s^2+4s+5}\dfrac{5}{(s+4)(s+6)}}=\frac{(3s+2)(s+4)(s+6)}{(s^2+4s+5)(s+4)(s+6)+15s+10}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}\frac{(3s+2)(s+4)(s+6)}{(s^2+4s+5)(s+4)(s+6)+15s+10}=\frac{3(s+0.667)(s+4)(s+6)}{s(s+1.546)(s+7.132)((s+2.661)^2+2.170^2)}$$

Cuya descomposición en fracciones simples es:

$$Y(s)=\frac{0.369}{s}+\frac{0.561}{s+1.546}-\frac{0.0699}{s+7.132}-\frac{0.86s+1.209}{(s+2.661)^2+2.170^2}$$

$$\frac{0.86s+1.209}{(s+2.661)^2+2.170^2}=0.86\frac{s+1.406}{(s+2.661)^2+2.170^2}=0.86\frac{s+1.406+1.255-1.255}{(s+2.661)^2+2.170^2}=$$

$$=0.86\frac{s+1.406+1.255-1.255}{(s+2.661)^2+2.170^2}=0.86\left[\frac{s+2.661}{(s+2.661)^2+2.170^2}-\frac{1.255}{(s+2.661)^2+2.170^2}\right]=$$

$$=0.86\left[\frac{s+2.661}{(s+2.661)^2+2.170^2}-\frac{1.255}{2.170}\frac{2.170}{(s+2.661)^2+2.170^2}\right]=$$

$$=0.86\left[\frac{s+2.661}{(s+2.661)^2+2.170^2}-0.5783\frac{2.170}{(s+2.661)^2+2.170^2}\right]$$

Aplicando las tablas de transformada de Laplace:

$$\frac{1}{s}\ \rightarrow\ 1 \qquad\qquad \frac{1}{s+a}\ \rightarrow\ e^{-at}$$

$$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\ \rightarrow\ e^{-at}\cos\omega t \qquad\qquad \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\ \rightarrow\ e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$$

$$Y(s)=\frac{0.369}{s}+\frac{0.561}{s+1.546}-\frac{0.0699}{s+7.132}-0.86\left[\frac{s+2.661}{(s+2.661)^2+2.170^2}-0.5783\frac{2.170}{(s+2.661)^2+2.170^2}\right]$$

$$y(t)=0.369+0.561e^{-1.546t}-0.0699e^{-7.138t}-0.86e^{-2.661t}\left[\cos(2.170t)-0.5783\operatorname{sen}(2.170t)\right]$$

$$\boxed{y(t)=0.369+0.561e^{-1.546t}-0.0699e^{-7.138t}-0.9934e^{-2.661t}\cos(2.170t+0.5243)}$$

2. Sistema reducido equivalente. Factorizando M(s) para K=0.1 se tiene:

$$M(s)=\frac{K\cdot G(s)}{1+K\cdot G(s)H(s)}=\frac{0.1\dfrac{3s+2}{s^2+4s+5}}{1+0.1\dfrac{3s+2}{s^2+4s+5}\dfrac{5}{(s+4)(s+6)}}=\frac{(3s+2)(s+4)(s+6)}{(s^2+4s+5)(s+4)(s+6)+15s+10}$$

$$M(s)=\frac{0.1(3s+2)(s+4)(s+6)}{s^4+14s^3+69s^2+147.5s+121}=\frac{0.3(s+0.66)(s+4)(s+6)}{((s+2.16)^2+0.97^2)(s+3.47)(s+6.2)}$$

Un sistema aproximado, aunque de forma grosera, sería:

$$M'(s)=\frac{0.2184}{(s+2.16)^2+0.97^2}=\frac{0.2184}{s^2+4.32s+5.6}$$

donde se ha ajustado la ganancia del equivalente reducido para tener la misma ganancia estática que el sistema original (0.039).

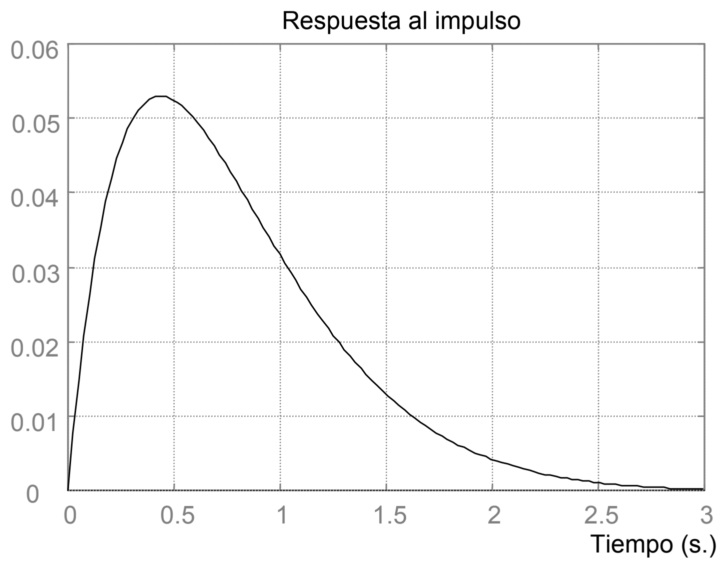
Un modelo reducido más ajustado sería:

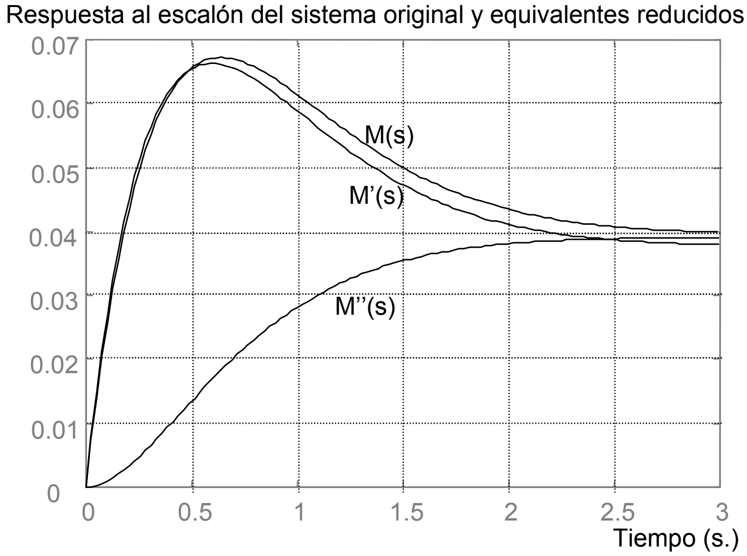
$$M''(s)=\frac{0.321(s+0.66)}{(s+2.16)^2+0.97^2}=\frac{0.321(s+0.66)}{s^2+4.32s+5.6}$$

La diferencia está en el cero en –0.66, porque suma a la respuesta del primer equivalente la respuesta del sistema de segundo orden a un impulso:

$$Y''(s)=M(s)\cdot X(s)=\left(\frac{0.321s}{s^2+4.32s+5.6}+\frac{0.321\cdot 0.66}{s^2+4.32s+5.6}\right)\frac{1}{s}$$

$$Y''(s)=\frac{0.321}{s^2+4.32s+5.6}+\frac{0.321\cdot 0.66}{s^2+4.32s+5.6}\cdot\frac{1}{s}$$





3. Parámetros obtenidos sobre el equivalente reducido:

$$\omega_n^2 = 5.6 \qquad \omega_n = \sqrt{5.6} = 2.36 \text{ rad/s}$$

$$2\delta\omega_n = 4.32 \qquad \delta = \frac{4.32}{2 \cdot 2.36} = 0.91 \qquad \theta = \arccos\delta = \arccos 0.91 = 24.5^{\circ} = 0.427 \text{ rad}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\delta^2} = 2.36\sqrt{1-0.91^2} = 0.978 \text{ rad/s}$$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{0.978} = 3.21\text{s}}$$

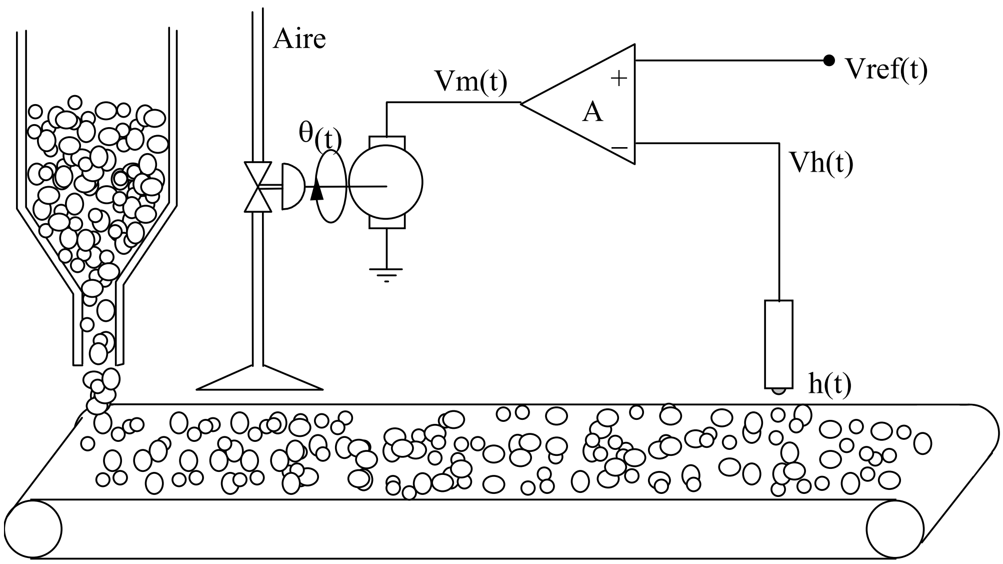
$$\boxed{t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d} = \frac{\pi - 0.427}{0.978} = 2.77\text{s}}$$

$$\boxed{t_s = \frac{\pi}{\delta\omega_n} = \frac{\pi}{0.91 \cdot 2.36} = 1.46\text{s}}$$

$$\boxed{M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.00101 = 0.1\%}$$

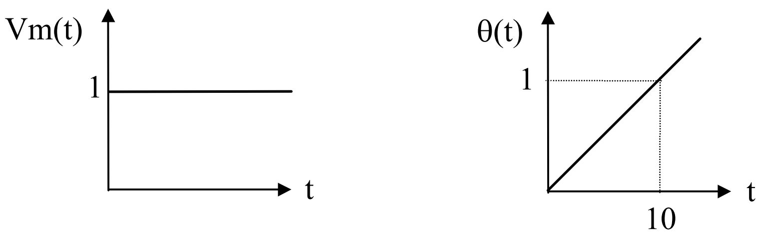
EJERCICIO 4.12.

El siguiente sistema se utiliza para eliminar durante su transporte parte de la humedad de una sustancia que se almacena en un silo:

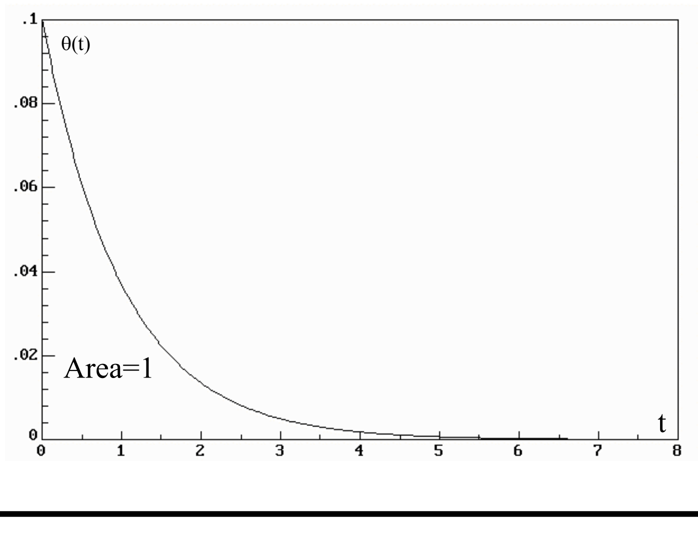


La señal de error e(t) compara la referencia de humedad Vref(t) con la obtenida del sensor Vh(t), se amplifica por un valor A, y se utiliza Vm(t) como entrada a un motor de CC que actúa sobre una válvula que gobierna el paso de una corriente de aire caliente. La ganancia del amplificador es de A Voltios/Voltio.

La relación entre la posición del eje del motor θ(t) en grados y la tensión aplicada al mismo Vm(t) viene dada en la siguiente gráfica:



La relación entre la humedad del material y(t) (en %) y la posición del eje del motor θ(t) (en grados) viene dada por la respuesta impulsional:



La humedad es detectada a la salida de la cinta transportadora mediante un instrumento empleado como sensor que genera tensión por unidad de variación del grado de humedad h. Para calcular la función de transferencia del sensor de humedad, cuya ecuación diferencial que rige su funcionamiento es

$$k \cdot h(t) = \frac{d\,Vh(t)}{dt} + a \cdot Vh(t)$$

se realizó el ensayo de someter al sensor a un cambio brusco de 10 unidades en la humedad obteniéndose los siguientes datos que se muestran en la tabla adjunta.

Vh (voltios)	Tiempo (segundos)
0	0
7.89	0.5
12.64	1
15.56	1.5
17.31	2
18.36	2.5
19	3
19.4	3.5
19.64	4
19.78	4.5
19.87	5
19.92	5.5
19.95	6
19.97	6.5
20	8

Dibujar el diagrama de bloques del sistema completo que tiene como entrada la tensión de referencia Vref(s) y como salida la humedad del material H(s), indicando todas las variables y funciones de transferencia.

Analizando el sistema representado se van obteniendo las relaciones entre las diferentes variables del sistema:

$$E(s) = Vref(s) - Vh(s)$$

$$Vm(s) = A \cdot E(s) \qquad \frac{Vm(s)}{E(s)} = A$$

La relación entre la posición del eje del motor θ(t) en grados y la tensión aplicada al mismo Vm(t) se obtiene de la gráfica correspondiente. En ella se puede ver que cuando la entrada Vm(t) es un escalón unitario, la salida θ(t) es una rampa de pendiente 0.1. Luego dicho elemento puede representarse como un integrador cuya función de transferencia corresponde con:

$$\theta(s) = \frac{0.1}{s} Vm(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{Vm(s)} = \frac{0.1}{s}$$

La relación entre la humedad del material y(t) (en %) y la posición del eje del motor θ(t) (en grados) viene dada por la respuesta impulsional representada en la gráfica. Esta respuesta corresponde a un sistema de primer orden de la forma:

$$\frac{H(s)}{\theta(s)} = \frac{k}{s + \alpha}$$

La respuesta temporal de un sistema de primer orden ante una entrada impulso es de la forma: $h(t) = k \cdot e^{-\alpha t}$

El valor inicial de la respuesta es 0.1:

$$h(0) = k \cdot e^{0} = k = 0.1 \qquad k = 0.1$$

El área debe ser igual a 1:

$$\int_0^\infty k \cdot e^{-\alpha t} = k \cdot \left.\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^\infty = k\left[0 - \frac{1}{-\alpha}\right] = \frac{k}{\alpha} = \frac{0.1}{\alpha} = 1 \qquad \alpha = 0.1$$

Luego la función de transferencia es:

$$\frac{H(s)}{\theta(s)} = \frac{0.1}{s + 0.1}$$

Para calcular la función de transferencia del sensor de humedad, se tiene la ecuación diferencial que rige su funcionamiento:

$$k \cdot h(t) = \frac{d\,Vh(t)}{dt} + a \cdot Vh(t)$$

Aplicando transformada de Laplace se tendrá:

$$k \cdot H(s) = sVh(s) + a \cdot Vh(s)$$

$$k \cdot H(s) = (s + a) \cdot Vh(s)$$

$$\frac{Vh(s)}{H(s)} = \frac{k}{s + a} = \frac{k'}{\tau s + 1}$$

La tabla proporciona información sobre la respuesta de este sistema ante una entrada escalón de amplitud 10. Como el sistema corresponde con uno de primer orden, de los datos de la tabla obtenemos el valor de la constante de tiempo τ y de la ganancia k'. El valor al que se estabiliza la respuesta para una entrada escalón de 10 unidades es 20.

Para el sistema de primer orden el valor al que se estabiliza la respuesta es:

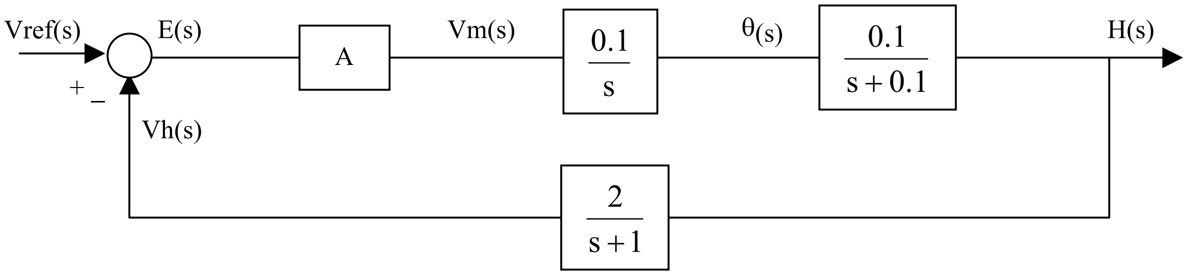
$$Vh_\infty = \lim_{s \to 0} s \frac{k'}{\tau s + 1} \cdot \frac{10}{s} = 10k'$$

Luego: $10k' = 20 \qquad k' = \frac{20}{10} = 2$

La constante de tiempo corresponde con el tiempo transcurrido hasta que la respuesta alcanza el 63.2% del valor final. El 63.2 % de 20 es 12.64 que mirando en la tabla corresponde con t=1 segundo.

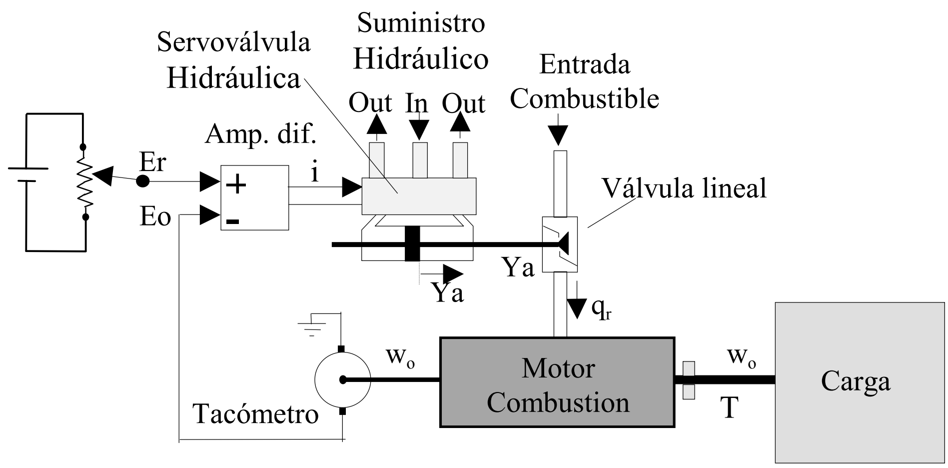
Por tanto la función de transferencia es: $\dfrac{Vh(s)}{H(s)} = \dfrac{2}{s+1}$

El diagrama de bloques correspondiente al sistema completo será:

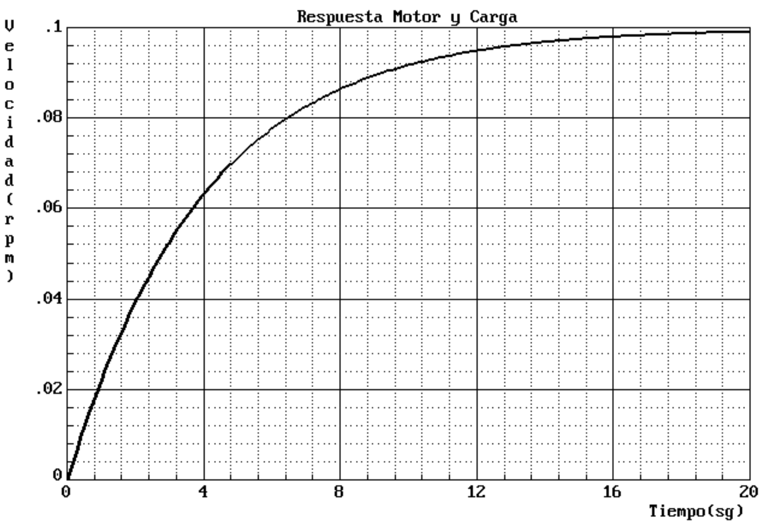


EJERCICIO 4.13.

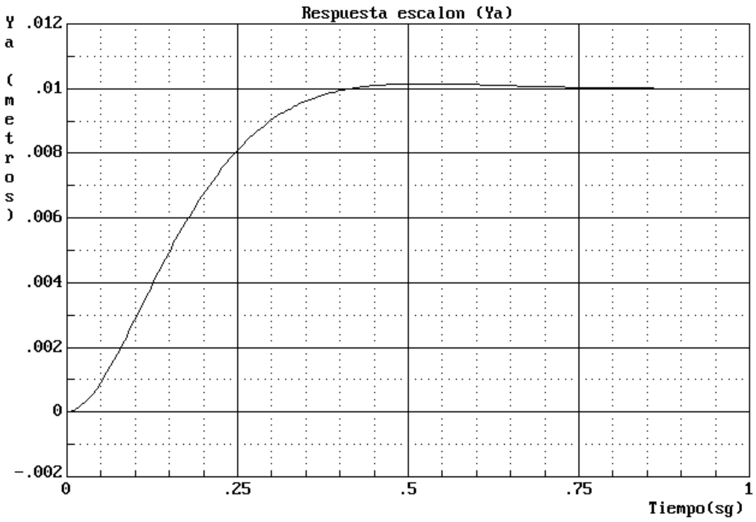
La figura muestra el esquema del control de velocidad del motor de combustión interna mediante la utilización de una servoválvula hidráulica.



Se sabe que el amplificador diferencial tiene una ganancia regulable, de valor K y que la función que realiza es: $i = K \cdot (E_r - E_o)$. La válvula lineal presenta una relación constante entre el flujo de mezcla de combustible (q_r)a su salida y su desplazamiento (Ya), igual a 10000. Además, se somete al conjunto Motor-Carga a una entrada escalón de amplitud unidad, obteniéndose la respuesta de la gráfica siguiente:



Se dispone así mismo de una gráfica dada por el fabricante de la servoválvula hidráulica, que muestra la respuesta de la misma ante una entrada escalón unidad de intensidad:



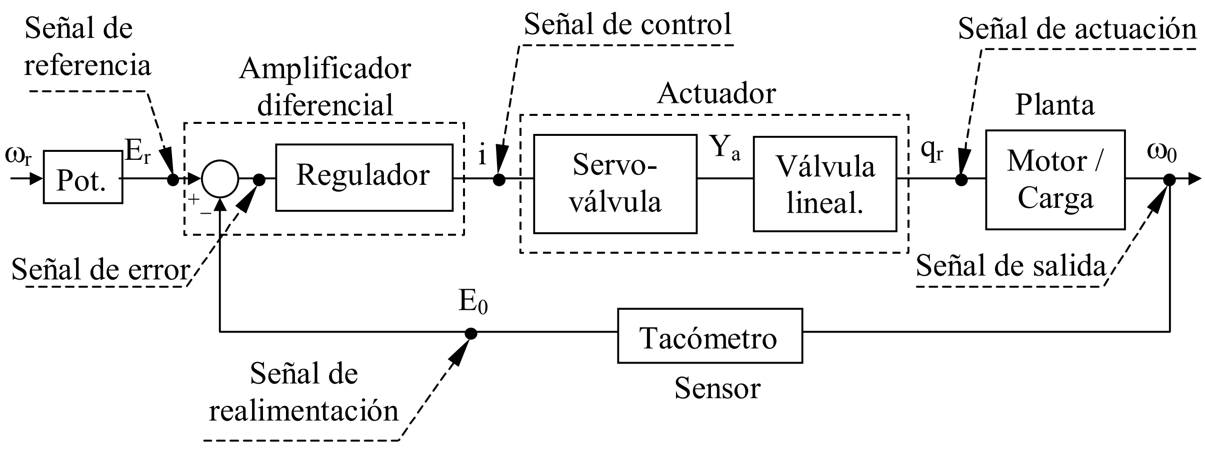
- Se ha sometido a la tacodinamo a una entrada rampa de pendiente 500 r.p.m. (velocidad en el eje creciente linealmente), y se ha obtenido que su respuesta viene dada por la expresión:

$$E_o(\text{rampa } 500) = 5 \cdot t - 0.5 + 0.5 \cdot e^{-10 \cdot t}$$

Se pide:

1. Diagrama de Bloques del sistema indicando la posición de la planta, actuador, regulador, sensor, realimentación, señal de error, de actuación, de entrada, de salida,...etc.
2. Función de transferencia de cada bloque.
3. Función de transferencia de lazo cerrado.
4. Indicar mediante observación de la FTLC como será su respuesta (1^{er} orden, 2º orden, sobreamortiguado, etc.)

1. Diagrama de bloques.



2. Funciones de transferencia.

Motor-carga:

La gráfica corresponde con la respuesta de un sistema de primer orden donde la constante de tiempo τ leída de la gráfica es aproximadamente 4 segundos y la ganancia K del sistema es 0.1.

$$\frac{\omega_0(s)}{Q_r(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{0.1}{4s+1} = \frac{0.025}{s+0.25}$$

<u>Servoválvula</u>:

La gráfica corresponde con la respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado, donde leyendo de la gráfica se puede ver que el tiempo de subida es de 0.4 segundos y el tiempo de pico de 0.55 segundos.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0.55 \qquad \omega_d = \frac{\pi}{t_p} = 5.71\,\text{rad/s}$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = 0.4 \qquad \theta = \pi - t_r \cdot \omega_d = 0.857\,\text{rad}$$

$$\delta = \cos\theta = \cos 0.857 = 0.654$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\delta^2} \qquad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\delta^2}} = 7.54\,\text{rad/s}$$

Luego la función de transferencia será:

$$\frac{Y_a(s)}{I(s)} = \frac{K_1\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde K_1 corresponde con la ganancia de régimen estacionario.

$$\frac{Y_a(s)}{I(s)} = \frac{0.01 \cdot 56.85}{s^2 + 9.86s + 56.85} = \frac{0.5685}{s^2 + 9.86s + 56.85}$$

$$\frac{Y_a(s)}{I(s)} = \frac{1}{s^2 + 16s + 100}$$

<u>Válvula lineal</u>:

$$\frac{Q_r(s)}{Y_a(s)} = 10000$$

<u>Tacómetro</u>:

$$E_0(t) = 5t - 0.5 + 0.5e^{-10t}$$

Tomando transformadas:

$$E_0(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{0.5}{s} + \frac{0.5}{s+10} = \frac{5s + 50 - 0.5s^2 - 5s + 0.5s^2}{s^2(s+10)} = \frac{50}{s^2(s+10)}$$

Como esta señal es la respuesta del tacómetro ante entrada rampa de pendiente 500:

$$\omega_0(s) = \frac{500}{s^2}$$

$$\frac{E_0(s)}{\omega_0(s)} = \frac{50}{s^2(s+10)}\frac{s^2}{500} = \frac{0.1}{s+10}$$

Otra posible forma de obtener la función de transferencia sería derivando la respuesta del sistema ante la rampa para obtener la respuesta del sistema ante un escalón:

$$\frac{dE_0(t)}{dt} = 5 - 5e^{-10t} = 5(1 - e^{-10t})$$

Esta respuesta corresponde a un sistema de primer orden con constante de tiempo 0.1 y ganancia 0.01 (al ser la entrada de amplitud 500).

$$\frac{E_0(s)}{\omega_0(s)} = \frac{K_2}{\tau s+1} = \frac{0.01}{0.1s+1} = \frac{0.1}{s+10}$$

<u>Detector de error</u>:

$$I(s) = K(E_r(s) - E_0(s))$$

3. Función de transferencia de lazo cerrado.

$$G_T(s) = K \cdot \frac{1}{s^2+16s+100} \cdot 1000 \cdot \frac{0.025}{s+0.25} = \frac{250K}{(s^2+16s+100)(s+0.25)}$$

$$H(s) = \frac{0.1}{s+10}$$

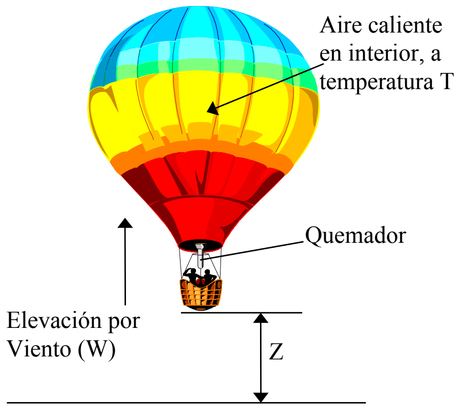
$$M(s) = \frac{G_T(s)}{1+G_T(s)\cdot H(s)} = \frac{\dfrac{250K}{(s^2+16s+100)(s+0.25)}}{1+\dfrac{250K}{(s^2+16s+100)(s+0.25)}\cdot\dfrac{0.1}{s+10}}$$

$$M(s) = \frac{250K(s+10)}{(s^2+16s+100)(s+0.25)(s+10)+25K} = \frac{250K(s+10)}{s^4+26.25s^3+266.5s^2+1065s+250+25K}$$

4. Como se puede ver en la expresión anterior, la posición de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado depende del valor que tome K. Con lo cual es muy dificil decir por mera observación cual sería el comportamiento. Habría que dar valores a K o dibujar el lugar de las raíces.

EJERCICIO 4.14.

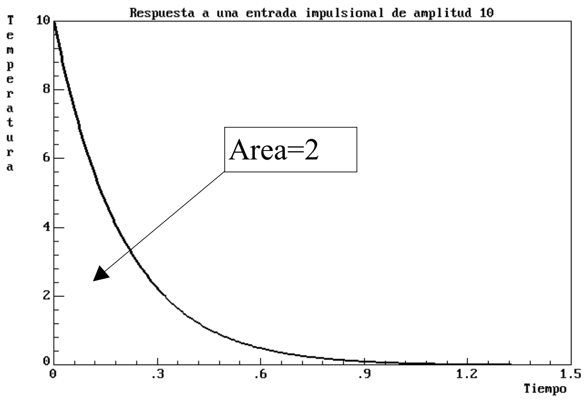
Se desea diseñar un controlador de altura para un globo aerostático.



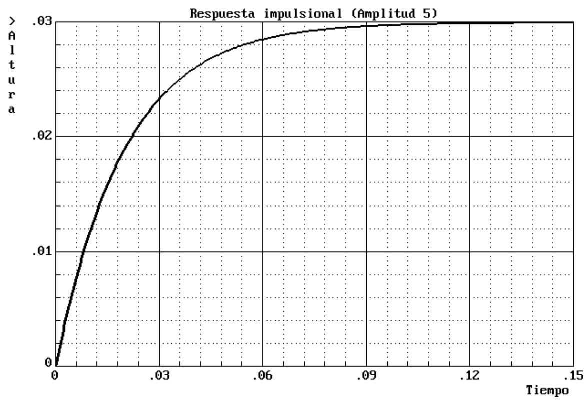
Para ello se dispone de un altímetro, cuya función de transferencia es la unidad, y de la dinámica del sistema que, debido a la dificultad de encontrar las ecuaciones de la dinámica del sistema con precisión, se ha obtenido en base a varios experimentos.

El primer experimento tenía la misión de mostrar la relación entre el Flujo de Calor (Q) aplicado al interior del globo mediante un quemador y la Temperatura que se alcanza en su interior. Para ello se ha realizado un ensayo de forma que se ha aplicado una señal de entrada tipo impulsional de amplitud 10(Kcal/sg), obteniéndose la Gráfica Nº 1.

Posteriormente se ha realizado otro ensayo para conocer la relación entre la Temperatura interior del globo y la altura (Z) que alcanza el mismo. Para esto se ha introducido una señal impulsional de amplitud 5, obteniéndose la Gráfica Nº 2.



Gráfica 1



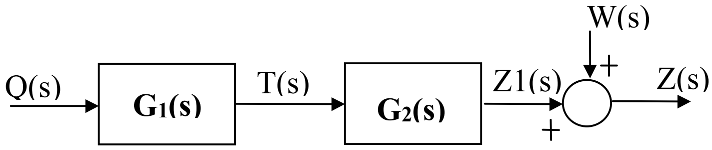
Gráfica Nº 2

Por último, se ha comprobado que, para caracterizar completamente la dinámica del globo, es necesario tener en cuenta la modificación de la altura producida por la componente ascensional del viento (W).

Calcular:

- Diagrama de bloques de la planta.
- Función de transferencia (Altura/Calor de entrada) de la planta.
- Diagrama de bloques en lazo cerrado, indicando la señales de entrada al sistema y si estas son controlables o no.

- Diagrama de bloques de la planta.



Como se observa en la figura anterior, la planta estará formada, según los datos aportados, por dos bloques que representan la dinámica del sistema y que permiten modelar las variaciones de la temperatura interior y de la altura del globo. (Comentar que las ecuaciones que en este ejercicio se han considerado como absolutas son, en realidad "variaciones").

Además, se incluye la entrada de perturbación producida por la componente vertical del aire.

- Función de transferencia (altura/calor de entrada) de la planta.

Para calcular la función de transferencia de la planta es necesario obtener la de cada uno de los bloques que la componen:

a) Función $G_1(s)$:

La respuesta temporal de la gráfica Nº 1 es típica de los sistemas de primer orden ante una entrada impulso, luego será de primer orden. Entonces:

$$G_1(s) = \frac{k}{s+a} \to g_1(t) = y(t)\cdot\delta(t) = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{s+a}\right) = k\cdot e^{-a\cdot t}$$

Para t=0, se comprueba que $y(t) = k = 10$.

Y calculando el área bajo la curva:

$$\text{area} = \int_0^{\infty} 10\cdot e^{-a\cdot t}dt = \frac{-10}{a}[0-1] = \frac{10}{a}$$

Y como el área es dato, queda que a=5.

Y teniendo en cuenta que la amplitud del impulso de entrada ha sido 10, la función de transferencia $G_1(s)$ queda:

$$G_1(s) = \frac{T(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s+5}$$

b) Función $G_2(s)$:

La expresión matemática de la curva de la gráfica Nº 2 puede ser aproximada por:

$$y(t) = 0.03\cdot u(t) - 0.03\cdot e^{-\frac{t}{0.02}}$$

Donde el valor de la constante de tiempo del termino exponencial se ha obtenido a partir de la gráfica, comprobando el tiempo transcurrido para llegar al 63,2% del valor final.

Tomando transformadas de Laplace con C.I. nulas:

$$Y(s) = \frac{0.03}{s} - \frac{0.03}{s+50} = \frac{1.5}{s(s+50)}$$

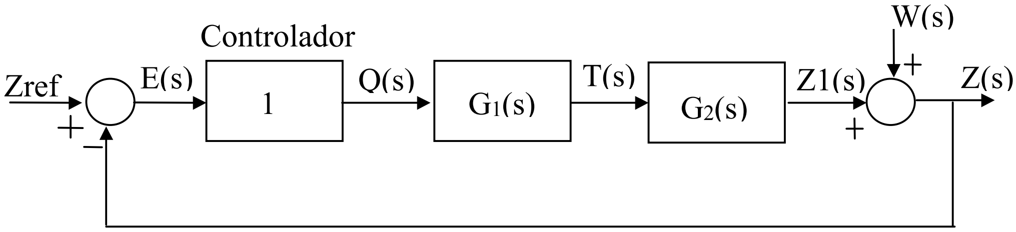
Esta es la transformada de la respuesta del sistema G_2 ante una señal de entrada impulso de amplitud 5, luego si dividimos entre la amplitud de la señal de entrada se obtiene la función de transferencia:

$$G_2(s) = \frac{Z_1(s)}{T(s)} = \frac{0.3}{s(s+50)}$$

Entonces, la función de transferencia de la planta queda:

$$\boxed{G(s) = \frac{Z_1(s)}{Q(s)} = \frac{0.3}{s(s+50)(s+5)}}$$

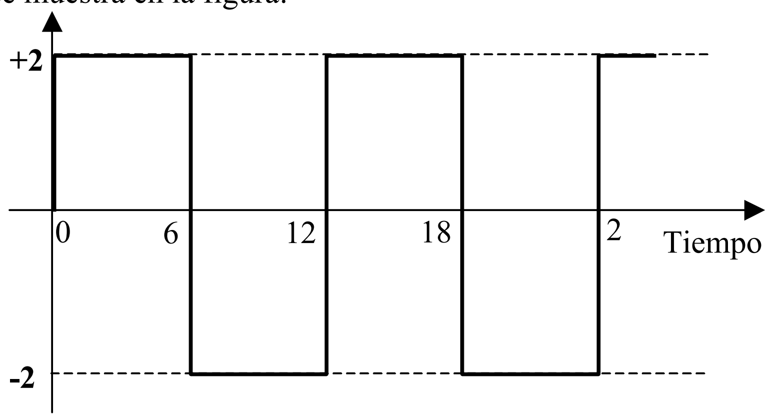
- Diagrama de bloques en lazo cerrado:



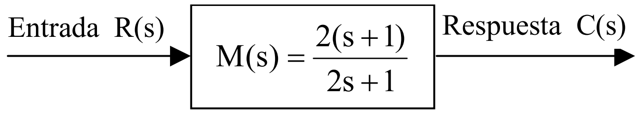
En este sistema se observan dos entradas Zref y W. La primera de ellas es la entrada mediante la cual el operador del globo modifica la posición, es totalmente controlable.
En cuanto a la señal W, es no controlable (además de aleatoria y observable) ya que depende de la velocidad que alcance el viento en cada instante.

EJERCICIO 4.15.

Dibujar, indicando un número de puntos que permita observarlo correctamente, la respuesta del sistema cuya función de transferencia de lazo cerrado es $M(s) = \frac{2(s+1)}{(2s+1)}$, ante una entrada tal como la que se muestra en la figura:



Descomponemos la señal de entrada en intervalos de tiempo y analizamos el tipo de señal. Así observamos que desde t = 0 a t =6$^-$, la señal de entrada es un escalón de amplitud 2:



luego:

$$C_1(s) = M(s) \cdot R_1(s) = \frac{2(s+1)}{2s+1}\frac{2}{s} = \frac{4(s+1)}{s(2s+1)}$$

que descomponiendo en fracciones simples, quedará:

$$\frac{4(s+1)}{s(2s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{2s+1}$$

$$A = \left[s\frac{4(s+1)}{s(2s+1)} \right]\Bigg|_{s=0} = 4$$

$$B = \left[(2s+1)\frac{4(s+1)}{s(2s+1)} \right]\Bigg|_{s=-0.5} = -4$$

$$\frac{4(s+1)}{s(2s+1)} = \frac{4}{s} - \frac{4}{2s+1} = \frac{4}{s} - \frac{2}{s+0.5}$$

Haciendo ahora la transformada inversa, tendremos:

$$c_1(t) = 4 - 2e^{-0.5t}$$

dando valores a t:

$$t = 0 \quad \Rightarrow c_1(t) = +4.000$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow c_1(t) = +2.7869$$

$$t = 2 \quad \Rightarrow c_1(t) = +3.2642$$

$$t = 3 \quad \Rightarrow c_1(t) = +3.5537$$

$$t = 6^- \quad \Rightarrow c_1(t) = +3.900$$

A partir de este instante la entrada $r_2(t)$ es un escalón de valor -4. Luego:

$$C_2(s) = M(s) \cdot R_2(s) = \frac{2(s+1)}{2s+1}\frac{-4}{s} = \frac{-8(s+1)}{s(2s+1)} = \frac{-4(s+1)}{s(s+0.5)}$$

Expandiendo en fracciones simples:

$$\frac{-4(s+1)}{s(s+0.5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+0.5)} = \frac{-8}{s} + \frac{4}{s+0.5}$$

Hallamos la transformada inversa, resultando:

$$c_2(t) = -8 + 4e^{-0.5t}$$

Ahora el origen está en el punto (6,0) y la gráfica parte del valor 3.900, luego con estas consideraciones, construimos la tabla:

$t = 0^+ \quad$ punto$(6^+,0) \quad \Rightarrow c_2(t) = -8 + 4 = -4 \quad$ ordenada : $-4 + 3.900 = -0.1$

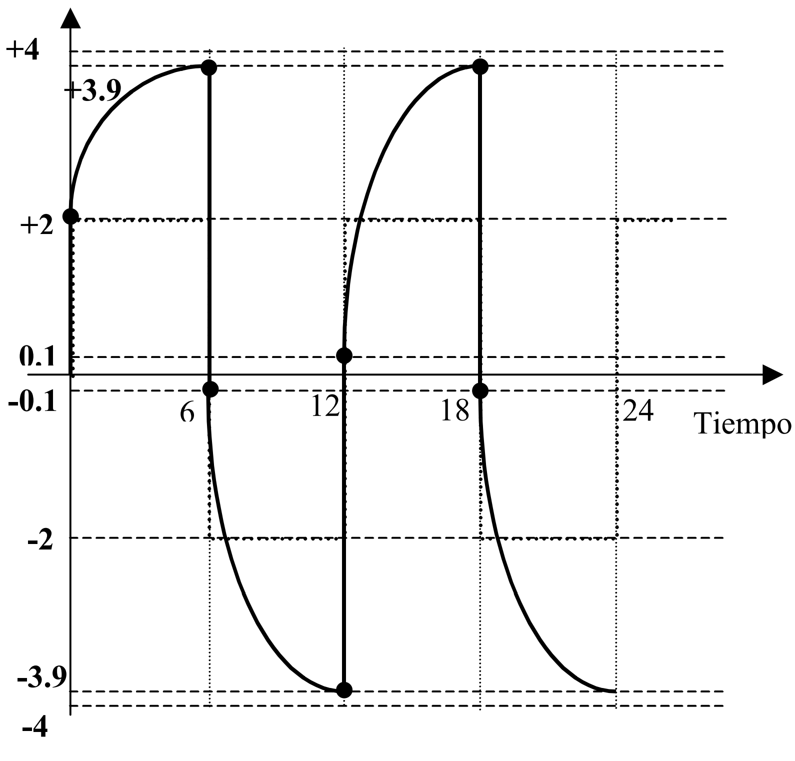
$t = 1 \quad$ punto$(7,0) \quad \Rightarrow c_2(t) = -8 + 2.4261 = -5.5739 \quad$ ordenada : $-5.5739 + 3.9 = -1.6739$

$t = 2 \quad$ punto$(8,0) \quad \Rightarrow c_2(t) = -8 + 1.4715 = -6.5285 \quad$ ordenada : $-6.5285 + 3.9 = -2.6285$

$t = 3 \quad$ punto$(9,0) \quad \Rightarrow c_2(t) = -8 + 0.8925 = -7.1075 \quad$ ordenada : $-7.1075 + 3.9 = -3.2075$

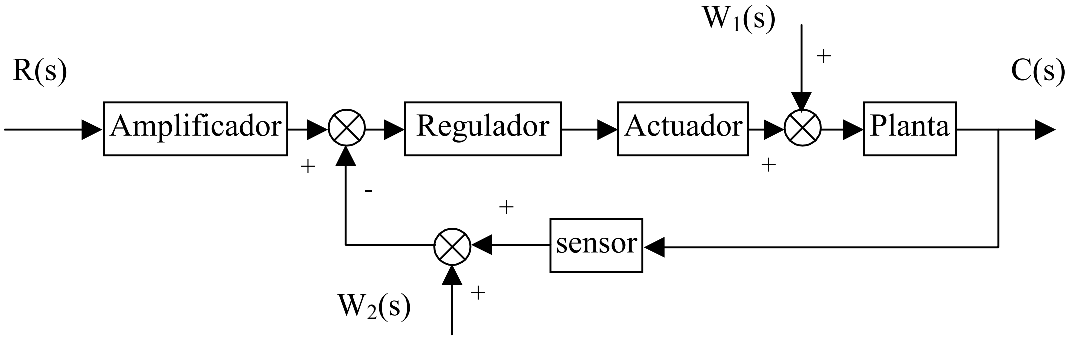
$t = 6^- \quad$ punto$(12^-,0) \quad \Rightarrow c_2(t) = -8 + 0.1991 = -7.8 \quad$ ordenada : $-7.8 + 3.900 = -3.9$

Y volvería a repetirse el proceso, quedando la gráfica de la respuesta:



EJERCICIO 4.16.

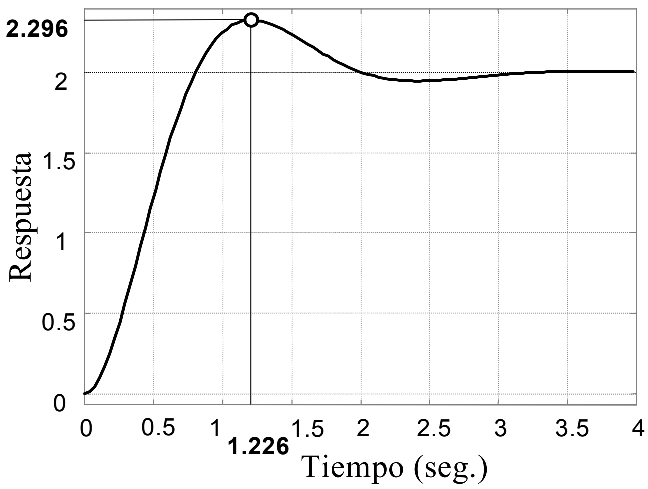
Para el sistema que se muestra en la figura siguiente, se han realizado una serie de experiencias con el fin de obtener las funciones de transferencia de cada uno de los bloques que lo componen:



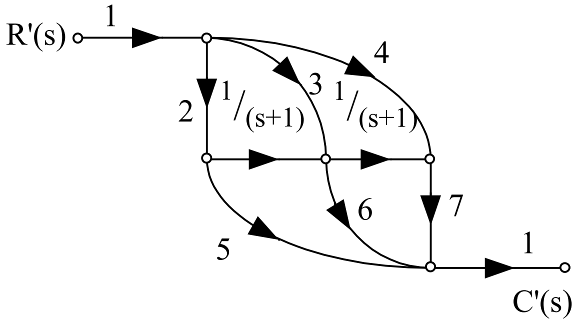
Se ha observado que la integral de la respuesta del regulador, cuando se introduce una señal tipo escalón unitario, viene dada por:

$$3t + \frac{3}{5}e^{-\frac{t}{0.2}}$$

Para conocer la respuesta del sensor, se ha introducido también un escalón unidad y se ha graficado su salida, siendo ésta la que se muestra a continuación:



Atendiendo a los datos del fabricante, se sabe que la función de transferencia del actuador es: (s + 3), y se ha obtenido el flujograma de la planta, que es el que se muestra:



Obtener las funciones de transferencia de cada uno de los bloques que componen el sistema.

- <u>Regulador</u>

Si se deriva la integral de la respuesta, se tendrá la respuesta, luego:

$$c(t) = 3 + \frac{3}{5}e^{-5t}(-5) = 3 - 3e^{-5t} = 3(1 - e^{-5t})$$

Si se hace la transformada de Laplace de esta respuesta, se tiene:

$$C(s) = 3\left(\frac{1}{s} - \frac{0.2}{0.2s+1}\right) = R(s)\cdot G(s) = \frac{1}{s}\cdot G(s) = 3\left(\frac{0.2s+1-0.2s}{s(0.2s+1)}\right) = 3\frac{1}{s(0.2s+1)}$$

Despejando G(s):

$$G(s) = \frac{3}{0.2s+1} = \frac{15}{s+5}$$

- <u>Sensor</u>

La respuesta es la de un sistema de segundo orden, que se puede expresar en su forma canónica como:

$$G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

De la gráfica de la respuesta, se tiene que:

- El tiempo de pico (t_p) es 1.2 segundos.

- El sobreimpulso (M_p) es $\frac{2.296-2}{2} = 0.148 = 14.8\%$.

A partir de estos valores, se pueden obtener los de ω_n y δ, de acuerdo con las siguientes relaciones:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.148 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0.52$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0.52^2}} = \frac{3.678}{\omega_n} = 1.226 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 3\,{}^{rad}\!/_{seg}$$

luego sustituyendo en la ecuación de G(s), quedará:

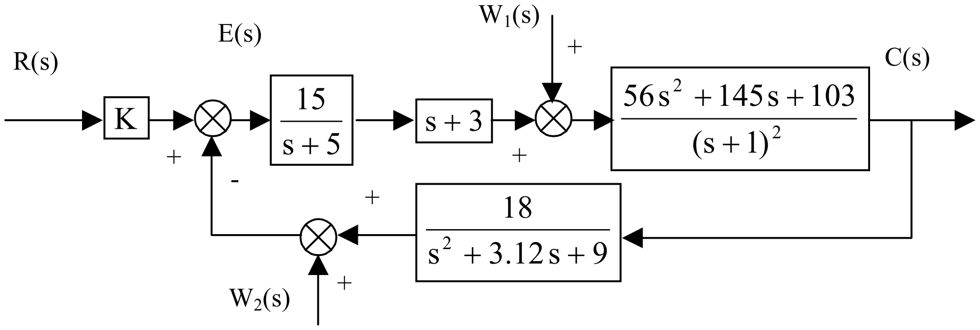
$$G(s) = \frac{K\,3^2}{s^2 + 2\cdot 0.52\cdot 3s + 3^2};\{K = \text{ganancia del sistema} = 2\} \Rightarrow \frac{18}{s^2 + 3.12s + 9}$$

- Planta

La relación entre la salida C'(s) y la entrada R'(s), viene dada por el flujograma. La obtención de la función de transferencia puede verse en el ejercicio 3.14.:

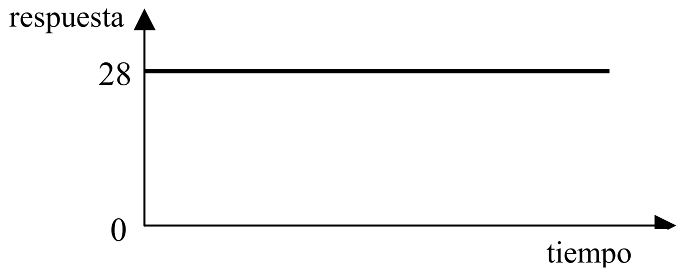
$$M'(s) = \frac{C'(s)}{R'(s)} = \frac{56s^2 + 145s + 103}{(s+1)^2}$$

Sustituyendo en el diagrama de bloques, tendremos:

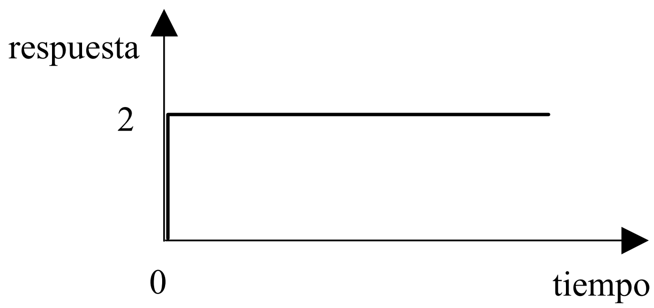


EJERCICIO 4.17.

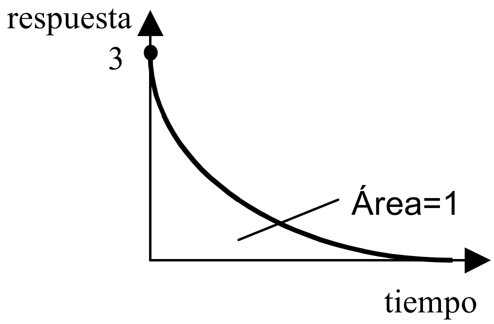
Se sabe que $G_0(s)$ ante una entrada $R(s) = \frac{0.1}{s}$ tiene una respuesta:



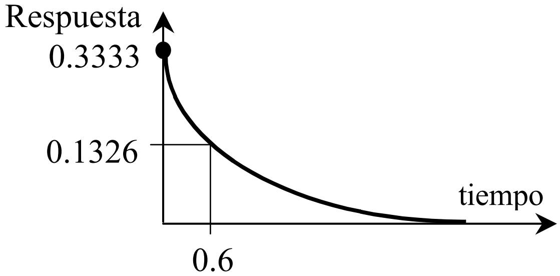
y que $G_1(s)$ ante una entrada escalón de amplitud $A = 2$ tiene una respuesta:



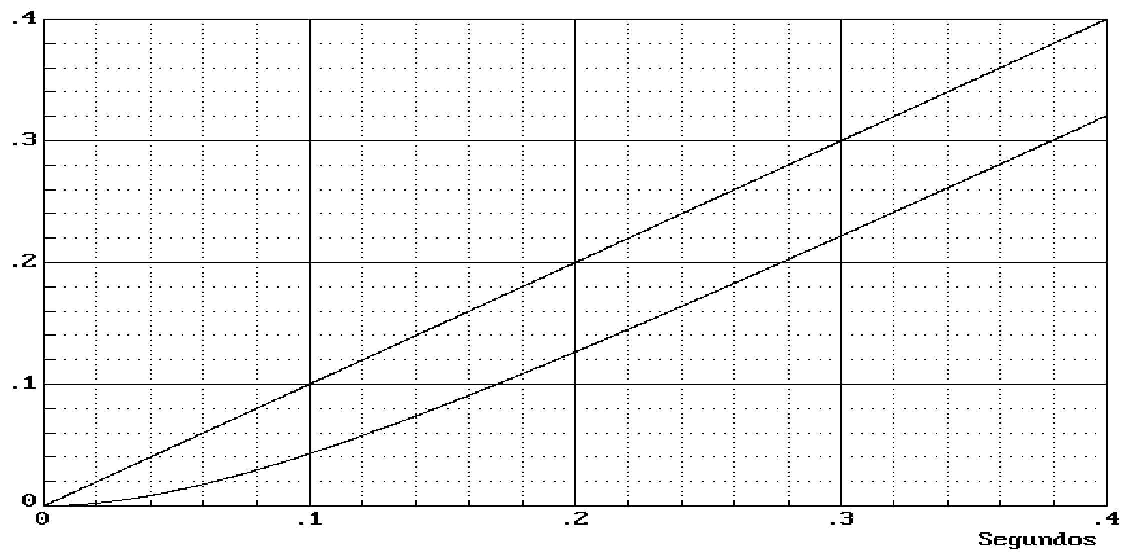
de $G_2(s)$ se conoce su respuesta impulso unitario:



de $G_3(s)$ se conoce también su respuesta impulso unitario:



y que $G_4(s)$ ante una entrada rampa unitaria tiene como respuesta:



Calcular dichas funciones de transferencia.

Comenzando por $G_0(s)$:

La entrada es un escalón de valor 0.1, y según la gráfica de la respuesta, se ve que es un escalón de amplitud 28, luego hemos amplificado la entrada un valor de:

$$G_0(s) = \frac{28}{0.1} \qquad \boxed{G_0(s) = 280}$$

Para $G_1(s)$, puede verse en la gráfica que la respuesta es un escalón de valor 2 y como esta respuesta se produce ante una entrada escalón de amplitud 2, la función de transferencia $G_1(s)$ es la unidad:

$$\boxed{G_1(s) = 1}$$

De $G_2(s)$, se sabe por el tipo de respuesta que se trata de un sistema de primer orden, que se define por la constante de tiempo y ganancia como:

$$G_2(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

La ecuación de la respuesta es: $c(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$, para $t \geq 0$

Integrando entre 0 e ∞, se obtiene el valor del área encerrada, y de ahí el valor de la ganancia.

$$\text{Área} = 1 = \int_0^\infty \frac{k}{T} e^{-t/T} dt = \frac{k}{T}\int_0^\infty e^{-t/T} dt = \frac{k}{T}\left[\frac{e^{-t/T}}{-1/T}\right]_0^\infty = \frac{k}{T}(-T)\,[0-1] = +\frac{kT}{T} = k$$

Luego la ganancia:

$$k=1$$

Del valor de la ordenada en el origen se obtiene la constante de tiempo, ya que:

Para $t = 0$:

$$c(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{k}{T} e^{-0/T} = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{3}$$

Luego será:

$$\boxed{G_2(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{3}+1\right)}}$$

Para $G_3(s)$ la respuesta tiene por ecuación:

$$g_3(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

y se dan dos puntos de dicha gráfica, por lo que se puede hallar las dos incógnitas que se tienen en la ecuación:

Para $t = 0$ $\qquad g_3(0) = \frac{K}{T} = 0.3333$

Para $t = 0.6$ $\qquad g_3(0.6) = 0.1326 = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{0.6}{T}} = 0.3333 \cdot e^{-\frac{0.6}{T}}$

$$\ln e^{-\frac{0.6}{T}} = \ln\frac{0.1326}{0.3333} \quad \Rightarrow \quad -\frac{0.6}{T} = -0.9217 \qquad \Rightarrow \quad T = 0.651$$

Luego:

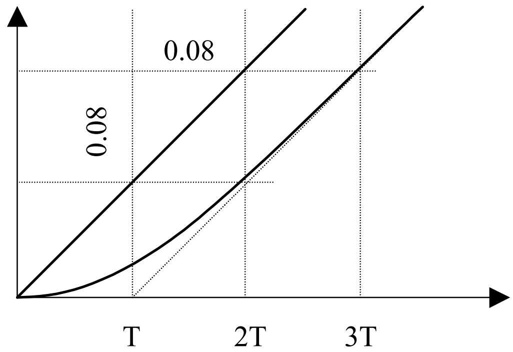
$$\boxed{G_3(s) = \frac{0.217}{1+0.651s}}$$

$G_4(s)$:

En la gráfica vemos que se trata de la respuesta de un sistema de primer orden a una entrada rampa unitaria, siendo el sistema de la forma:

$$G_4(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

siendo T el error en el infinito, luego de la gráfica:

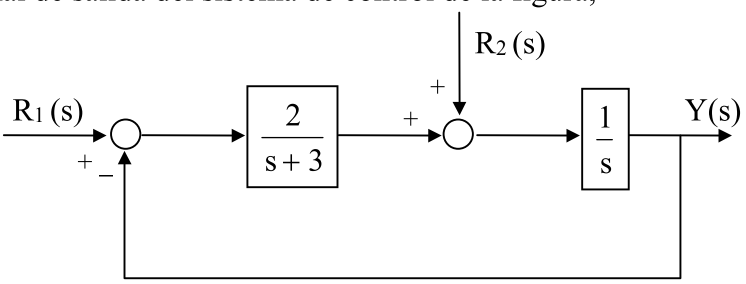


T = 0.08 segundos
Luego:

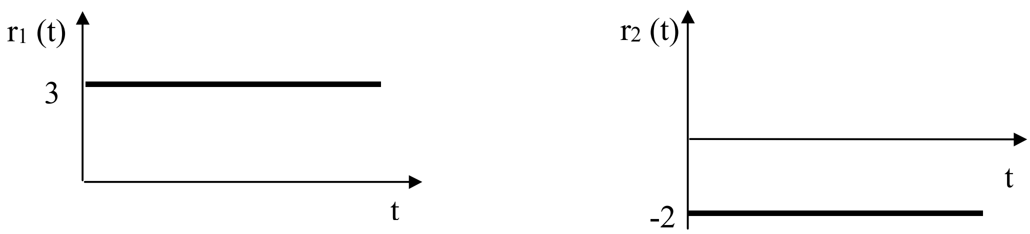
$$\boxed{G_4(s) = \frac{1}{0.08s + 1}}$$

EJERCICIO 4.18.

Obtener la señal de salida del sistema de control de la figura,

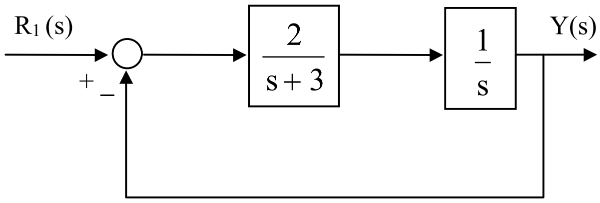


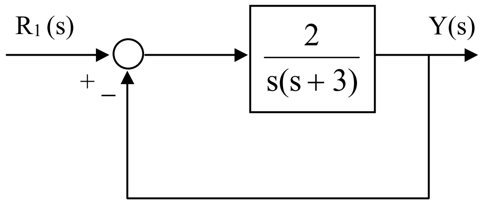
cuando se le aplican las entradas $r_1(t)$ y $r_2(t)$.



Aplicando superposición de las dos entradas se calculará la salida.

La salida cuando $r_2(t)=0$ es:

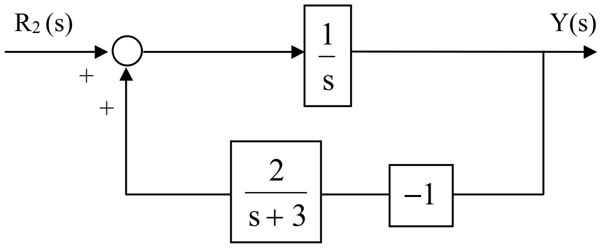




$$\frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+3)}}{1+\frac{2}{s(s+3)}} = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

$$Y(s)\Big|_{R_2(s)=0} = \frac{2}{s^2+3s+2} R_1(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{3}{s} = \frac{6}{s(s^2+3s+2)}$$

y cuando $r_1(t)=0$:



$$\frac{Y(s)}{R_2(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{2}{s(s+3)}} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$Y(s)\Big|_{R_1(s)=0} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} R_1(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}\cdot\frac{-2}{s} = \frac{-2s-6}{s(s^2+3s+2)}$$

Aplicando superposición:

$$Y(s) = Y(s)\Big|_{R_2(s)=0} + Y(s)\Big|_{R_1(s)=0} = \frac{6}{s(s^2+3s+2)} + \frac{-2s-6}{s(s^2+3s+2)} = \frac{-2s}{s(s^2+3s+2)} = \frac{-2}{s^2+3s+2}$$

Se obtiene ahora la transformada inversa de la respuesta:

$$Y(s) = \frac{-2}{s^2+3s+2} = \frac{-2}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \frac{-2}{(s+2)}\Bigg|_{s=-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

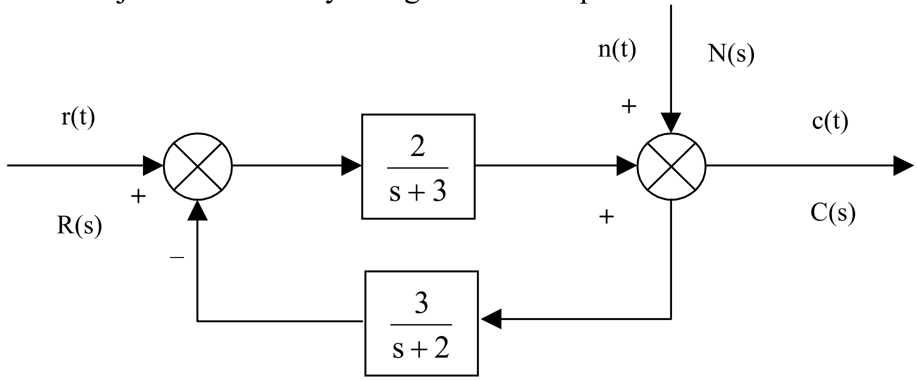
$$B = \frac{-2}{(s+1)}\Bigg|_{s=-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$y(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t} = 2(e^{-2t} - e^{-t})$$

EJERCICIO 4.19.

Para el sistema del ejercicio 3.21. cuyo diagrama de bloques se muestra a continuación:



donde la entrada r(t) es un escalón de amplitud 2, y la perturbación n(t) es de tipo exponencial decreciente, de amplitud unidad y constante de tiempo 1/3 segundos, calcular la respuesta temporal en ausencia y presencia de ruido.

En el ejercicio 3.21. se tiene el cálculo de las funciones de transferencia.

La función de transferencia salida/referencia es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2(s+2)}{s^2 + 5s + 12}$$

Y la función de transferencia salida/ruido:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 5s + 12}$$

Se calculará la transformada inversa de Laplace de la salida en cada una de las situaciones.

<u>Sin ruido</u>, (N(s) = 0):

$$\mathcal{L}^{-1}\left[C(s)\right] = c\,(t)$$

$$C(s) = \frac{4(s+2)}{s(s^2 + 5s + 12)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 5s + 12}$$

En donde, A, B y C se determinan a partir de:

$$4s + 8 = A\left(s^2 + 5s + 12\right) + \left(Bs + C\right)s$$

Si se comparan los coeficientes de s^2, s y s^0, términos de los dos miembros de la ecuación anterior, se obtiene:

$$0 = A + B, \qquad 4 = 5A + C, \qquad 8 = 12A$$

Resolviendo el sistema, se tiene: $A = C = \frac{2}{3} \qquad B = -\frac{2}{3}$

Por tanto,

$$C(s) = \frac{2}{3}\frac{1}{s} - \frac{2}{3}\frac{s}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2} + \frac{1+\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2} + \frac{7}{2}\frac{2}{\sqrt{23}}\frac{\frac{\sqrt{23}}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2}\right]$$

Luego,

$$\boxed{c(t) = \frac{2}{3}\left[1 - e^{\frac{-5t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) + \frac{7\sqrt{23}}{23}e^{\frac{-5t}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right)\right]}$$

<u>Con ruido</u>, $N(s) = \frac{1}{s+3}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[C_R(s) + C_N(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[C_R(s)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[C_N(s)\right] = c(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[C_R(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(s+2)}{s(s^2+5s+12)}\right] \qquad \text{(ya resuelta anteriormente)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[C_N(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+5s+12}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}+2}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2}\right] =$$

$$= \mathsf{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2}\right] - \mathsf{L}^{-1}\left[\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{23}}\right)\frac{\frac{\sqrt{23}}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2}\right] =$$

$$= e^{\frac{-5t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) - \mathsf{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{23}}{23}\frac{\frac{\sqrt{23}}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2}\right] =$$

$$= e^{\frac{-5t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{23}}{23}\,e^{\frac{-5t}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right)$$

Luego:

$$c(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\,e^{\frac{-5t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) + \frac{14}{3}\frac{\sqrt{23}}{23}\,e^{\frac{-5t}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) + e^{\frac{-5t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) -$$

$$-\frac{\sqrt{23}}{23}e^{\frac{-5t}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right)$$

$$\boxed{c(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,e^{\frac{-5t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) + \frac{11}{3}\frac{\sqrt{23}}{23}\,e^{\frac{-5t}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right)}$$