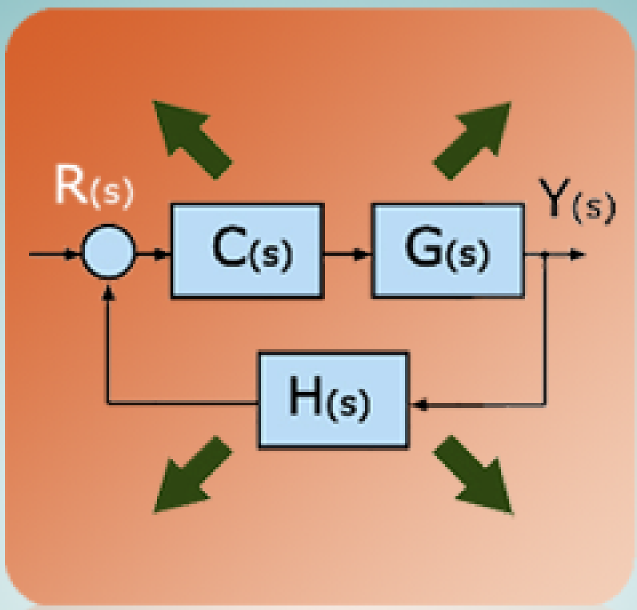
Automática

Ejercicios

Capítulo 6. Lugar de las Raíces



José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

EJERCICIO 6.1.

Trazar el lugar directo e inverso de las raíces para el sistema cuya FTLD es la siguiente:

$$G(s) = \frac{5000K}{s(s+50)(s+100)}; \qquad H(s) = 1$$

1) Ecuación característica:

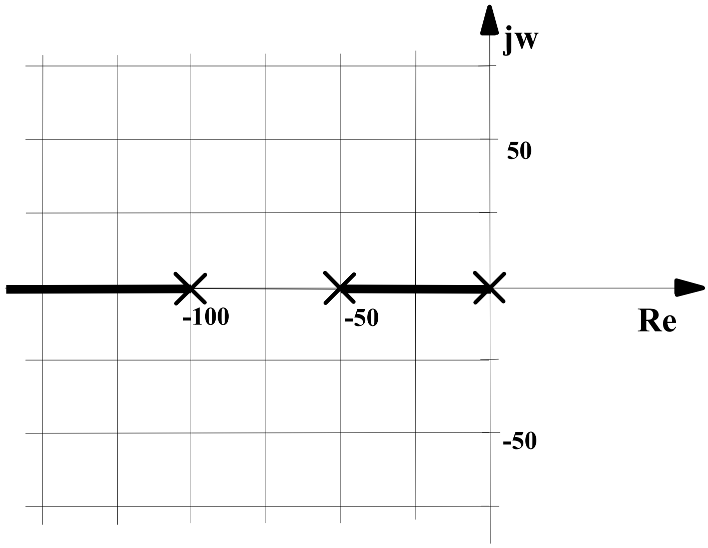
$$1 + K\frac{5000}{s(s+50)(s+100)} = 0$$

2) Número de ramas: 3.

3) Puntos de inicio: s = 0; s = -50; s = -100;

Puntos de finalización: 3 en infinito.

4) Lugar en eje real:



5) Simetría.

6) Asíntotas:

Directo:

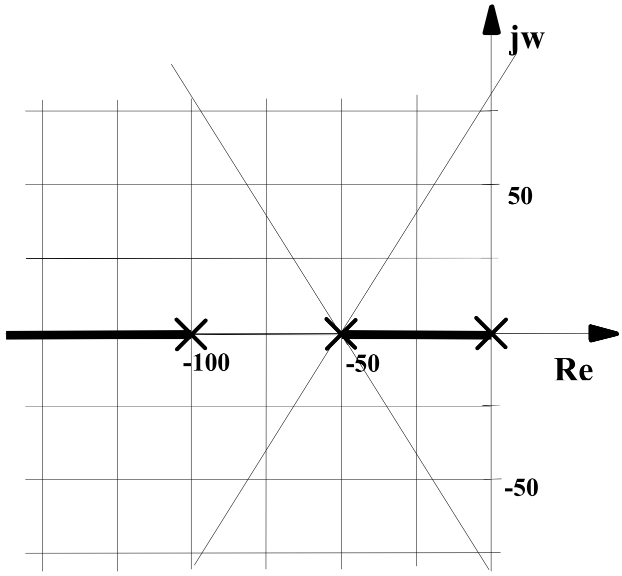
$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{P-Z} = \frac{180(2q+1)}{3} = 60^o; 180^o; 300^o$$

Inverso:

$$\theta_a = \frac{180(2q)}{P-Z} = \frac{180(2q)}{3} = 0^o; 120^o; 240^o$$

7) Centroide:

$$\sigma_o = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Zeros}}{P - Z} = \frac{-50 - 100}{3} = -50$$



9) Llegada y/o salida del eje real:

$$K = \frac{-s(s+50)(s+100)}{5000} = -\frac{s^3 + 150s^2 + 5000s}{5000}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{-1}{5000}\left[3s^2 + 300s + 5000\right] = 0$$

$$s_1 = -78.8; \quad s_2 = -21.1$$

10) Corte con los ejes imaginarios:

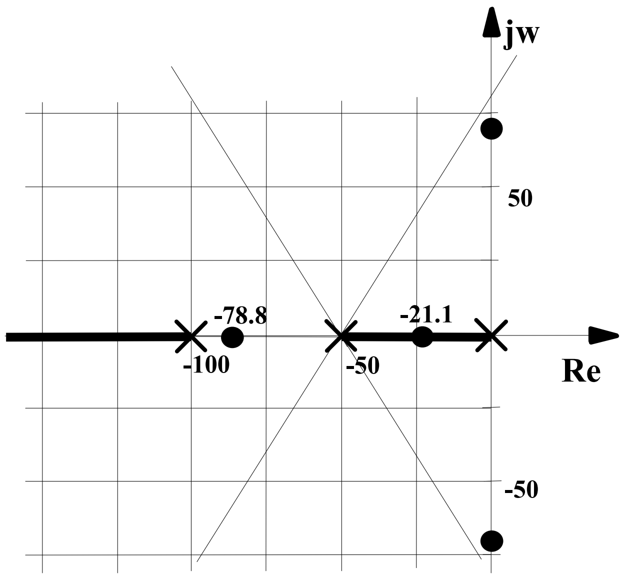
Ec. característica:

$$s^3 + 150s^2 + 5000s + 5000K = 0$$

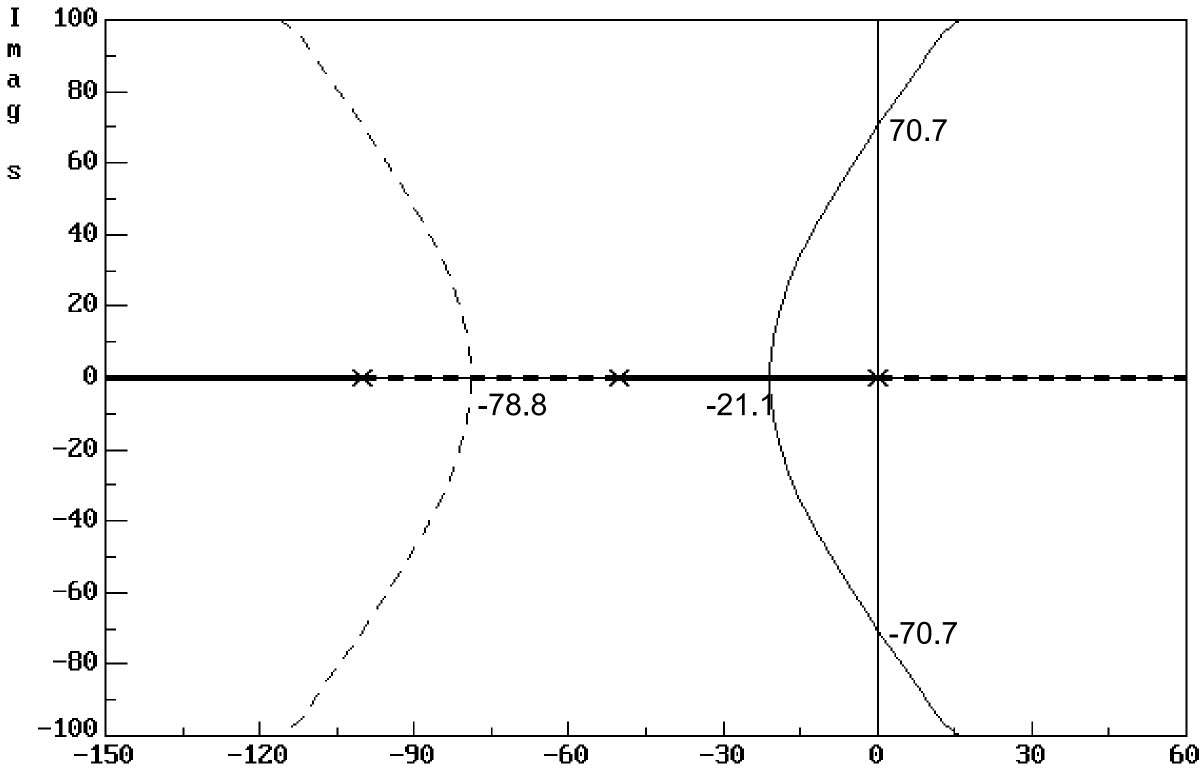
$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 5000 \\
s^2 & 150 & 5000K \\
s^1 & 5000 - \dfrac{5000K}{150} & \\
s^0 & 5000K &
\end{array}$$

a) $K = 0 \rightarrow s = 0$

b) $K = 150 \rightarrow s = \pm j70.7$



Con lo que el lugar de las raíces quedará:



Aparece en línea continua el lugar directo de las raíces y en discontinua el lugar inverso.

EJERCICIO 6.2.

Trazar el lugar de las raíces para el sistema cuya FTLA es la siguiente:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

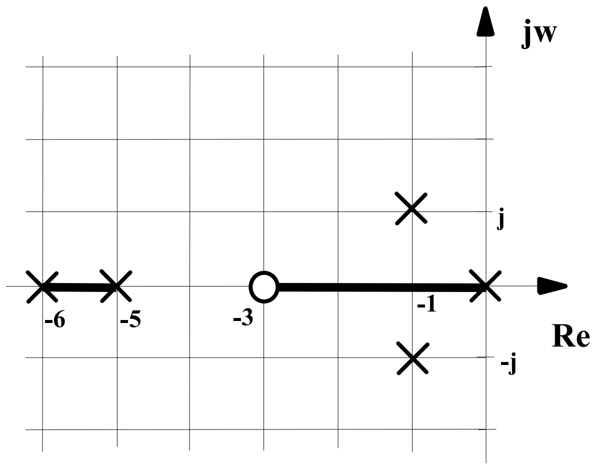
1) Ecuación característica:

$$1 + K\frac{(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)} = 0$$

2) Número de ramas: 5.

3) Puntos de inicio: 0; -5; -6; -1±j;
Puntos de finalización: -3; 4 en infinito.

4) Lugar en eje real:



5) Simetría.

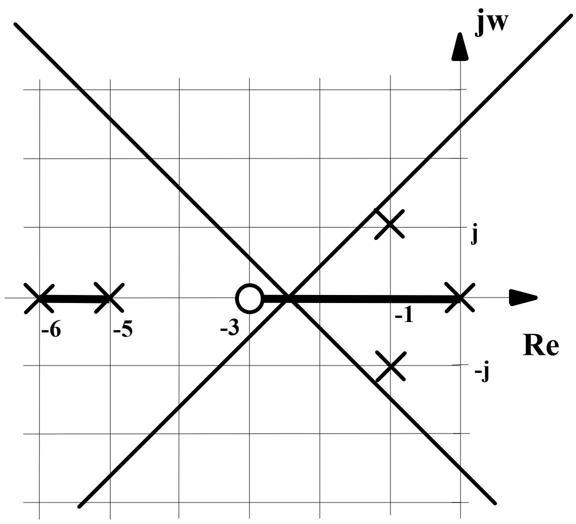
6) Asíntotas:

Directo:

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{P-Z} = \frac{180(2q+1)}{4} = 45^o;135^o;225^o;315^o$$

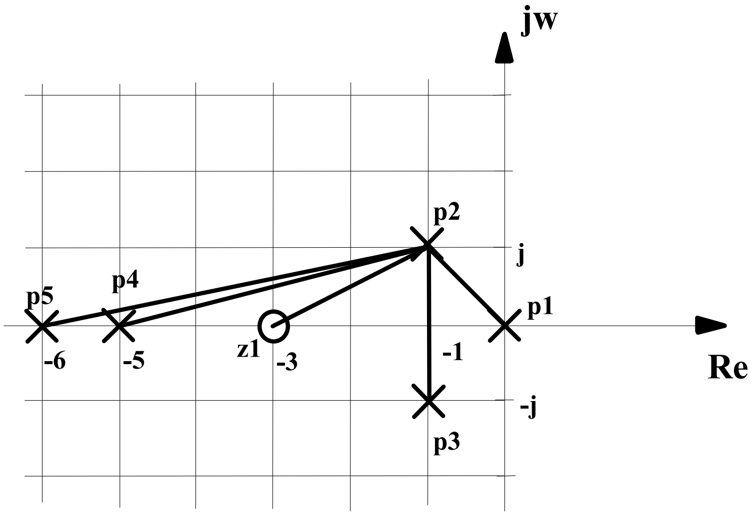
7) Centroide:

$$\sigma_o = \frac{\sum Polos - \sum Zeros}{P-Z} = \frac{-1-1-5-6-(-3)}{4} = -2.5$$



8) Angulos de salida de polos complejos:

$$\sum \theta_{ceros} - \sum \theta_{polos} = 180(2k+1)$$



$$\theta_{p1} = 180 - \mathrm{arctg}(1) = 135^{o}$$

$$\theta_{p3} = 90^{o}$$

$$\theta_{p4} = \mathrm{arctg}(1/4) = 14.036^{o}$$

$$\theta_{p5} = \mathrm{arctg}(1/5) = 11.31^{o}$$

$$\theta_{z1} = \mathrm{arctg}(1/2) = 26.56^{o}$$

$$26.56 - (135 + \theta_{p2} + 90 + 14.036 + 11.31) = 180$$

$$\theta_{p2} = -43.78^{o}$$

9) Llegada y/o salida del eje real:

Entre -5 y -6: (-5.5)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+5}+\frac{1}{a+6}+\frac{2(a+1)}{(a+1)^2+1^2}=\frac{1}{a+3}$$

$$\frac{1}{-5.5}+\frac{1}{a+5}+\frac{1}{a+6}+\frac{2(-5.5+1)}{(-5.5+1)^2+1^2}=\frac{1}{-5.5+3}$$

$$a=\begin{matrix}4.28\rightarrow \text{No}\\ -5.52\rightarrow \text{Si}\end{matrix}$$

10) Corte con los ejes imaginarios:

Ec. característica:

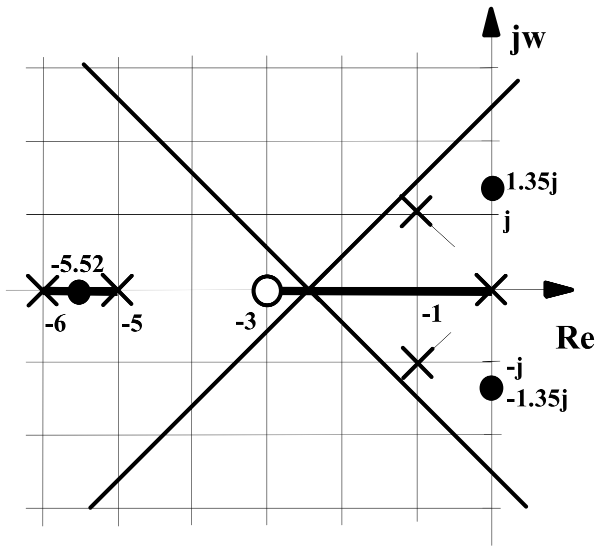
$$s^5+13s^4+54s^3+82s^2+(60+K)s+3K=0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 54 & 60+K\\
s^4 & 13 & 82 & 3K\\
s^3 & 47.7 & 60+0.77K & \\
s^2 & 65.64-0.21K & 3K & \\
s & a & & \\
s^0 & 3K & &
\end{array}$$

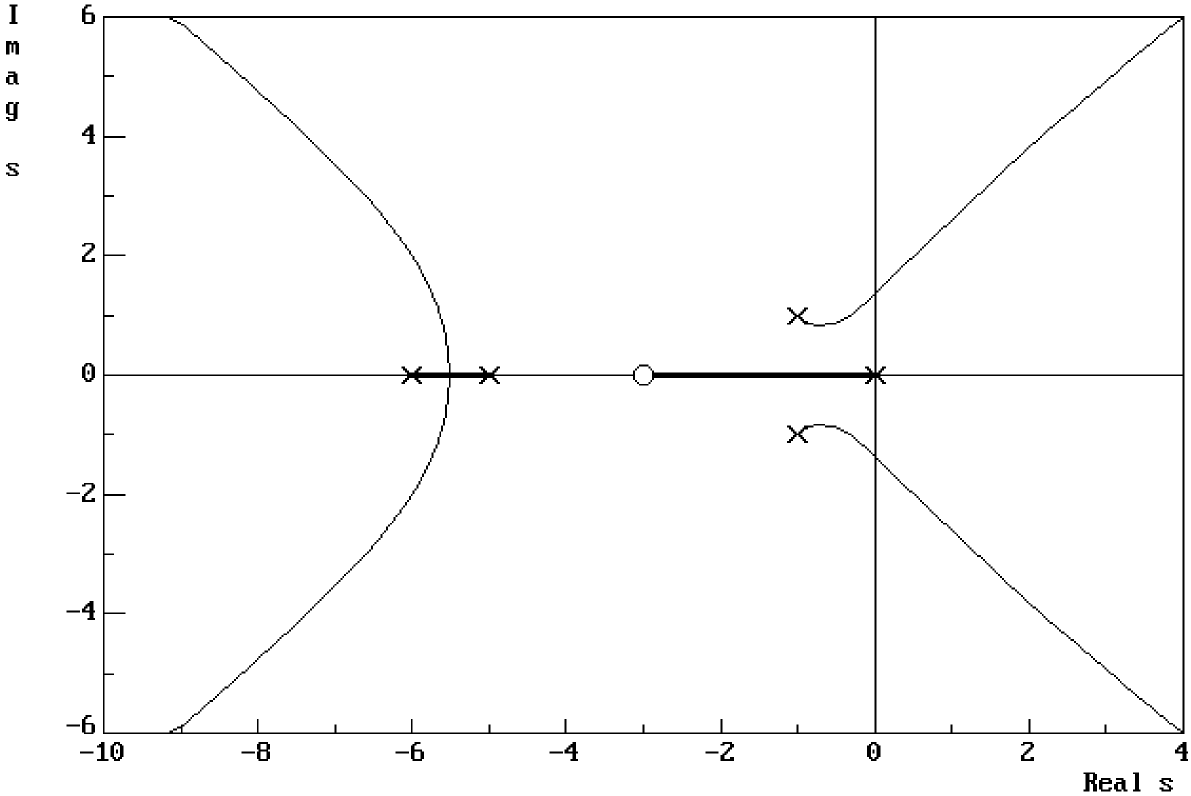
$$a=\frac{(65.64-0.21K)(60+0.77K)-143.1K}{65.64-0.21K}$$

a) $K=0\rightarrow s=0$

b) $a=0\rightarrow s=\pm 1.35j$

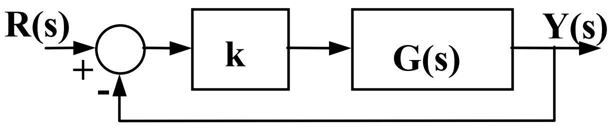


Y el lugar de las raíces completo:



EJERCICIO 6.3.

Dibujar el lugar de las raíces para el sistema de la figura siguiente:



$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+8s+25)}$$

Y calcular el valor de k para que la respuesta sea similar a la de un sistema de segundo orden con un sobreimpulso del 20% ante una entrada escalón unidad (sin tener en cuenta el cero de lazo cerrado).

1) Número de ramas = 4.

2) Puntos de comienzo: 0; -2; -4+3j; -4-3j;

Puntos de Fin: -3;

3) Lugar de las raíces en el eje real:

De -∞ a -3; De -2 a 0.

4) Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{180(2k+1)}{p-z}; 60º; 180º; 300º$$

5) Corte de las asíntotas con el eje imaginario:

$$s = \pm j2.33\,\mathrm{tg}\,60º = \pm j4.03$$

6) Centroide:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{p-z} = \frac{-2-4-4-(-3)}{4-1} = -2.33$$

7) Puntos de bifurcación en eje real:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{a-p_i} = \sum_{j=1}^{z} \frac{1}{a-z_i}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2} + \frac{2(a+4)}{(a+4)^2+3^2} = \frac{1}{a+3}$$

De 0 a -2:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2} + \frac{2(-1+4)}{(-1+4)^2+3^2} = \frac{1}{-1+3}$$

a= 9.7 (No válido) y a= -1.09 (válido).

De -3 a menos infinito:

$$\frac{1}{-4} + \frac{1}{-4+2} + \frac{2(-4+4)}{(-4+4)^2+3^2} = \frac{1}{a+3}$$

a= -4.4 (válido)

8) Puntos de corte con el eje imaginario:

Ecuación característica:

$$1 + k\frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+8s+25)} = 0$$

$$s^4 + 10s^3 + 41s^2 + (50+10k)s + 30k = 0$$

s^4	1	41	$30K$
s^3	10	$50+10K$	
s^2	$36-K$	$30K$	
s	$\dfrac{1800+10K-10K^2}{36-K}$		
s^0	$30K$		

En s:

k=-12,92.No válida porque es lugar inverso.

k=13,92.Válida.

Puntos correspondientes:

$$(36-13.92)s^2+30(13.92)=0$$

$$s=\pm 4.35j$$

En s^0:

k= 0.Válida.

Puntos correspondientes:

$$\left(1800+10(0)-10(0)^2\right)s=0$$

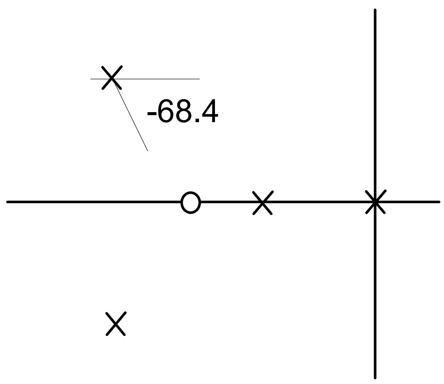
s=0

9) Angulos de salida de los polos complejos:

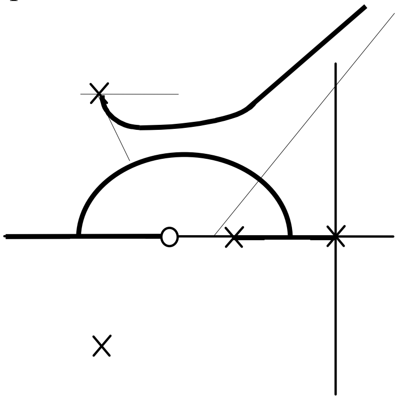
$$\sum_{j=1}^{z}\theta_{z_i}-\sum_{i=1}^{p}\theta_{p_i}=180^o$$

$$\left[180^o-\mathrm{arctg}(3)\right]-\left[\left(180^o-\mathrm{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right)+\left(180^o-\mathrm{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)\right)+90^o+\theta\right]=180^o$$

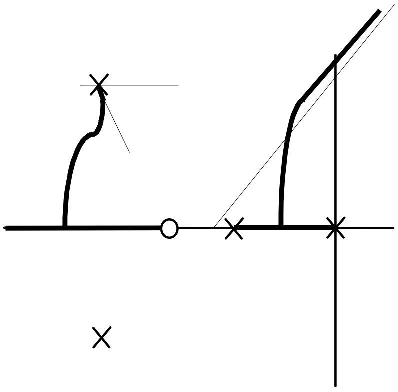
$$\theta=-68.4^o$$



Dos curvas posibles:



Forma 1



Forma 2

Comprobación aproximada sobre si es la forma 1:

El centro del circulo en s = - 2.745.

El punto más alto es: s = - 2.745-j1.655.

Deberá cumplir el criterio del argumento:

El cero :

$$\theta_z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1.655}{3-2.745}\right) = 81.24^{\circ}$$

Los polos:

$$\theta_{p2} = 180 - \operatorname{arctg}\left(\frac{1.655}{2.745-2}\right) = 114.23^{\circ}$$

$$\theta_{p0} = 180 - \operatorname{arctg}\left(\frac{1.655}{2.745}\right) = 148.91^{\circ}$$

$$\theta_{pcs} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{3-1.655}{4-2.745}\right) = -46.98^{\circ} = 313.02^{\circ}$$

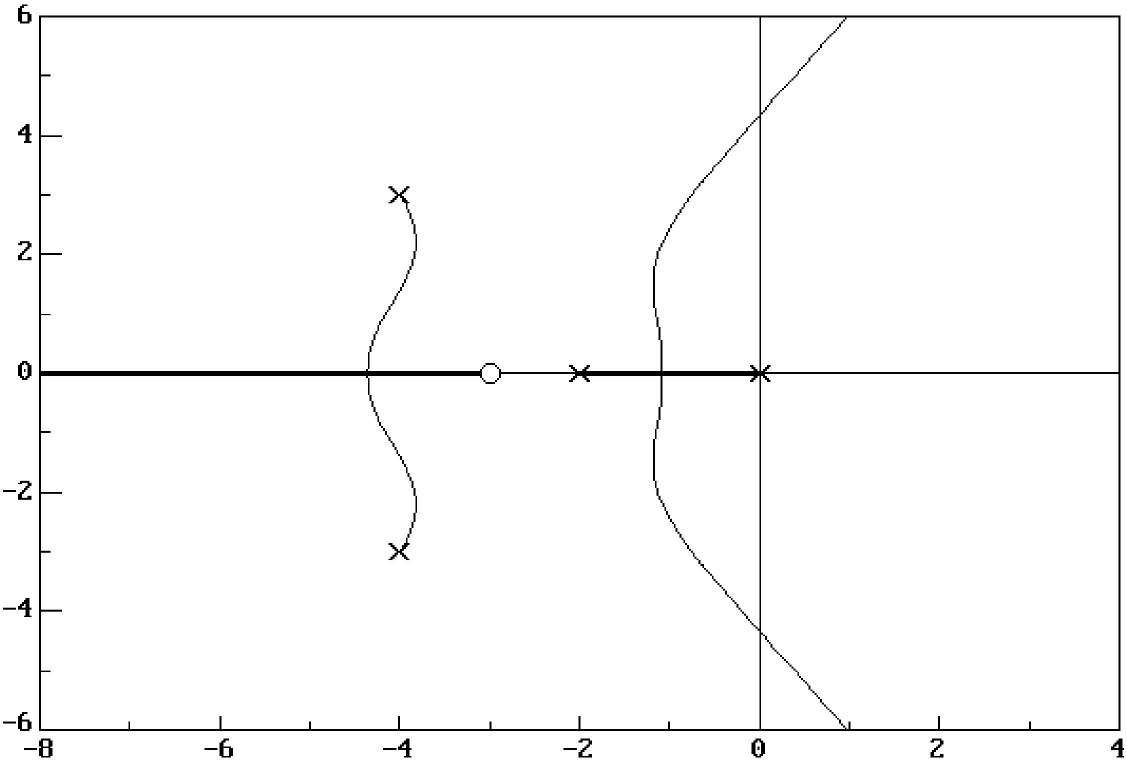
$$\theta_{pcs} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{3+1.655}{4-2.745}\right) = 74.91^{\circ}$$

La fase total será:

$$\sum \theta_{ceros} - \sum \theta_{polos} = 81.24^{\circ} - (114.23^{\circ} + 148.91^{\circ} + 313.02^{\circ} + 74.91 = -569.83^{\circ} = 150.17^{\circ} \neq 180^{\circ}$$

No existe lugar de las raíces en el punto observado puesto que no cumple el criterio del argumento.

Luego el lugar de las raíces definitivo será:

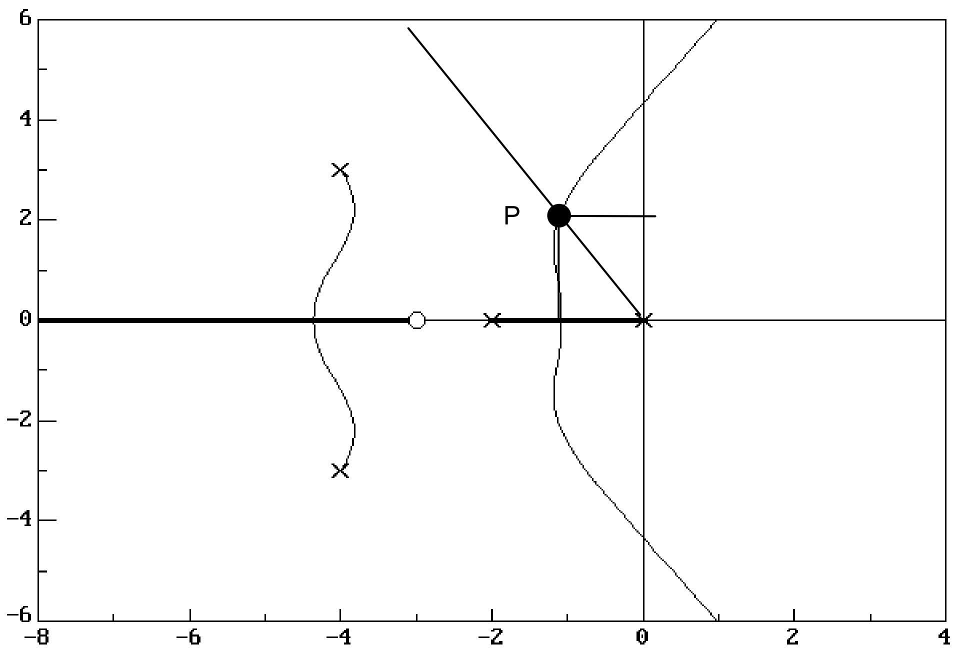


Para que la respuesta sea similar a la de un sistema de segundo orden con un sobreimpulso del 20% se tiene:

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.2$$

$$\delta = 0.45; \quad \theta = \arccos(\delta) = 62^o$$

Gráficamente sobre el lugar de las raíces representado se busca el punto que cumple dicha condición.



Aproximadamente su valor será:

P = -1.1+j 2.1.

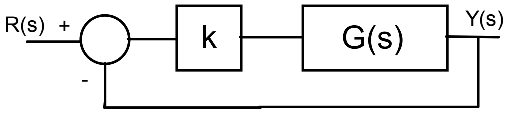
Se calcula ahora el valor de k aplicando el criterio del módulo:

$$k = \frac{1}{\left|G(s)\right|_{s=-1.1+j2.1}} \qquad k = \left|\frac{(-1.1+j2.1)(-1.1+j2.1+2)((-1.1+j2.1)^2+8(-1.1+j2.1)+25)}{10(-1.1+j2.1+3)}\right|$$

$$\boxed{K = 3.41}$$

EJERCICIO 6.4.

Sea el sistema:



Donde: $$G(s) = \frac{s+3}{s^2+s+4}$$

Dibujar el lugar de las raíces de los polos del sistema en lazo cerrado al variar el parámetro K desde 0 a infinito. Y calcular el valor de K para que la respuesta sea similar a la de un sistema de segundo orden con un sobreimpulso del 20% ante una entrada escalón unidad (sin tener en cuenta el cero de lazo cerrado).

1) Puntos de comienzo:

$$s_{1,2} = -0.5 \pm j1.93$$

2) Puntos de finalización:

$$s = -3$$

3) Lugar en el eje real:

(-∞,-3]

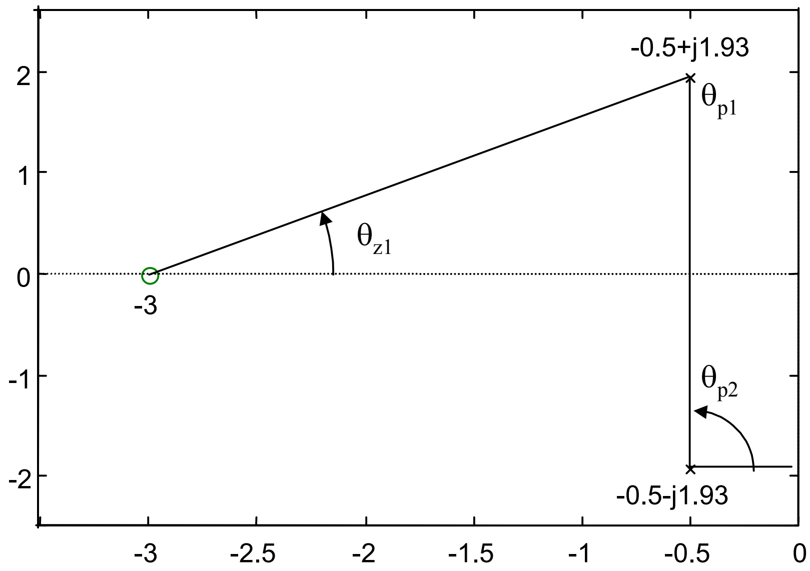
4) Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{180^o(2q+1)}{p-z} = \frac{180^o(2q+1)}{2-1} = 180^o$$

5) Centroide:

$$\sigma_a = \frac{\sum polos - \sum ceros}{p-z} = \frac{-1+3}{2-1} = 2$$

6) Ángulos de salida desde polos complejos conjugados:



$$\theta_{z1} = \text{arctg}\left(\frac{1.93}{2.5}\right) = 37.66^{\circ}$$

$$\theta_{p2} = 90^{\circ}$$

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^{\circ}$$

$$37.66^{\circ} - 90^{\circ} - \theta_{p1} = 180^{\circ}$$

$$\theta_{p1} = -180^{\circ} - 52.34^{\circ} = -232.34^{\circ}$$

7) Puntos de corte con el eje imaginario:

$$1 + K\frac{s+3}{s^2+s+4} = 0$$

$$s^2 + s + 4 + Ks + 3K = 0$$

$$s^2 + (K+1)s + 4 + 3K = 0$$

$$\begin{array}{c|ll} s^2 & 1 & 4+3K \\ s^1 & K+1 & \\ s^0 & 4+3K & \end{array}$$

$$K + 1 \geq 0 \quad K \geq -1$$

$$4+3K \geq 0 \quad K \geq -\frac{4}{3} \quad K \geq -1.33$$

Luego será: $K \geq -1$

8) Puntos de llegada al eje real:

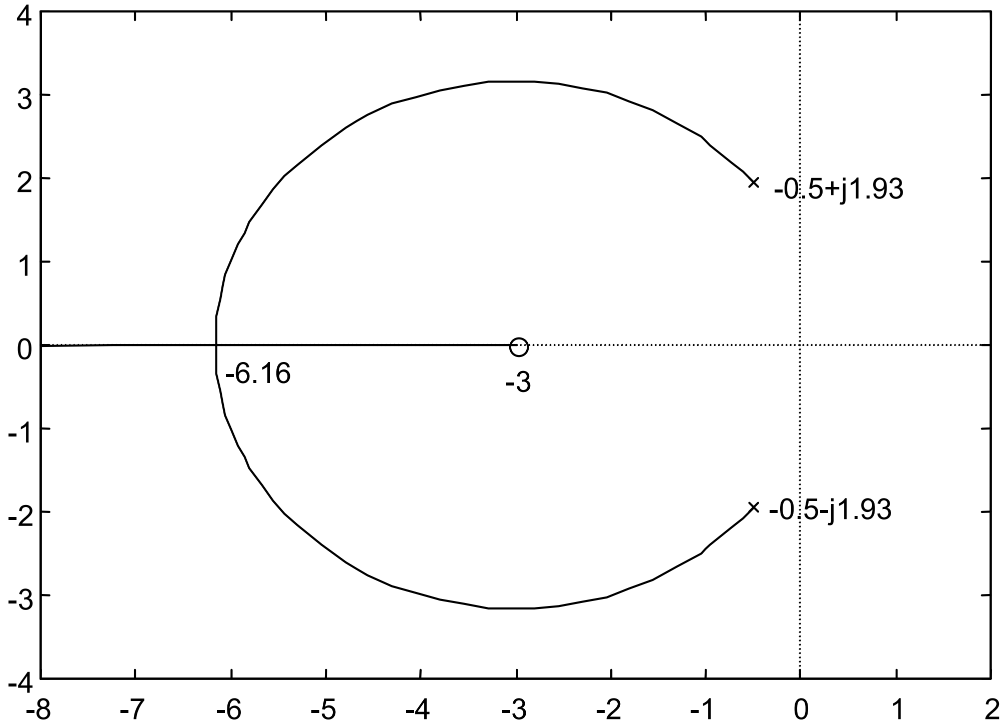
$$1+K\frac{s+3}{s^2+s+4}=0$$

$$K=-\frac{s^2+s+4}{s+3}$$

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{(2s+1)(s+3)-(s^2+s+4)}{(s+3)^2}=\frac{2s^2+7s+3-s^2-s-4}{(s+3)^2}=\frac{s^2+6s-1}{(s+3)^2}=0$$

$$s_{1,2}=\begin{cases}-6.16 \\ 0.16 \quad \text{No válido}\end{cases}$$

Y el lugar de las raíces completo:



Para que la respuesta sea similar a la de un sistema de segundo orden con un sobreimpulso del 20% se tiene:

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.043 \qquad -\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} = \ln 0.043 \qquad \delta^2\pi^2 = 9.9(1-\delta^2)$$

$$\delta^2(\pi^2 + 9.9) = 9.9 \qquad \delta^2 = 0.5 \qquad \delta = 0.707$$

$$\theta = \arccos\delta = 45^{\circ}$$

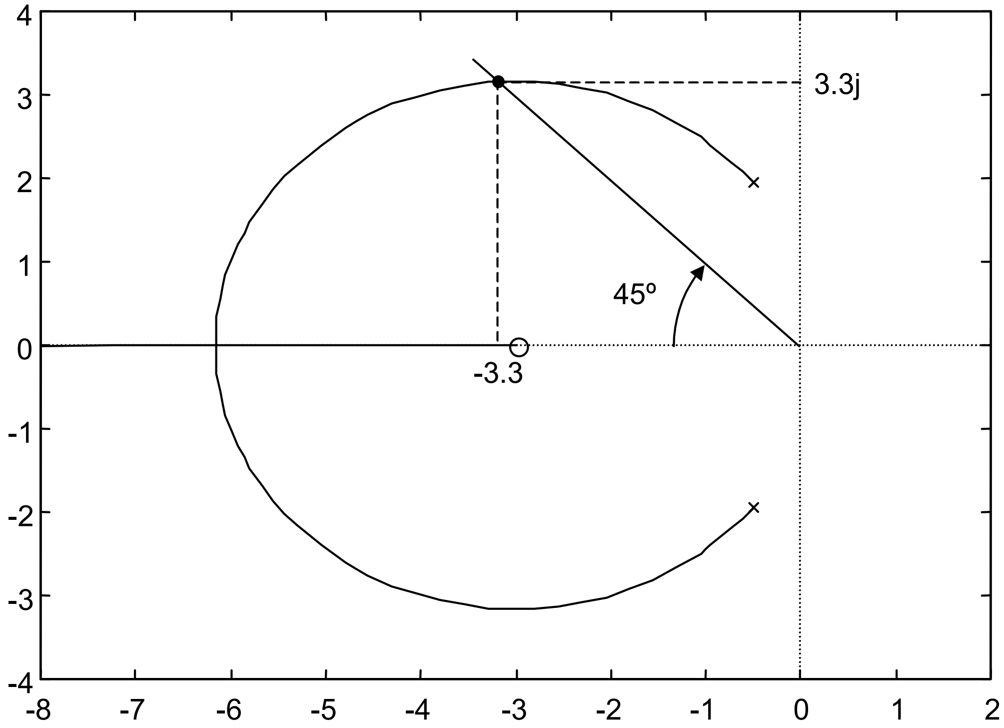
$$t_s = \frac{\pi}{\delta \cdot \omega_n} \leq \pi \qquad \delta \cdot \omega_n \geq 1 \qquad \omega_n \geq \frac{1}{0.707}$$

$$\boxed{\omega_n \geq 1.41}$$

Se puede observar que la restricción está fijada sólo por el máximo sobreimpulso.

El punto de funcionamiento se calcula a partir del lugar de las raíces, donde de forma aproximada será:

$$s_{1,2} = -3.3 \pm 3.3j$$



Como $K \cdot G(s) = -1$ $\qquad K = \left|\dfrac{1}{G(s)}\right|_{s=s_1}$

$$K = \left|\frac{s^2 + s + 4}{s + 3}\right| = \left|\frac{(-3.3 + j3.3)^2 + (-3.3 + j3.3) + 4}{(-3.3 + j3.3) + 3}\right| = \left|\frac{0.7 - j18.48}{-0.3 + j3.3}\right| = \left|\frac{18.49\angle -87.83^{\circ}}{3.31\angle 95.19^{\circ}}\right| = 5.58$$

$$\boxed{K = 5.58}$$

La función de transferencia de lazo cerrado con el regulador proporcional calculado será:

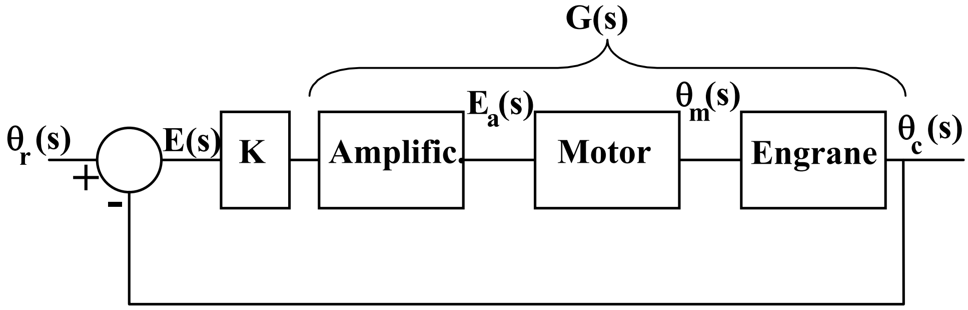
$$M(s)=\frac{5.58\dfrac{s+3}{s^2+s+4}}{1+5.58\dfrac{s+3}{s^2+s+4}}=\frac{5.58(s+3)}{s^2+s+4+5.58s+16.74}=\frac{5.58(s+3)}{s^2+6.58s+20.74}$$

El cero de lazo cerrado nos va a modificar la respuesta del sistema, de forma que el control proporcional diseñado sólo sería válido para el caso de que el sistema tuviera la forma canónica.

EJERCICIO 6.5.

Para el sistema del ejercicio 1.9. dibujar el lugar de las raíces para variaciones de una ganancia K en la cadena directa.

Modificando el diagrama de bloques obtenido en el ejercicio 1.9 para incluir la ganancia K se tiene:



Y la función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s)=\frac{50000}{s(s^2+50.5s+1725)}$$

Forma de la ecuación característica:

$$G(s)=1+K\frac{50000}{s(s^2+50.5s+1725)}$$

- Número de ramas: 3.

- Puntos de inicio y fin:

  Inicio: 0, -25.2±j32.9
  fin: tres en el infinito.

- Lugar en el eje real:

  Directo: Desde cero hasta - infinito.
  Indirecto: Desde cero hasta + infinito.

- Asíntotas:

Directo:

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = \frac{180(2q+1)}{3} \rightarrow 60^o, 180^o, -60^o$$

Inverso:

$$\theta_a = \frac{180(2q)}{p-z} = \frac{180(2q)}{3} \rightarrow 0^o, 120^o, -120^o$$

Centroide:

$$\sigma_o = \frac{\sum \text{de polos} - \sum \text{de ceros}}{p-z} = \frac{-25.2-25.2}{3} = -16.8$$

- Ángulos de salida de los polos complejos:

- Directo:

$$\sum \text{Angulos de Ceros} - \sum \text{Angulos de Polos} = 180(2q+1)$$

$$-\left[180^o - \text{arctg}\left(\frac{32.9}{25.2}\right) + 90^o + \theta\right] = 180^o \rightarrow \theta = -37.5^o$$

- Indirecto:

$$\sum \text{Angulos de Ceros} - \sum \text{Angulos de Polos} = 180(2q)$$

$$-\left[180^o - \text{arctg}\left(\frac{32.9}{25.2}\right) + 90^o + \theta\right] = 0^o \rightarrow \theta = 142.5^o$$

- Llegada y/o salida de ramas desde eje real:

No existe.

- Intersección con eje imaginario:

La ecuación característica del sistema:

$$s^3 + 50.5s^2 + 1725s + 50000K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1725 \\ s^2 & 50.5 & 50000K \\ s & 1725-990.1K & 0 \\ s^0 & 50000K & \end{array}$$

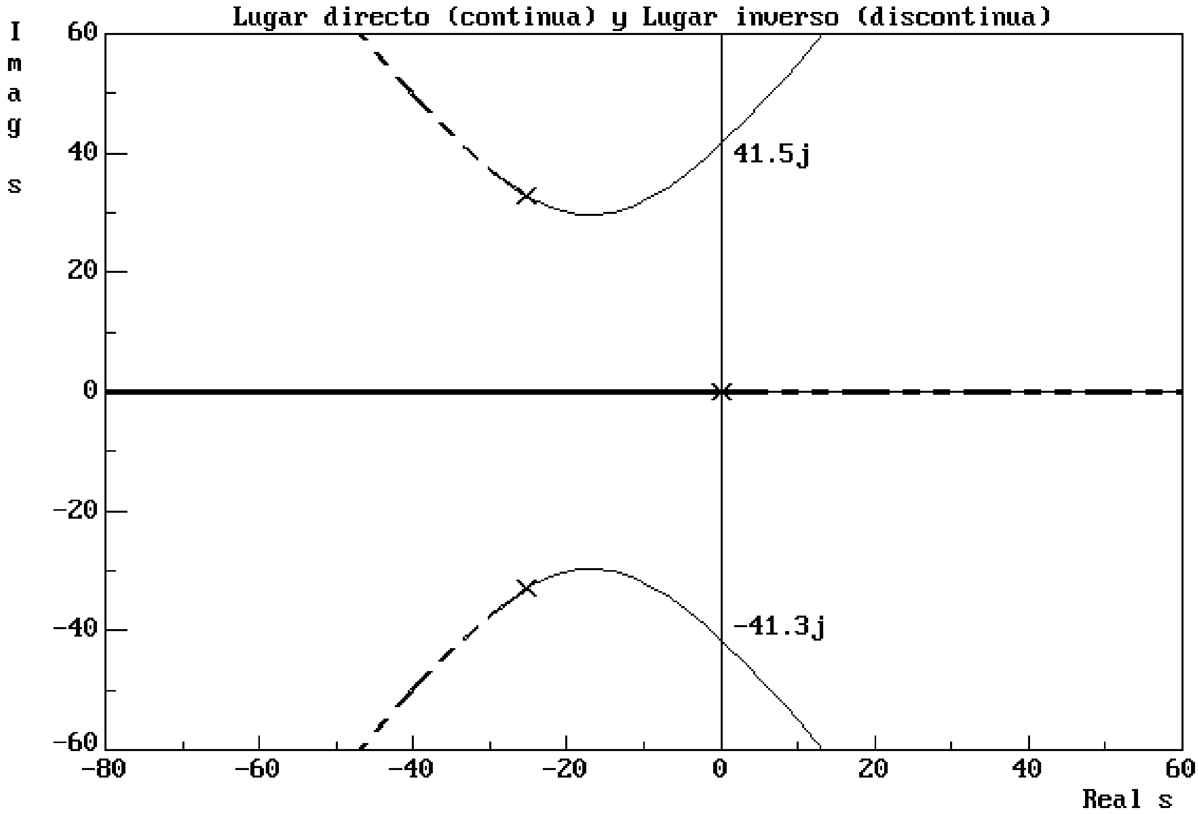
De la ecuación en s^o obtenemos el valor de K, y de la auxiliar s:

$$K = 0 \;\rightarrow\; (1725 - 990.1 \cdot 0)s = 0 \;\rightarrow\; s = 0$$

Y de la ecuación en s obtenemos otro valor de K y de la auxiliar s:

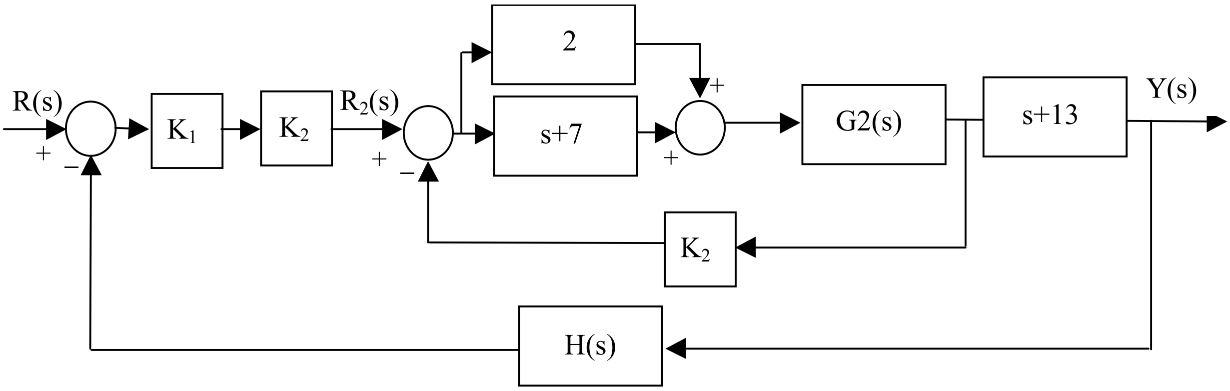
$$K = 1.74 \;\rightarrow 50.5s^2 + 50000 \cdot 1.74 = 0 \rightarrow\; s = \pm\, j41.5$$

Luego el lugar de las raíces (directo e inverso) queda:



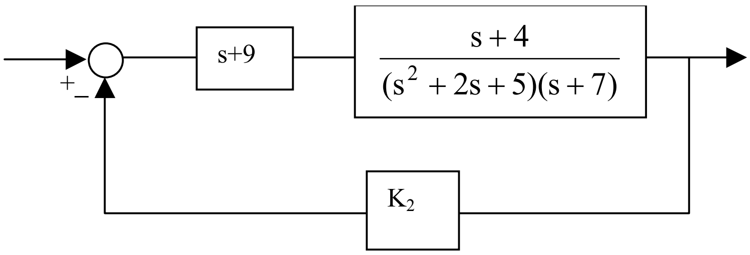
EJERCICIO 6.6.

Para el sistema que se muestra en la figura siguiente:



Diseñar mediante la técnica de lugar de las raíces, los reguladores K_1 y K_2 de forma adecuada para que el lazo interno tenga un comportamiento similar a un sistema de segundo orden subamortiguado con un máximo sobreimpulso del 11%, cuando se produce un escalón unidad en su señal de entrada $R_2(s)$ y para que el sistema total en lazo cerrado tenga un comportamiento similar a un sistema de segundo orden subamortiguado con un máximo sobreimpulso del 14%, cuando se introduce una entrada escalón unidad en la entrada R(s).

Se dibuja a continuación el lugar de las raíces para el lazo interno:



1) Ecuación característica: $1+G(s)\cdot H(s)=0$ $\quad 1+K_2(s+9)\dfrac{s+4}{(s^2+2s+5)(s+7)}=0$

2) Nº de ramas: 3

3) Puntos de inicio: -1±j2, -7

Puntos de finalización: -9, -4, ∞

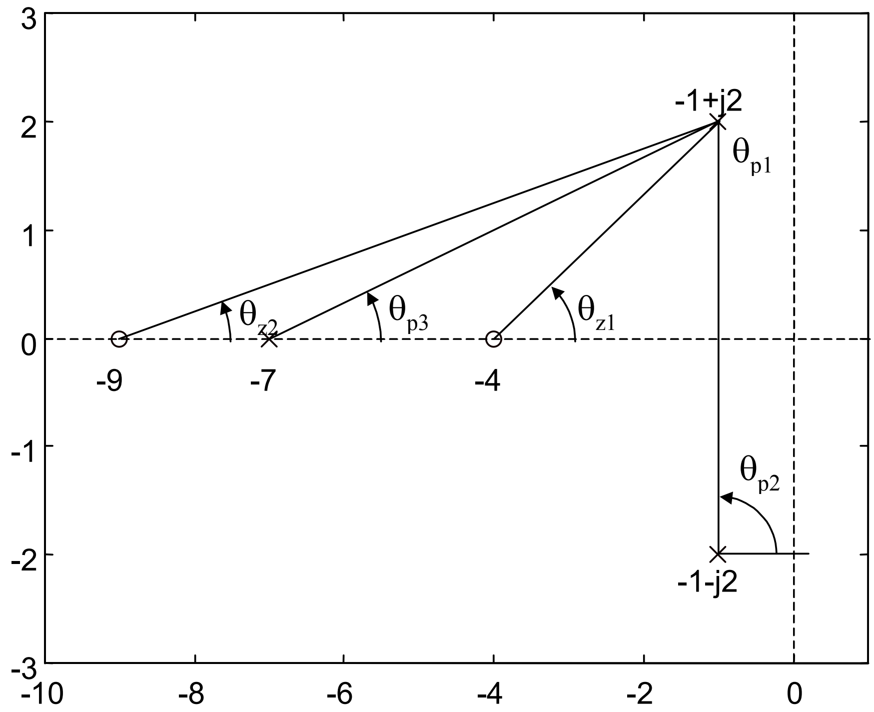
4) Lugar en el eje real: [-4,-7] y [-9, -∞]

5) El lugar de las raíces es simétrico respecto del eje real.

6) Asíntotas: $\theta_a = \dfrac{180^o(2q+1)}{p-z} = \dfrac{180^o(2q+1)}{3-2} = 180^o$

7) Centroide: $$\sigma_a = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Ceros}}{p - z} = \frac{-7-1-1-(-9-4)}{3-2} = 4$$

8) Ángulos de salida de los polos complejos conjugados:



$$\theta_{p2} = 90^o$$

$$\theta_{p3} = \text{arctg}\frac{2}{7-1} = 18.43^o$$

$$\theta_{z1} = \text{arctg}\frac{2}{4-1} = 33.69^o$$

$$\theta_{z2} = \text{arctg}\frac{2}{9-1} = 14.04^o$$

$$\theta_{z1} + \theta_{z2} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3}) = 180^o$$

$$33.69^o + 14.04^o - (\theta_{p1} + 90^o + 18.43^o) = 180^o$$

$$\theta_{p1} = -240.7^o = 119.3^o$$

Al ser el lugar de las raíces simétrico respecto al eje real:

$$\theta_{p2} = 240.7^o = -119.3^o$$

9) Punto de confluencia:

$$K_2 = -\frac{(s^2+2s+5)(s+7)}{(s+9)(s+4)} = \frac{s^3+2s^2+5s+7s^2+14s+35}{s^2+13s+36} = \frac{s^3+9s^2+19s+35}{s^2+13s+36}$$

$$\frac{dK_2}{ds} = -\frac{(3s^2+18s+19)(s^2+13s+36)-(s^3+9s^2+19s+35)(2s+13)}{(s^2+13s+36)^2}$$

$$\frac{dK_2}{ds} = -\frac{s^4+26s^3+206s^2+578s+229}{(s^2+13s+36)^2} = 0$$

$$s_1 = 0.47$$
$$s_2 = -14.41$$
$$s_{3,4} = -5.56 \pm j1.70$$

Luego el punto de confluencia es en s = - 14.41

Cuando el grado de la función de transferencia de lazo abierto es elevado, otra posible forma de obtener los puntos de dispersión es mediante iteración:

$$\frac{1}{a+7} + \frac{2(a+1)}{(a+1)^2+2^2} = \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+9}$$

Inicialmente se da al parámetro *a* el valor -14 como primera aproximación. Este valor se sustituye en todas las fracciones menos en las correspondientes a los polos o ceros de lazo abierto que limitan el punto de dispersión a calcular.

$$\frac{1}{-14+7} + \frac{2(-14+1)}{(-14+1)^2+2^2} = \frac{1}{-14+4} + \frac{1}{a+9}$$

$$\frac{1}{-7} + \frac{-26}{173} = \frac{1}{-10} + \frac{1}{a+9} \qquad -0.1931 = \frac{1}{a+9}$$

$$a+9 = -5.177 \qquad a = -14.18$$

Haciendo una segunda iteración:

$$\frac{1}{-14.18+7} + \frac{2(-14.18+1)}{(-14.18+1)^2+2^2} = \frac{1}{-14.18+4} + \frac{1}{a+9}$$

$$\frac{1}{-7.18} + \frac{-26.36}{177.71} = \frac{1}{-10.18} + \frac{1}{a+9}$$

$$a = -14.28$$

En una tercera iteración:

$$\frac{1}{-14.28+7}+\frac{2(-14.28+1)}{(-14.28+1)^2+2^2}=\frac{1}{-14.28+4}+\frac{1}{a+9}$$

$$a=-14.34$$

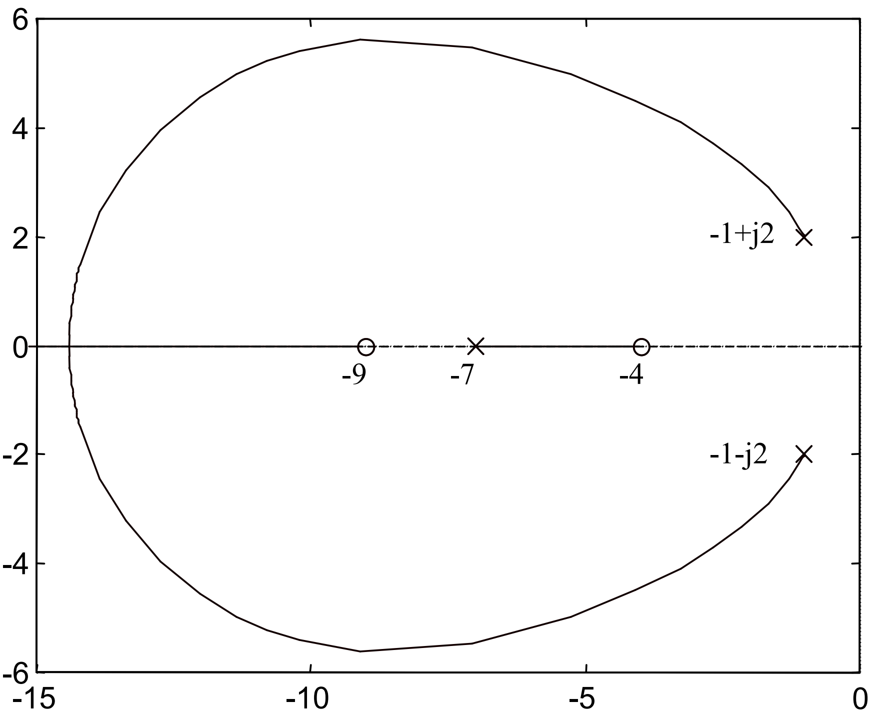
En la cuarta iteración:

$$\frac{1}{-14.34+7}+\frac{2(-14.34+1)}{(-14.34+1)^2+2^2}=\frac{1}{-14.34+4}+\frac{1}{a+9}$$

$$a=-14.37$$

10) No existe intersección con el eje imaginario.

La figura muestra la forma del lugar de las raíces:



La condición que se pide es que el máximo sobreimpulso sea del 11%:

$$M_p=e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}=0.11 \qquad \frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}=2.2073 \qquad 1.4233\delta=\sqrt{1-\delta^2}$$

$$2.0258\delta^2=1-\delta^2 \qquad 3.0258\delta^2=1 \qquad \delta=\sqrt{\frac{1}{3.0258}}=0.5749$$

Por tanto, se necesita conocer la posición de las raíces para un coeficiente de amortiguamiento de 0.5749.

$$\theta = \arccos\delta = 54.9^{\circ}$$

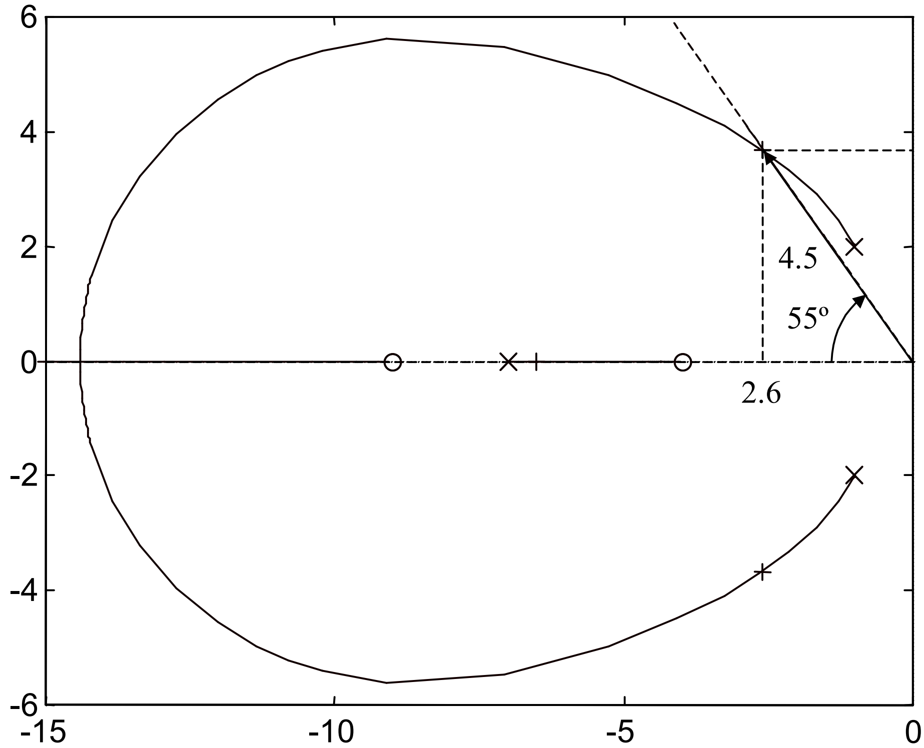
El punto de trabajo será de la forma:

$$p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = \omega_n(-0.5749 \pm j.8182)$$

Para calcular el punto del lugar de las raíces que cumple tener $\delta = 0.5749$, se traza la recta correspondiente a este coeficiente de amortiguamiento, es decir, una recta con el ángulo:

$$\theta = \arccos\delta = 54.9^{\circ}$$

y se lee de la gráfica el valor del punto de corte con el lugar de las raíces.



En este caso puede verse que la distancia desde el origen al punto de corte representa la frecuencia natural ω_n y toma un valor de 4.5.

Con el valor de δ y ω_n se obtiene el punto de trabajo:

$$p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -4.5\cdot 0.5749 \pm j\,4.5\cdot 8182 = -2.59 + j\,3.68$$

Aplicando el criterio del módulo se obtiene el valor de la ganancia correspondiente a ese punto:

$$K_2 = \left| -\frac{(s^2+2s+5)(s+7)}{(s+9)(s+4)} \right|_{s=-2.59+j3.68} = 2.69$$

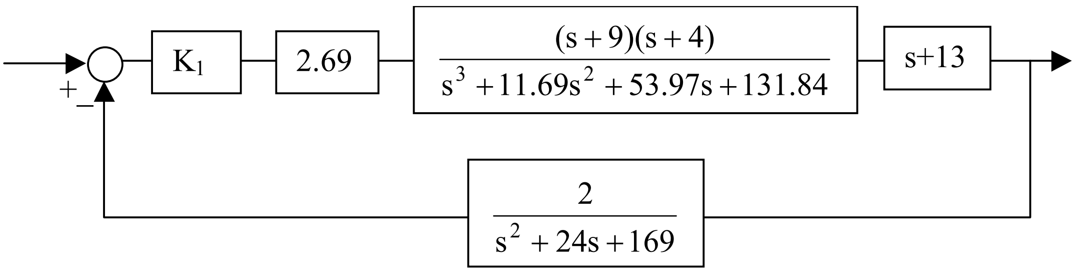
Pasamos ahora al sistema total. Una vez calculado el valor de K_2 calculamos la función de trasnferencia equivalente al lazo interno:

$$M_1(s)=\frac{(s+9)\cdot\dfrac{s+4}{(s^2+2s+5)(s+7)}}{1+2.69\cdot(s+9)\cdot\dfrac{s+4}{(s^2+2s+5)(s+7)}}=\frac{(s+9)(s+4)}{(s^2+2s+5)(s+7)+2.69\cdot(s+9)(s+4)}$$

$$M_1(s)=\frac{(s+9)(s+4)}{s^3+11.69s^2+53.97s+131.84}$$

$$M_1(s)=\frac{(s+9)(s+4)}{(s+6.51)((s+2.59)^2+3.68^2)}$$

El sistema completo quedará de la forma mostrada en el diagrama de bloques:



Se dibuja el lugar de las raíces:

1) Ecuación característica:

$$1+K_1\cdot 2.69\cdot\frac{(s+9)(s+4)}{s^3+11.69s^2+53.97s+131.84}(s+13)\cdot\frac{2}{s^2+24s+169}=0$$

$$1+K_1\cdot\frac{5.38\cdot(s+9)(s+4)(s+13)}{(s^3+11.69s^2+53.97s+131.84)(s^2+24s+169)}=0$$

2) Nº de ramas: 5

3) Puntos de inicio: -6.51,-2.59±j3.68, -12±j5
Puntos de finalización: -4,-9, -13, ∞

4) Lugar en el eje real: [-4,-6.51] y [-9, -13]

5) El lugar de las raíces es simétrico respecto del eje real.

6) Asíntotas:

$$\theta_a=\frac{180^o(2q+1)}{p-z}=\frac{180^o(2q+1)}{5-3}=90^o,270^o$$

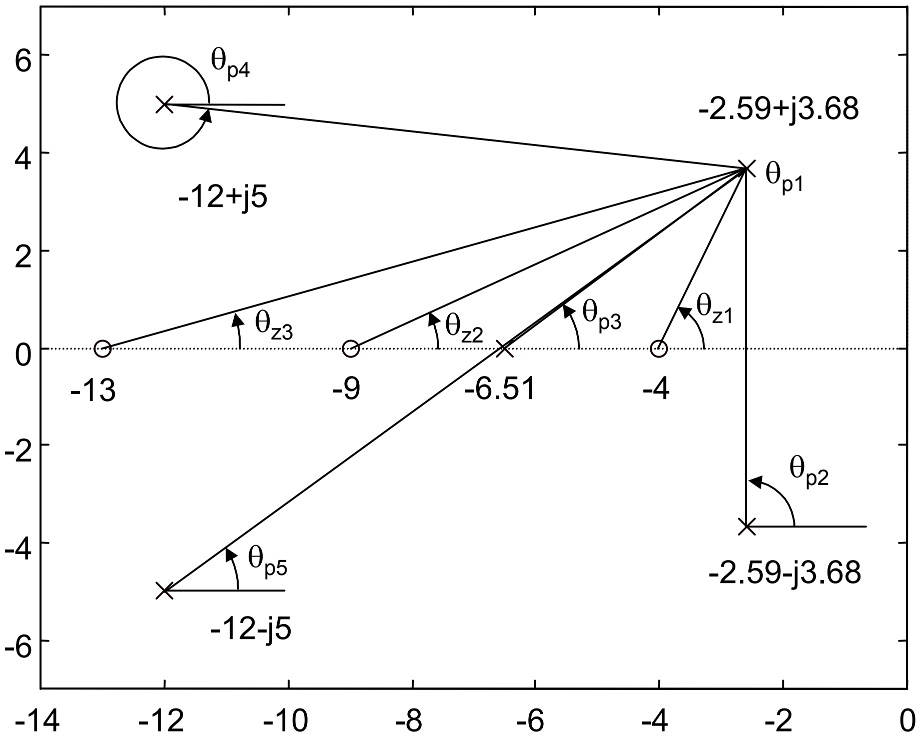
7) Centroide:

$$\sigma_a=\frac{\sum Polos-\sum Ceros}{p-z}=\frac{-6.51-2.59-2.59-12-12-(-4-9-13)}{5-3}=-4.845$$

8) Ángulos de salida de los polos complejos conjugados:

$$\sum \theta \, \text{ceros} - \sum \theta \, \text{polos} = 180^{\circ} (2q+1)$$

Para los polos complejos conjugados en –2.59±j3.68:



$$\theta_{z1} = \text{arctg}\frac{3.68}{4-2.59} = 69.04^{\circ}$$

$$\theta_{z2} = \text{arctg}\frac{3.68}{9-2.59} = 29.86^{\circ}$$

$$\theta_{z3} = \text{arctg}\frac{3.68}{13-2.59} = 19.47^{\circ}$$

$$\theta_{p2} = 90^{\circ}$$

$$\theta_{p3} = \text{arctg}\frac{3.68}{6.51-2.59} = 43.19^{\circ}$$

$$\theta_{p4} = 360 - \text{arctg}\frac{5-3.68}{12-2.59} = 352.01^{\circ}$$

$$\theta_{p5} = \text{arctg}\frac{5+3.68}{12-2.59} = 42.69^{\circ}$$

$$\theta_{z1} + \theta_{z2} + \theta_{z3} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{p4} + \theta_{p5}) = 180^{\circ}$$

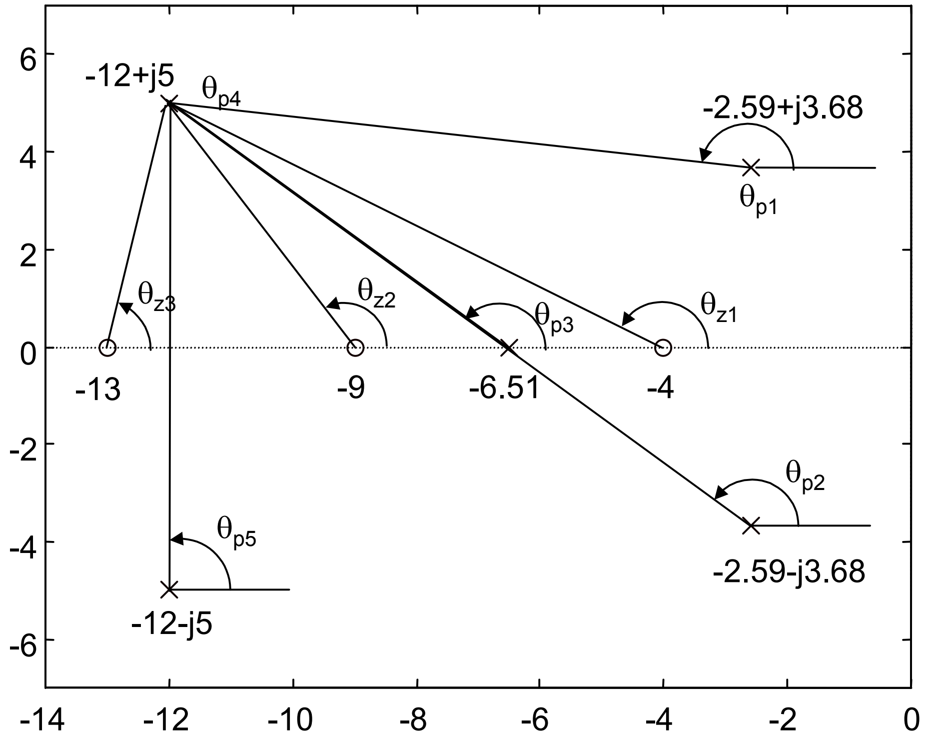
$$69.04º+29.86º+19.47º-(\theta_{p1}+90º+43.19º+352.01º+42.69º)=180º$$

$$\theta_{p1}=-589.52º=130.48º$$

Al ser el lugar de las raíces simetrico respecto al eje real:

$$\theta_{p2}=589.52º=-130.48º$$

Para los polos complejos conjugados en $-12\pm j5$:



$$\theta_{z1}=180º-\text{arctg}\frac{5}{12-4}=147.99º$$

$$\theta_{z2}=180º-\text{arctg}\frac{5}{12-9}=120.96º$$

$$\theta_{z3}=\text{arctg}\frac{5}{13-12}=78.69º$$

$$\theta_{p1}=180º-\text{arctg}\frac{5-3.68}{12-2.59}=172.01º$$

$$\theta_{p2}=180º-\text{arctg}\frac{5+3.68}{12-2.59}=137.31º$$

$$\theta_{p3}=180º-\text{arctg}\frac{5}{12-6.51}=137.67º$$

$$\theta_{p5}=90º$$

$$\theta_{z1} + \theta_{z2} + \theta_{z3} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{p4} + \theta_{p5}) = 180º$$

$$147.99º+120.96º+78.69º-(172.01º+137.31º+137.67º+\theta_{p4} + 90º) = 180º$$

$$\theta_{p4} = -369.35º = -9.35º$$

Al ser el lugar de las raíces simétrico respecto al eje real:

$$\theta_{p2} = 369.35º = 9.35º$$

9) Punto de confluencia:

$$K = \frac{(s^3 + 11.69s^2 + 53.97s + 131.84)(s^2 + 24s + 169)}{5.38 \cdot (s+9)(s+4)(s+13)}$$

$$K = \frac{s^5 + 35.69s^4 + 503.53s^3 + 3402.73s^2 + 12285.09s + 22280.96}{5.38s^3 + 139.88s^{2^{\circ}} + 1102.9s + 2517.84}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{\begin{array}{l}(5s^4 + 142.76s^3 + 1510.59s^2 + 6805.46s + 12285.09)(5.38s^3 + 139.88s^2 + 1102.9s + \\ + 2517.84) - (s^5 + 35.69s^4 + 503.53s^3 + 3402.73s^2 + 12285.09s + 22280.96)(16.14s^2 + \\ + 279.76s + 1102.9)\end{array}}{5.38s^3 + 139.88s^{2^{\circ}} + 1102.9s + 2517.84}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{\begin{array}{l}10.76s^7 + 611.6522s^6 + 14396{,}23s^5 + 182803.8s^4 + 1337946s^3 + \\ + 5478242s^2 + 10901740s + 6358220\end{array}}{5.38s^3 + 139.88s^{2^{\circ}} + 1102.9s + 2517.84}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

$$\begin{array}{l} s_1 = -0.9324 \\ s_2 = -10.623 \\ s_3 = -17.449 \\ s_{4,5} = -5.663 \pm j1.845 \\ s_{6,7} = -8.258 \pm j5.310 \end{array}$$

El punto de dispersión, será aquel en el que existe lugar en el eje real (para el lugar directo de las raíces) y corresponde con : $s_2 = -10.623$

Otra posible forma de obtener el punto de dispersión será utilizando el método iterativo:

$$\frac{1}{a+6.51} + \frac{2(a+2.59)}{(a+2.59)^2 + 3.68^2} + \frac{2(a+12)}{(a+12)^2 + 5^2} = \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+9} + \frac{1}{a+13}$$

Inicialmente se da al parámetro *a* el valor del punto medio entre los dos que limitan la rama. Este valor se sustituye en todas las fracciones menos en las correspondientes a los polos o ceros de lazo abierto que limitan el punto de dispersión a calcular.

a=-11

$$\frac{1}{a+6.51}+\frac{2(a+2.59)}{(a+2.59)^2+3.68^2}+\frac{2(a+12)}{(a+12)^2+5^2}=\frac{1}{a+4}+\frac{1}{a+9}+\frac{1}{a+13}$$

$$\frac{1}{-11+6.51}+\frac{2(-11+2.59)}{(-11+2.59)^2+3.68^2}+\frac{2(-11+12)}{(-11+12)^2+5^2}=\frac{1}{-11+4}+\frac{1}{a+9}+\frac{1}{a+13}$$

$$-0.220148=\frac{a+13+a+9}{(a+9)(a+13)}$$

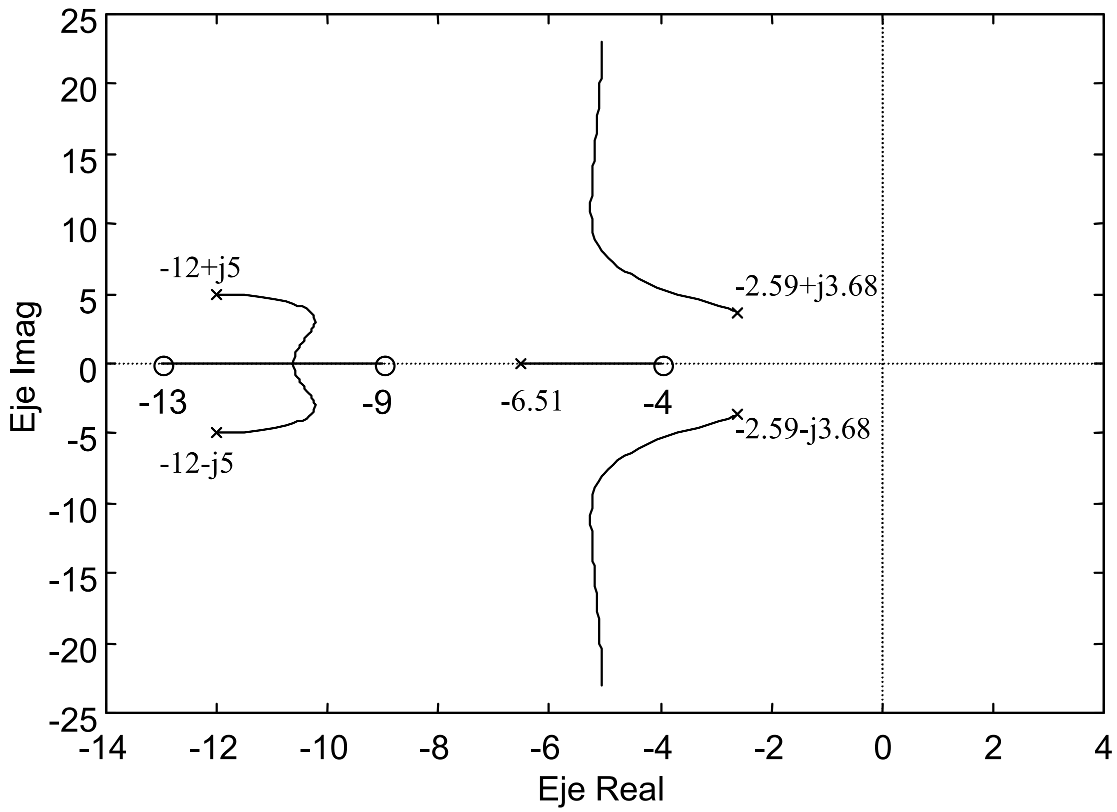
$$a^2+31.0848a+216.93=0$$

$$a=-10.6$$
$$a=-20.50$$

Luego el punto de dispersión será –10.6 ya que en ese punto existe lugar en el eje real. Si se desea una mayor precisión se debería seguir iterando.

10) No existe intersección con el eje imaginario.

La siguiente figura muestra la representación completa del lugar de las raíces.



La condición que se pide ahora es que el máximo sobreimpulso sea del 14%:

$$M_p = e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.14 \qquad \frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} = 1.9661 \qquad 1.5979\,\delta = \sqrt{1-\delta^2}$$

$$2.5532\,\delta^2 = 1-\delta^2 \qquad 3.5532\,\delta^2 = 1 \qquad \delta = \sqrt{\frac{1}{3.5532}} = 0.5305$$

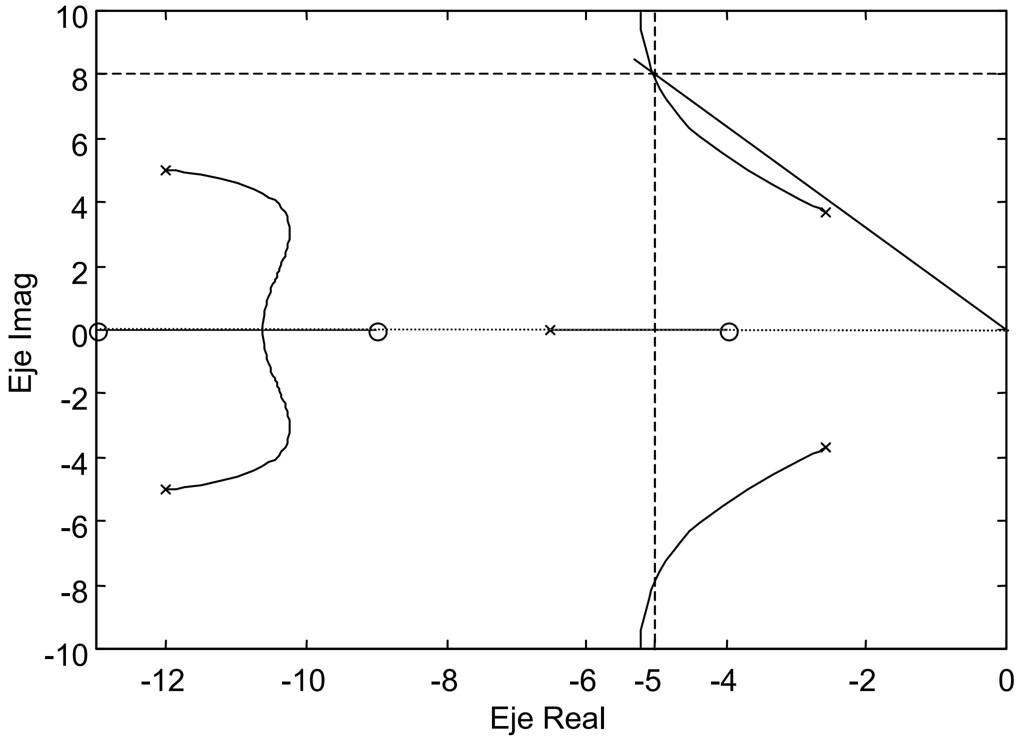
Por tanto, se necesita conocer la posición de las raíces para un coeficiente de amortiguamiento de 0.5305.

$$\theta = \arccos\delta = 57.96^{\circ} \approx 58^{\circ}$$

El punto de trabajo será de la forma:

$$p_{1,2} = -\delta\,\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = \omega_n\,(-0.5305 \pm j0.8477)$$

Para calcular el punto correspondiente del lugar de las raíces se traza una recta con el ángulo θ definido por las especificaciones. El punto de corte de dicha recta con el lugar de las raíces definirá el punto de funcionamiento.



De la gráfica puede leerse que el punto de funcionamiento corresponde con:

$$p_f = -5 + j\,8$$

Aplicando el criterio del módulo se obtiene el valor de la ganancia K_1:

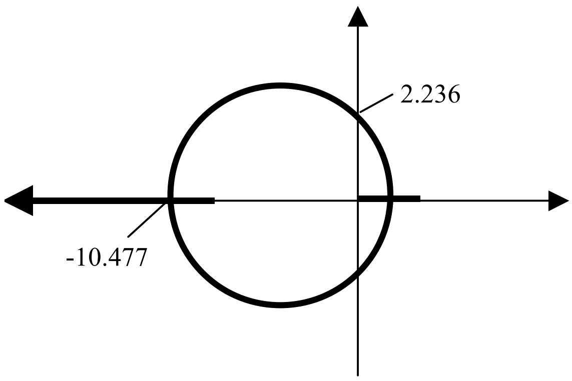
$$K_1 = \left| \frac{(s^3 + 11.69s^2 + 53.97s + 131.84)(s^2 + 24s + 169)}{5.38 \cdot (s+9)(s+4)(s+13)} \right|_{s=-5+j8} = 12.3$$

Luego los valores de los reguladores son:

$$\boxed{K_1 = 12.3} \qquad \boxed{K_2 = 2.69}$$

EJERCICIO 6.7.

La figura representa el lugar de las raíces de un sistema de control que tiene realimentación unitaria.



Obtener la función de transferencia de la planta e indicar los valores de K para los cuales el sistema pasa por distintos modos de funcionamiento.

La función de transferencia será de la forma:

$$G(s) = \frac{k(s+a)}{s(s-b)}$$

No existe ninguna otra configuración de polos y ceros posible para ese lugar.

Corte con el eje imaginario:

Ecuación característica:

$$1 + \frac{k(s+a)}{s(s-b)} = 0$$

$$s^2 + (k-b)s + ka = 0$$

Por Routh:

s^2	1	ka
s^1	k-b	
s^0	ka	

Igualando a cero el término de la segunda fila:

$$k\text{-}b = 0 \qquad k = b$$

Ecuación auxiliar:

$$s^2 + ka = 0 \qquad\qquad s^2 + ab = 0$$

$$s = \pm j\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{ab} = 2.236$$

$$ab = 5$$

Puntos de bifurcación:

$$k = -\frac{s(s-b)}{(s+a)} \qquad\qquad \frac{dk}{ds} = -\frac{(2s-b)(s+a) - s(s-b)}{(s+a)^2} = 0$$

$$2s^2 + 2as - bs - ab - s^2 + bs = 0 \qquad\qquad s^2 + 2as - ab = 0$$

$$s = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4ab}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 + ab} = -10.477$$

Como ab = 5:

$$-a \pm \sqrt{a^2 + 5} = -10.477$$

$$a - 10.477 = \sqrt{a^2 + 5}$$

$$a^2 - 20.954a + 10.477^2 = a^2 + 5$$

$$a = \frac{10.477^2 - 5}{20.954} = 5$$

$$b = 1$$

$$G(s) = \frac{k(s+5)}{s(s-1)}$$

El corte con el eje imaginario es para k= b =1

$$\boxed{\text{Para } 0 < k < 1 \text{ Inestable}}$$

Si se hace:

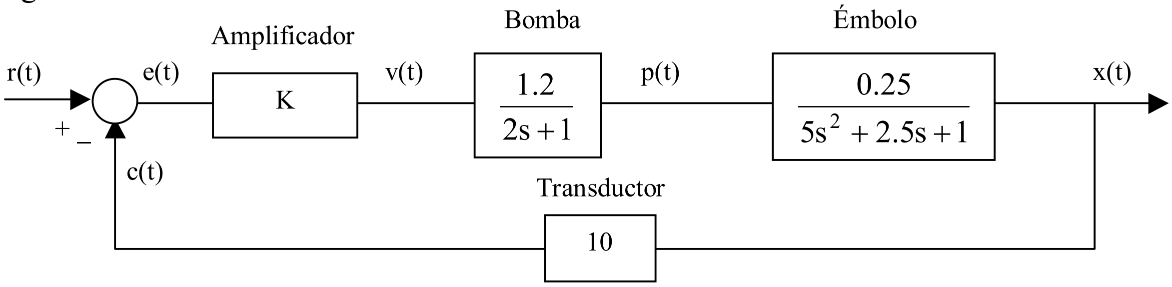
$$k = \left|\frac{s(s-1)}{s+5}\right|_{s=-10.477} = 21.9$$

$$\boxed{\text{Para } 1 < k < 21.9 \text{ Subamortiguado}}$$

$$\boxed{\text{Para } k > 21.9 \text{ Sobreamortiguado}}$$

EJERCICIO 6.8.

Para el sistema del ejercicio 1.12., cuyo diagrama de bloques se indica en la figura, dibujar el lugar de las raíces.



$$G(s)\cdot H(s)=\frac{3}{10s^3+10s^2+4.5s+1}=\frac{3}{((s+0.25)^2+0.3708^2)(s+0.5)}$$

1) Puntos de inicio: $s_{1,2}=-0.25\pm j0.3708$ $\qquad s_3=-0.5$

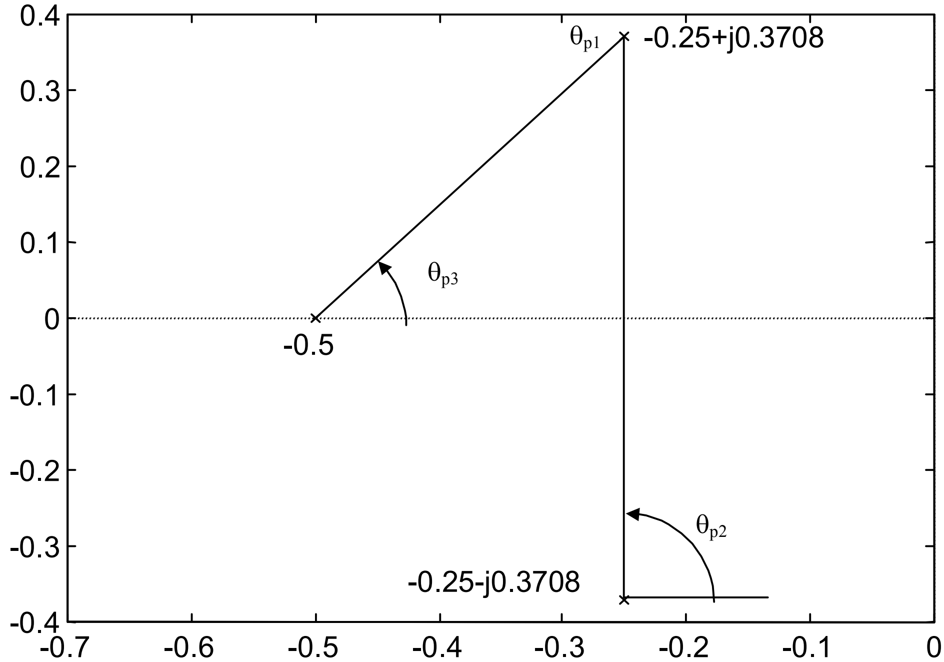
Puntos de finalización: ∞

2) Lugar en el eje real: $(-\infty,-0.5]$

3) Asíntotas:
$$\theta=\frac{180(2q+1)}{3}=\begin{cases}60^{\circ}\\180^{\circ}\\300^{\circ}\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{-0.25-0.25-0.5}{3}=-\frac{1}{3}$$

4) Ángulos de salida de los polos complejos conjugados:



$$\theta_{p2} = 90^{o}$$

$$\theta_{p3} = \operatorname{arctg}\frac{0.3708}{0.5-0.25} = 56.01^{o}$$

$$\sum\theta_{Ceros} - \sum\theta_{Polos} = 180^{o}$$

$$-(\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3}) = 180^{o}$$

$$-(\theta_{s} + 90^{o}+56.01^{o}) = 180^{o}$$

$$\theta_{p1} = -326.02^{o} = 33.98^{o}$$

$$\theta_{p2} = 326.02^{o} = -33.98^{o}$$

5) Cortes con el eje imaginario:
La ecuación característica del sistema es: $1 + K \cdot G(s) \cdot H(s) = 0$

$$1 + K\frac{0.3}{10s^{3} + 10s^{2} + 4.5s + 1}10 = 0$$

$$10s^{3} + 10s^{2} + 4.5s + 1 + 3K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^{3} & 10 & 4.5 \\ s^{2} & 10 & 1+3K \\ s^{1} & 3.5\text{-}3K & \\ s^{0} & 1+3K & \end{array}$$

$$1 + 3K \geq 0 \qquad K \geq -\frac{1}{3}$$

$$3.5 - 3K \geq 0 \qquad K \leq 1.167$$

$$\text{luego} \quad -0.333 \leq K \leq 1.167$$

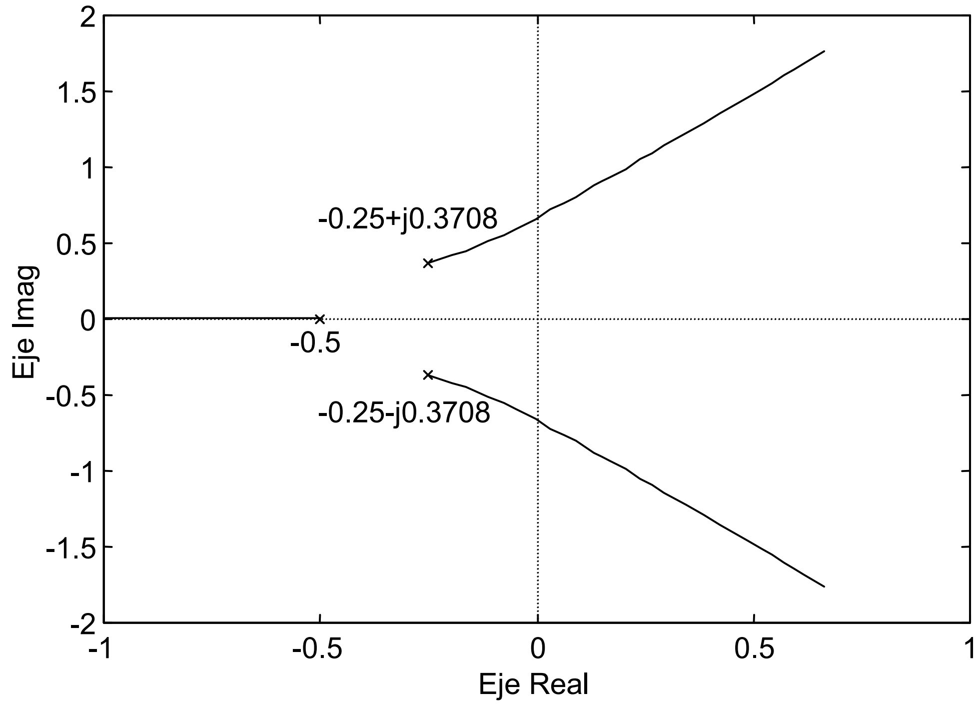
El punto de corte con el eje imaginario es para K=1.167

Construimos la ecuación auxiliar:

$$10s^{2} + 1 + 3 \cdot 1.167 = 0$$

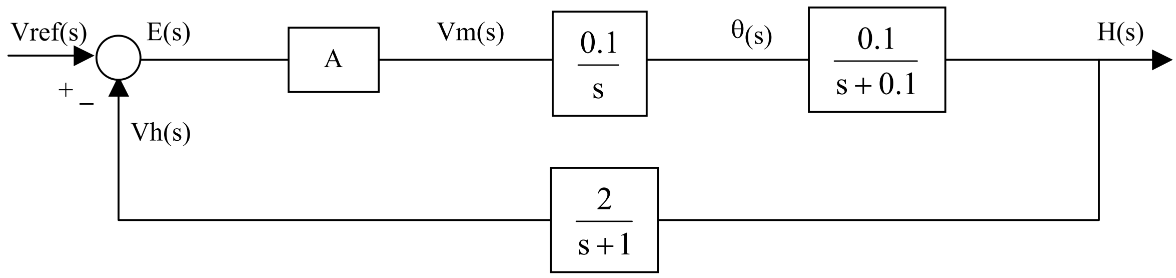
$$s = \pm j0.67$$

La figura muestra la representación del lugar de las raíces de sistema:



EJERCICIO 6.9.

Para el sistema del ejercicio 4.12., cuyo diagrama de bloques se indica en la figura, dibujar el lugar de las raíces e indicar los distintos modos de funcionamiento del sistema completo al variar la ganancia del amplificador A.



1) Ecuación característica:

$$1 + K \cdot \frac{0.1}{s} \cdot \frac{0.1}{s+0.1} \cdot \frac{2}{s+1} = 0$$

$$1 + K \cdot \frac{0.02}{s(s+0.1)(s+1)} = 0$$

2) Nº de ramas: 3

3) Puntos de inicio: 0, -0.1, -1
Puntos de finalización: ∞

4) Lugar en el eje real: (-∞,-1] y [-0.1, 0].

5) El lugar de las raíces es simétrico respecto del eje real.

6) Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{180^o(2q+1)}{p-z} = \frac{180^o(2q+1)}{3} = \begin{cases} 60^o \\ 180^o \\ 300^o \end{cases}$$

7) Centroide:

$$\sigma_a = \frac{\sum Polos - \sum Ceros}{p-z} = \frac{0-0.1-1-0}{3-0} = -0.367$$

8) Punto de dispersión:

$$K = \frac{-s(s+0.1)(s+1)}{0.02} = -\frac{s^3+1.1s^2+0.1s}{0.02}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{3s^2+2.2s+0.1}{0.02} = 0$$

$$3s^2+2.2s+0.1=0$$

$s_1 = -0.049$

$s_2 = -0.685$ No pertenece al lugar en el eje real.

Por tanto el punto de dispersión estará en –0.049

9) Intersección con el eje imaginario:

$$1+\frac{0.02K}{s(s+0.1)(s+1)} = 0$$

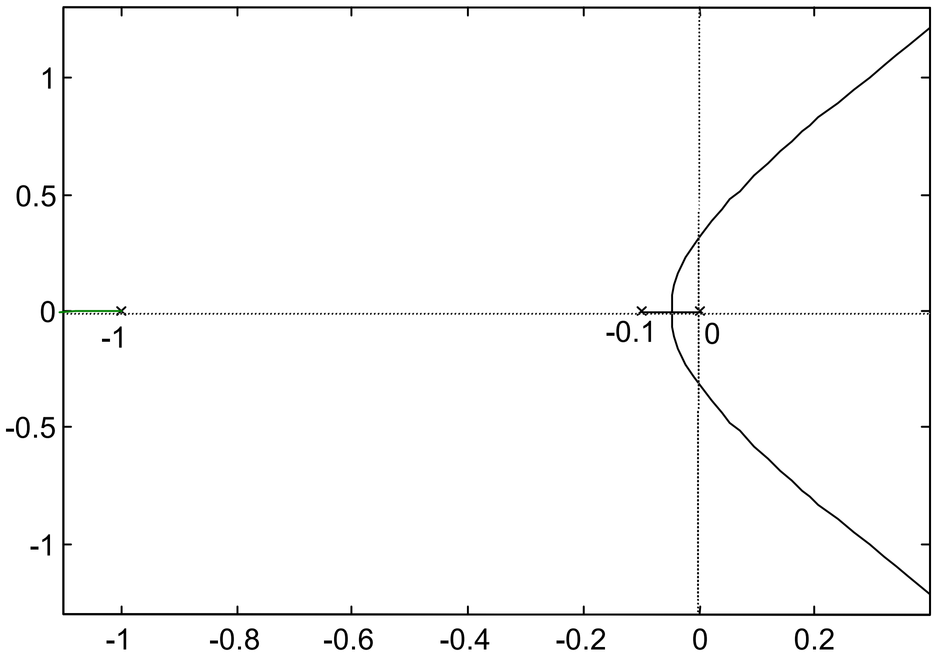
$$s^3+1.1s^2+0.1s+0.02K=0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 0.1 \\ s^2 & 1.1 & 0.02K \\ s^1 & \dfrac{0.11-0.02K}{1.1} & \\ s^0 & 0.02K & \end{array}$$

a) $0.11-0.02K=0$ $K=5.5$
La ecuación auxiliar será: $1.1s^2+0.11=0$ $s=\pm j0.316$

b) $0.02K=0$ $K=0$

La ecuación auxiliar será: $s=0$



<u>Modos de funcionamiento</u>:

El valor de la ganancia K para el punto de dispersión es:

$$K\big|_{s=-0.049} = -\frac{(-0.049)^3 + 1.1(-0.049)^2 + 0.1(-0.049)}{0.02} = 0.119$$

La posición del polo que parte de s=–1, según va aumentando el valor de K, se mueve por ele eje real alejándose cada vez más del origen. Por la distancia existente entre los polos dominantes y éste, se puede considerar despreciable su influencia.

$0 < K > 0.119$	Sobreamortiguado
$K = 0.119$	Críticamente amortiguado
$0.119 < K < 5.5$	Subamortiguado
$K = 5.5$	Oscilante
$K > 5.5$	Inestable

EJERCICIO 6.10.

Para el sistema cuya función de transferencia directa, con realimentación unitaria, es:

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s^2+s+1)^2}$$

Representar el lugar de las raíces. Calcular el controlador proporcional para que la respuesta del sistema equivalente reducido de segundo orden tenga un sobreimpulso del 25%. Comentar el éxito de las especificaciones.

1) Nº de ramas: 5

2) Puntos de inicio: s=0
s=-0.5+j0.86
s=-0.5+j0.86
s=-0.5-j0.86
s=-0.5-j0.86

Puntos de finalización: s=-2

3) Lugar en el eje real: [-2, 0]

4) Asíntotas:
$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = \begin{cases} 45^\circ \\ 135^\circ \\ 225^\circ \\ 315^\circ \end{cases}$$

5) Centroide:
$$\sigma_o = \frac{-0.5-0.5-05-0.5+2}{p-z} = 0$$

6) Ángulos de salida de polos complejos conjugados:

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

Ángulo de p_2:

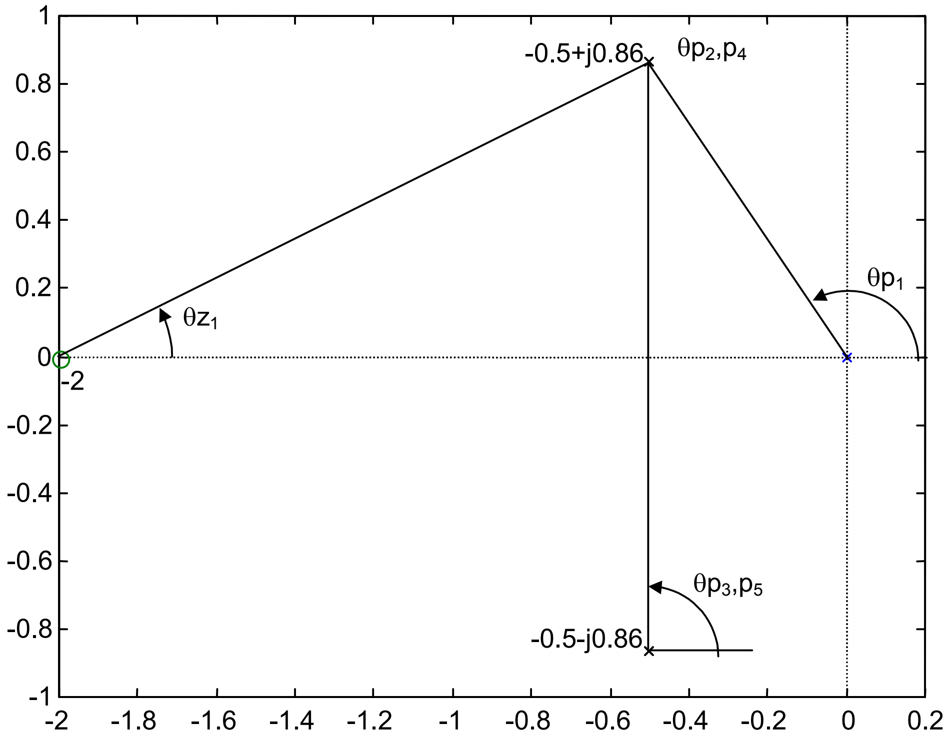
$$\operatorname{arctg}\left(\frac{0.866}{1.5}\right) - \left(180^\circ - \operatorname{arctg}\left(\frac{0.866}{0.5}\right)\right) - 2\cdot 90^\circ - 2\cdot \theta p_2 = 180^\circ$$

$$30^\circ - 120^\circ - 180^\circ - 2\cdot\theta p_2 = 180^\circ$$

$$\theta p_2 = -225^\circ$$

$$\theta p_4 = \theta p_2 + 180^\circ$$

$$\theta p_4 = -45^\circ$$



7) Intersección con el eje imaginario:

Ecuación característica:

$$1+\frac{k(s+2)}{s(s^2+s+1)^2}=0$$

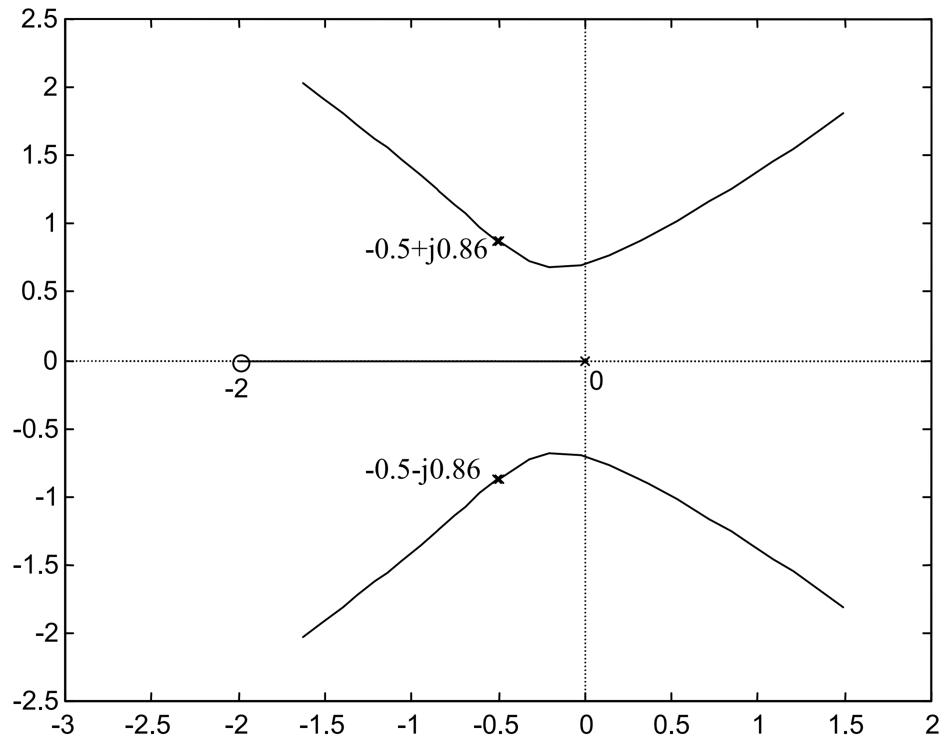
$$s^5+2s^4+3s^3+2s^2+(k+1)s+2k=0$$

s^5	1	3	k+1
s^4	2	2	2k
s^3	2	1	
s^2	1	2k	
s^2	1-4k		
s^0	2k		

2k=0 k=0 s=0

1-4k=0 k=0.25 $s^2+0.5=0$ s=±j0.707

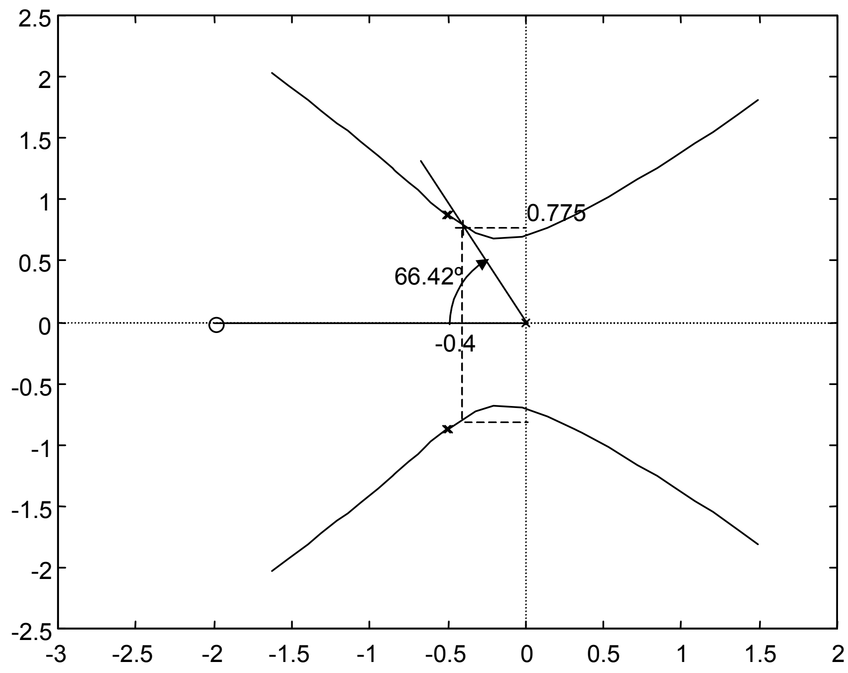
Representación del lugar de las raíces:



Para el regulador:

$$\mathrm{Mp} = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.25 \qquad \delta = 0.4$$

$$\sigma = \arccos 0.4 = 66.42^{\circ}$$



Trazando una recta con 66.42º el punto de corte con el lugar de las raíces corresponde con:

$$s = -0.4 + j0.775$$

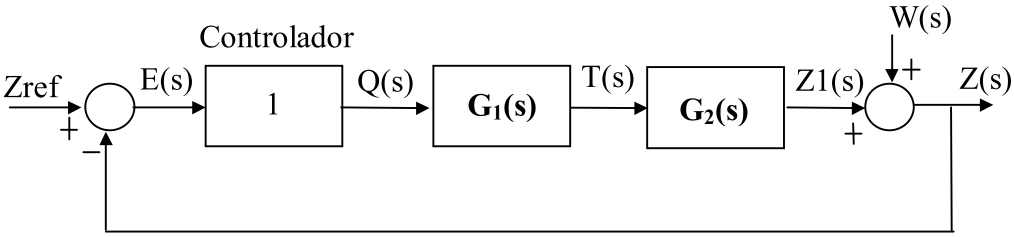
Se calcula ahora el valor de la ganancia que corresponde a ese punto:

$$k = \left|\frac{s(s^2+s+1)^2}{s+2}\right|_{s=-0.4+j0.775} = 0.024$$

Para este valor de k se tiene un polo real dominante que hace que el comportamiento no sea el requerido.

EJERCICIO 6.11.

Para el sistema del ejercicio 4.14. donde el diagrama de bloques del sistema es:



$$G_1(s) = \frac{T(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s+5} \qquad G_2(s) = \frac{Z_1(s)}{T(s)} = \frac{0.3}{s(s+50)}$$

Considerando nula la Perturbación:

- Dibujar el Lugar de las raíces del Sistema.
- Indicar, mediante la observación del lugar de las raíces, los diferentes modos de funcionamiento del sistema para diferentes valores del controlador proporcional así como el límite de estabilidad, si existe.
- ¿Cómo se puede conseguir que funcione, en lazo cerrado, como un sistema de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 30%? Calcularlo para que así sea y comprobarlo de algún modo.

Lugar de las Raíces:

$$G(s) = G_1(s)\cdot G_2(s) = \frac{0.3}{s(s+50)(s+5)}$$

1) Puntos de comienzo: 0, -5, -50.
   Puntos de finalización: tres en el infinito.

2) Lugar en eje real: desde 0 a -5 y desde -50 a -∞.

3) Asíntotas: $\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = \frac{180(2q+1)}{3} = 60^o$, 180º y 300º;

4) Centroide: $\sigma_a = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Ceros}}{p-z} = \frac{-0-5-50-0}{3-0} = -18.33$

5) Puntos de dispersión en eje real:

$$K = \left| -\frac{s(s+5)(s+50)}{0.3} \right|; \qquad \frac{dK}{ds} = -\frac{3s^2 + 110s + 250}{0.3}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \qquad -\frac{3s^2 + 110s + 250}{0.3} = 0;$$

Los puntos de dispersión: s_1=-2.43; s_2=-34.23

Se observa que el segundo no corresponde al lugar directo de las raíces, mientras que el primero sí.

Y el valor de K para este punto

$$K = \left| -\frac{s^3 + 55s^2 + 250s}{0.3} \right|_{s=-2.43} \qquad K = \frac{-2.43^3 + 55 \cdot 2.43^2 - 250 \cdot 2.43}{0.3} = 990.26$$

6) Puntos de corte con el eje imaginario:

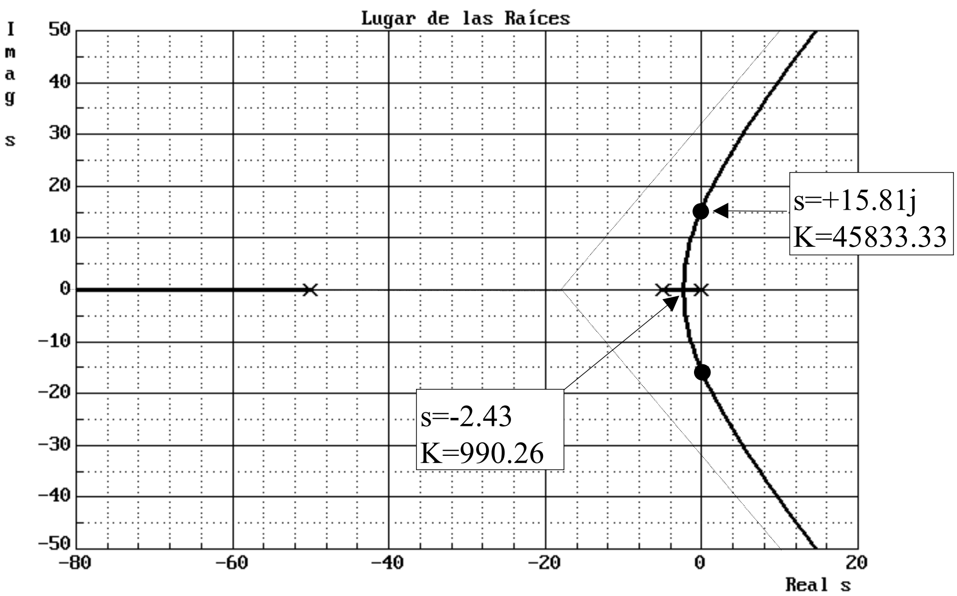
Ec. característica: $s^3 + 55s^2 + 250s + 0.3K = 0$

s^3	1	250
s^2	55	0.3K
s	250-0.3K/55	
s^0	0.3K	

En s^0, si K=0: (250-0.3K/55)s=0; luego s=0;

En s, K=(250*55/0.3)=45833.33: $55 \cdot s^2 + 0.3 \cdot 45833.33 = 0$; luego s=±15.81j

Con lo que el lugar queda:



Sólo son posibles los siguientes modos de funcionamiento con la utilización de un controlador proporcional:

- Sistema de 1er orden. Esto sólo va a ser posible para valores de ganancia pequeños. En el momento en que estos no lo sean tanto, cambiará al siguiente modo.

- Sistema de 2º orden sobreamortiguado. También para ganancias pequeñas, pero mayores que en el caso anterior. Estos dos casos se dan para valores de K entre 0 y 990.26.

- Sistema de 2º orden con amortiguamiento crítico. Para K=990.26.

- Sistema de 2º orden subamortiguado. Para valores de ganancia entre 990.26 y 45833.33.

- Sistema de 2º orden con amortiguamiento nulo. Para K=45833.3.

- Sistema inestable para valores de K mayores de 45833.33.

El límite de estabilidad se encuentra para la ganancia K=45833.33

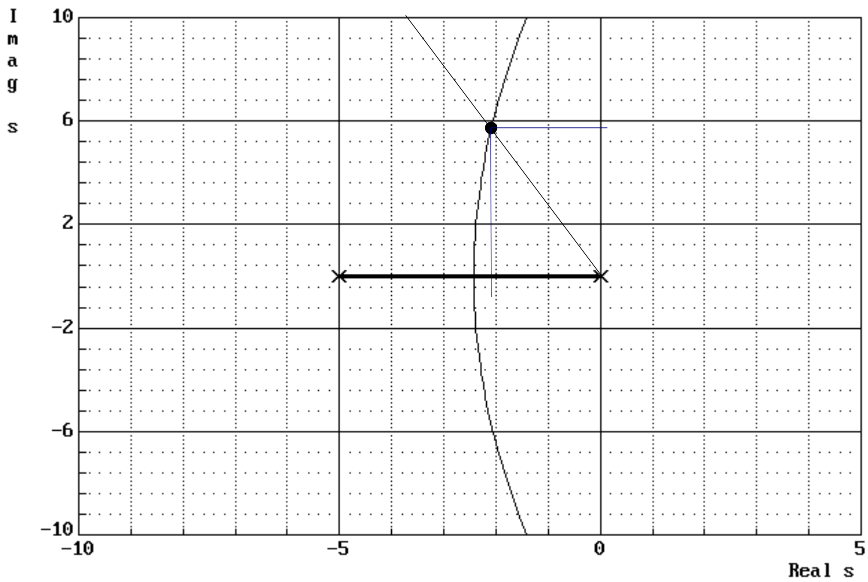
Como se acaba de ver, el sistema puede tomar todos los posibles modos de funcionamiento (todos los posibles valores de amortiguamiento) de un sistema subamortiguado, con sólo variar el controlador proporcional. Basta con seleccionar el valor de K adecuado.

Para la condición de máximo sobreimpulso:

$$Mp = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.3;\ \delta = 0.348$$

$$\theta = \arccos(0.348) = 69.64º$$

Haciendo una ampliación de la zona de interés del lugar de las raíces:



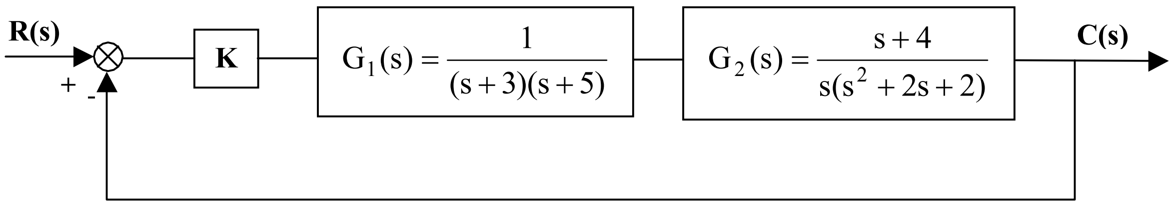
Trazando la recta a 69.64º se observa que el punto de corte esta en torno a P=-2.1+j5.75

Y el valor de la ganancia en ese punto:

$$K = \left| -\frac{s^3 + 55s^2 + 250s}{0.3} \right|_{s=-2.1+j5.75} \qquad K = 6339.53$$

EJERCICIO 6.12.

El diagrama de bloques de un sistema de control tiene la siguiente estructura:



Trazar el Lugar directo de las Raíces del sistema.

Indicar la región donde un par de polos complejos conjugados cumplirían las siguientes especificaciones:

Tiempo de asentamiento: 6,283 seg.
Máximo sobreimpulso: 16,303%.

Calcular, utilizando el diagrama del Lugar de las Raíces, el controlador proporcional que hace que el sistema se comporte, en lazo cerrado, como un sistema de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 30%.

Primeramente se obtendrá la ecuación característica del sistema:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 = 1 + KG_1(s)G_2(s) = 1 + K\frac{1}{(s+3)(s+5)}\frac{s+4}{s(s^2+2s+2)} = 0$$

$$1 + K\frac{s+4}{s(s+3)(s+5)(s+1-j)(s+1+j)} = 0$$

1. El número de ramas independientes del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en lazo abierto: $G(s)H(s) = G_1(s)G_2(s)$.

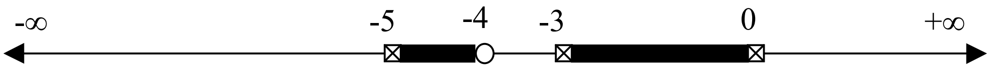
Número de polos de lazo abierto: 5, luego el L.R. tendrá 5 ramas.

2. Cada rama del L.R. comienza en un polo de la FTLA y termina en un cero de la misma:

Puntos de comienzo (K = 0): polos 0, -3, -5, -1+j, -1-j.

Puntos de término (K = ∞): ceros -4 y cuatro en el infinito.

3. Comportamiento en el eje real: un punto situado sobre el eje real pertenecerá al L.R. si el número de polos y ceros situados a su derecha es impar:



4. Simetría: el L.R. es simétrico respecto al eje real.

5. Asíntotas: su número viene dado por (n - m) y los ángulos que forman con el eje real vienen dados por:

$$\vartheta_a = \frac{\pi(2q+1)}{n-m} \qquad (q = 0,1,2,...)$$

En donde *n* = número de polos finitos de G(s)H(s)
m = número de ceros finitos de G(s)H(s)

sustituyendo valores:

$$\vartheta_a = \frac{180^\circ(2q+1)}{5-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{180(2\cdot 0+1)}{4} = 45^\circ \\ \vartheta_2 &= \frac{180(2\cdot 1+1)}{4} = 135^\circ \\ \vartheta_3 &= \frac{180(2\cdot 2+1)}{4} = 225^\circ \\ \vartheta_4 &= \frac{180(2\cdot 3+1)}{4} = 315^\circ \end{aligned}$$

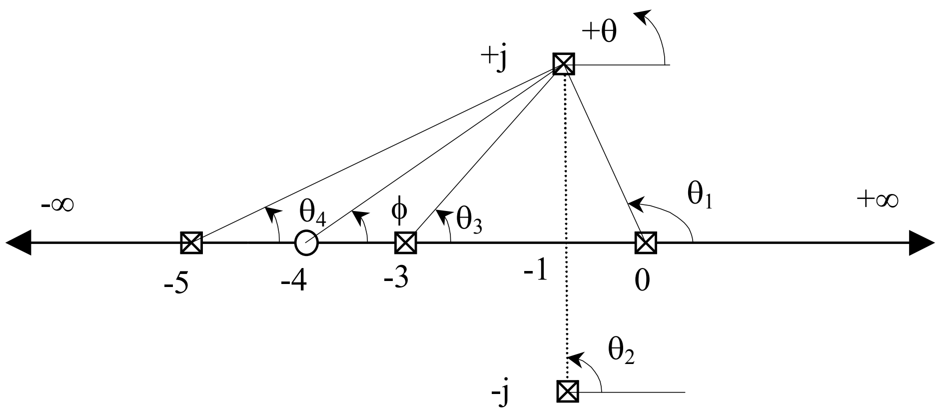
6. Centroide: las asíntotas cortan al eje real en un punto situado a una distancia del origen dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) \; - \; \sum \text{ceros de } G(s)H(s)}{n-m} = \frac{-3-5-1-1+4}{4} = -1.5$$

7. Ángulos de salida de los polos complejos: se hallan aplicando el criterio del argumento en un punto muy próximo a dichos polos complejos

$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = 180^\circ$$

$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = \phi - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta$$



$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = \text{arc tg}\frac{1}{3} - (180^\circ - \text{arc tg}1 + 90^\circ + \text{arc tg}\frac{1}{2} + \text{arc tg}\frac{1}{4} + \theta) = 180^\circ$$

$$18.43^\circ - (180^\circ - 45^\circ + 90^\circ + 26.57^\circ + 14.04^\circ + \theta) = 180^\circ$$

$$18.43 - 265.61 - \theta = 180^\circ$$

$$-247.18^\circ - \theta = 180^\circ$$

$$\theta = -67.18^\circ$$

8. Puntos de dispersión y de confluencia de ramas:

Despejando K en la ecuación característica de la forma: K = f (s), y derivando se calculan las raíces de la ecuación:

$$K = -\frac{s(s+3)(s+5)(s^2+2s+2)}{(s+4)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

$$\frac{(s+4)(-5s^4 - 40s^3 - 99s^2 - 92s - 30) + (s^5 + 10s^4 + 33s^3 + 46s^2 + 30s)}{(s+4)^2} = 0$$

$$4s^5 + 50s^4 + 226s^3 + 442s^2 + 368s + 120 = 0$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene una única solución real que es: s_1 = -2.3775. Para saber si este punto es de confluencia o de dispersión, se halla la segunda derivada y se sustituye *s* por s_1:

$$\left(\frac{d^2K}{ds^2}\right)_{s=s_1} = \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{-4s^5 - 50s^4 - 226s^3 - 442s^2 - 368s - 120}{(s+4)^2}\right)\right]_{s=-2.3775} \langle \quad 0$$

Luego s_1 = -2.3775 es un punto de dispersión de las ramas.

9. Intersección del Lugar con el eje imaginario:

Se obtienen dichos puntos aplicando Routh, ya que corresponden a los polos que hacen al sistema críticamente estable. La ecuación característica es:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \qquad 1 + KG_1(s)G_2(s) = 0$$

$$1 + K\frac{1}{(s+3)(s+5)}\frac{s+4}{s(s^2+2s+2)} = 0$$

$$s(s+3)(s+5)(s^2+2s+2) + K(s+4) = 0$$

$$s^5 + 10s^4 + 33s^3 + 46s^2 + (30 + K)s + 4K = 0$$

Su tabla de Routh, será:

s^5	1	33	30+K
s^4	10	46	4K
s^3	28.4	30+0.6K	0
s^2	35.43-0.21K	4K	0
s^1	$\dfrac{-0.12K^2 - 98.66K + 1063.11}{35.43 - 0.21K}$	0	0
s^0	4K	0	0

Obligando a que la fila de S^1 sea de ceros, se ha de cumplir que:

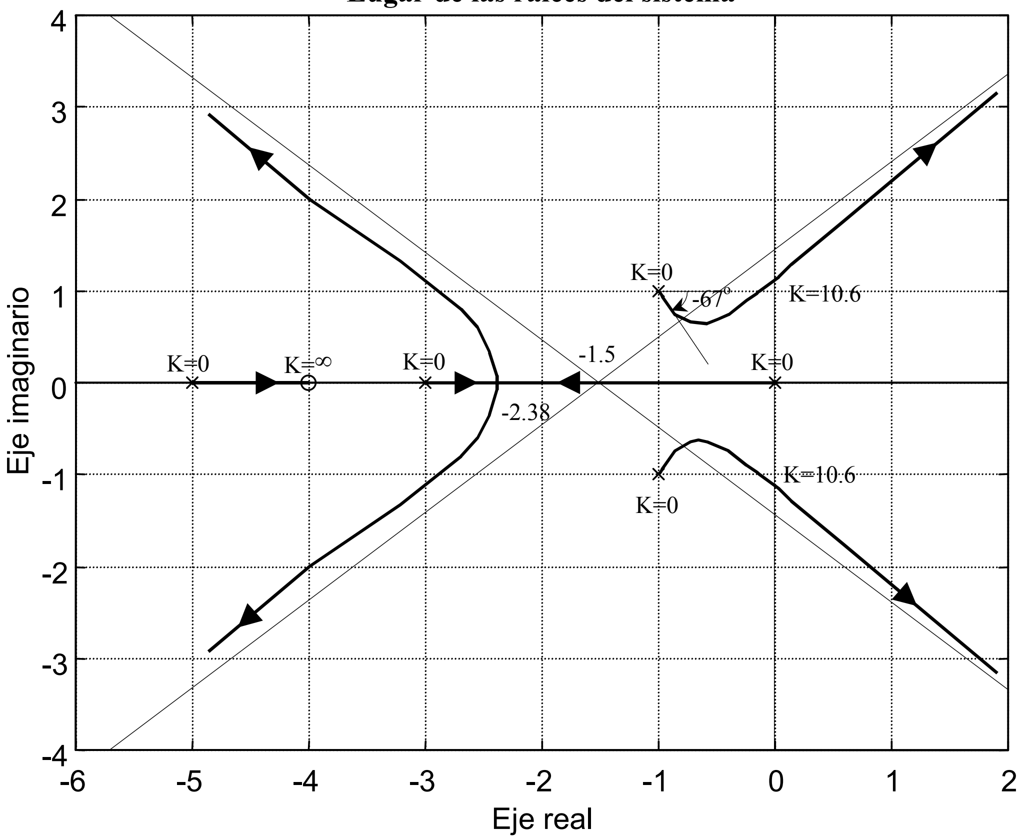
$$-0.12K^2 - 98.66K + 1063.11 = 0$$

Resolviendo: K = 10.63. El otro valor no sirve ya que $0 \leq K < \infty$. El valor de la ordenada en los puntos de corte con el eje imaginario se obtendrá sustituyendo este valor de K en la ecuación auxiliar:

$$(35.43 - 0.21K)s^2 + 4K = 0 \qquad s = \pm 1.13j$$

Con esto el lugar de las raíces del sistema queda:

Lugar de las raíces del sistema



Buscaremos la región del plano s donde un par de polos conjugados cumplan la especificación dada.

$$t_s = \frac{\pi}{\delta\omega_n} \quad \Rightarrow \quad \delta\omega_n = \frac{\pi}{6.283} \cong 0.5$$

$$M_p = e^{-\pi \cot g\, \theta} = 0.16303 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta = \cos\theta = \cos 60^\circ = 0.5$$

$$\text{y} \qquad \omega_n = 1.0\ {}^{rad}\!/_{seg}$$

Luego con estas especificaciones realmente se están definiendo únicamente dos puntos que vienen dados por:

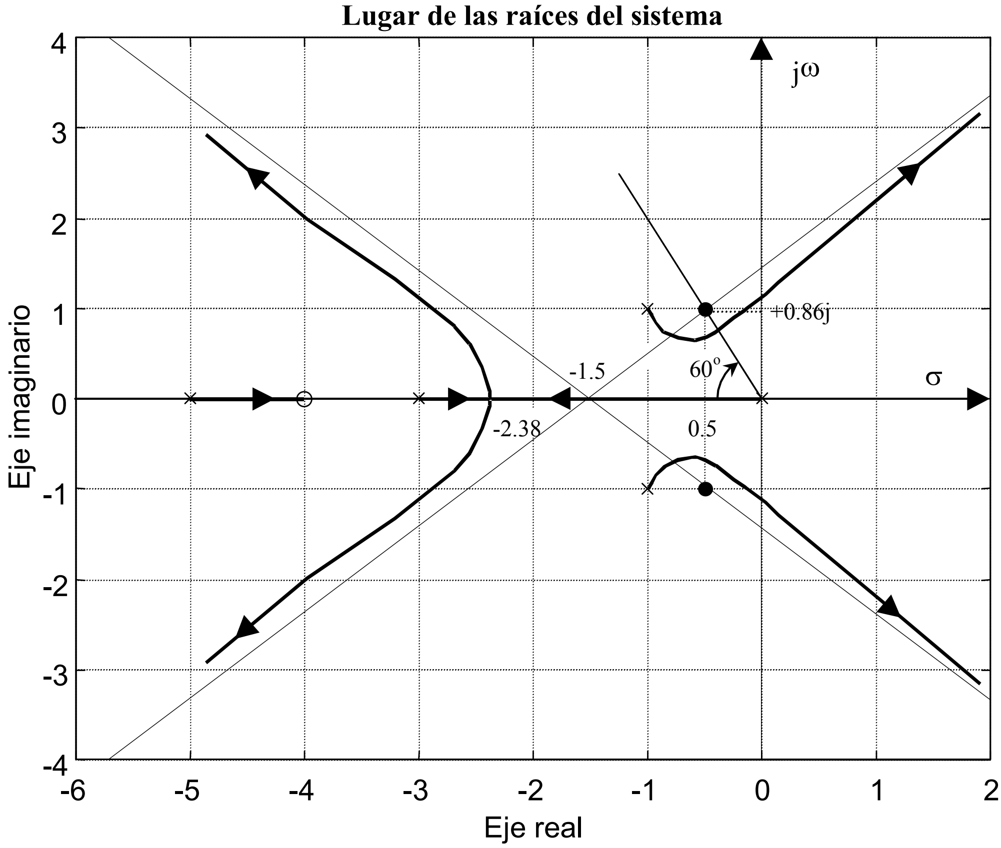
$$p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

Que sustituyendo por sus valores:

$$p_{1,2} = -0.5 \pm 0.866j$$

que quedan representados en la figura siguiente como P_1 y P_2:

Lugar de las raíces del sistema



Que como puede observarse no pertenecen al lugar de las raíces.

El sistema debe comportarse ahora en lazo cerrado como otro de 2º orden con un máximo sobreimpulso del 30%. Calcularemos los polos de dicho sistema.

$$M_p = e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 30\% = 0.30$$

$$\ln 0.30 = \frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \Rightarrow (\ln 0.30)^2 = \delta^2\left[\pi^2 + (\ln 0.30)^2\right]$$

$$\delta = \sqrt{\frac{(\ln 0.30)^2}{\pi^2 + (\ln 0.30)^2}} = 0.3579 \;\Rightarrow\; \theta = \text{arc}\cos\delta = 69.03^\circ$$

Para este ángulo θ, se encuentra un punto de intersección con el lugar geométrico de las raíces que es aproximadamente:

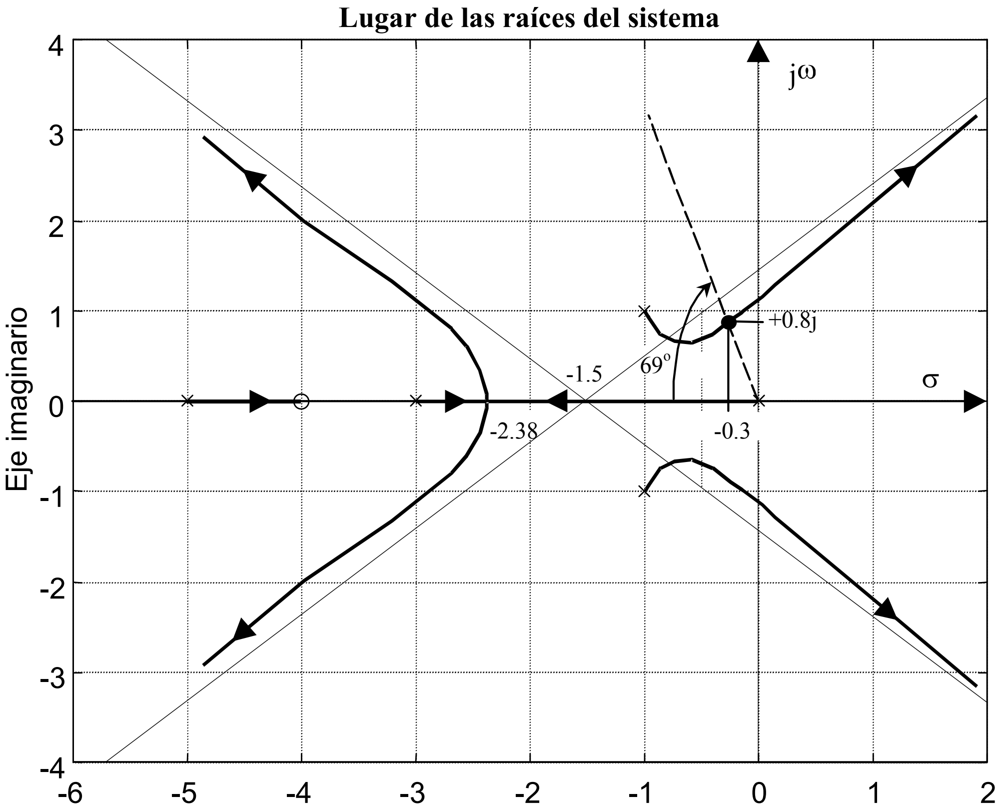
s_i = -0.3+0.8j.

Luego aplicando el criterio del argumento en este punto, obtenemos el valor de la ganancia K del controlador proporcional:

$$K = \left|\frac{1}{G(s)\cdot H(s)}\right|_{s=s_i=-0.3+0.8j} = \frac{|s_i|\cdot|s_i+3|\cdot|s_i+5|\cdot\left|s_i^2+2s_i+2\right|}{|s_i+4|} = \frac{0.8544\cdot 2.8160\cdot 4.7676\cdot 1.4060}{3.7855}$$

$$K = 4.26$$

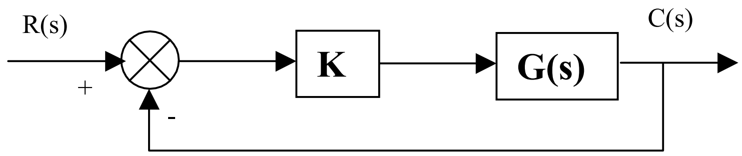
En la figura puede verse el punto que cumple las especificaciones:



EJERCICIO 6.13.

Un sistema de regulación está formado por un proceso cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{20}{s(s^2 + 6s + 10)}$$



y por un regulador de tipo proporcional K, cerrándose el bucle con una realimentación negativa.

a) Trazar el Lugar de las raíces para $K \geq 0$.
b) Rango de los valores de K para los que el sistema no presenta sobreoscilación, así como los valores de K para los que el sistema presenta sobreoscilación, manteniéndose el sistema estable.
c) Se desea ahora que el tiempo de establecimiento tenga un valor entre 4 y 6 segundos cuando al sistema se le somete a una entrada rampa unitaria. En estas condiciones analizar el error en régimen permanente que presentaría el sistema, comparar los resultados obtenidos y establecer conclusiones. Utilícese el criterio del 5% para t_s.

---

a) Ecuación característica del sistema: $1 + KG(s) = 0$

$$1 + K\frac{20}{s(s^2 + 6s + 10)} = 0$$

1. El número de ramas independientes del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en lazo abierto: G(s)H(s) = G(s).

   Número de polos de lazo abierto: 3, luego el L.R. tendrá 3 ramas.

2. Cada rama del L.R. comienza en un polo de la FTLA y termina en un cero de la misma:

   Puntos de comienzo (K = 0): polos 0, -3+j, -3-j.

   Puntos de término ($K = \infty$): ceros tres en el infinito.

3. Comportamiento en el eje real: un punto situado sobre el eje real pertenecerá al L.R. si el número de polos y ceros situados a su derecha es impar:

4. Simetría: el L.R. es simétrico respecto al eje real.

5. Asíntotas: su número viene dado por *(n - m)* y los ángulos que forman con el eje real vienen dados por:

$$\vartheta_a = \frac{\pi(2q+1)}{n-m} \qquad (q = 0,1,2,...)$$

En donde *n* = número de polos finitos de G(s)H(s)
m = número de ceros finitos de G(s)H(s)

sustituyendo valores:

$$\vartheta_a = \frac{180^\circ(2q+1)}{3-0} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \vartheta_1 = \dfrac{180(2\cdot 0+1)}{3} = 60^\circ \\ \vartheta_2 = \dfrac{180(2\cdot 1+1)}{3} = 180º \\ \vartheta_3 = \dfrac{180(2\cdot 2+1)}{3} = 300^\circ \end{cases}$$

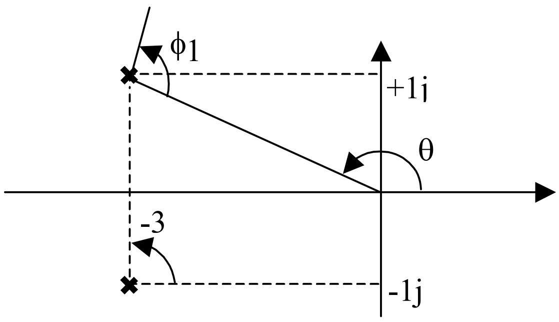
6. Centroide: las asíntotas cortan al eje real en un punto situado a una distancia del origen dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) \; - \; \sum \text{ceros de } G(s)H(s)}{n-m} = \frac{-3-3-0}{3} = -2$$

7. Ángulos de salida de los polos complejos: se hallan aplicando el criterio del argumento en un punto muy próximo a dichos polos complejos:

$$0^\circ - (\phi_1 + 90^\circ + \theta) = 180^\circ$$

$$\phi_1 = -90^\circ + \text{arc tg}\frac{1}{3} = -90^\circ + 18.4349^\circ = -71.565^\circ$$



8. Puntos de dispersión y de confluencia de ramas:

Despejando K en la ecuación característica: K = f (s) y hallando las soluciones de la derivada:

$$K = \frac{-s(s^2+6s+10)}{20}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 = -\frac{3s^2+12s+10}{20}$$

Resolviendo la ecuación, se obtienen como soluciones:

$s_1 = -1.1835$ y $s_2 = -2.8165$.

Para saber si estos puntos son de confluencia o de dispersión, se halla la segunda derivada y se sustituye *s* por $s_{1,2}$:

$$\left.\frac{d^2K}{ds^2}\right|_{s=s_1=-1.1835} = -0.245 \langle 0$$

luego s_1=-1.1835 es un punto de dispersión.

$$\left.\frac{d^2K}{ds^2}\right|_{s=s_2=-2.8165} = +0.245 \rangle 0$$

luego s_2=-2.8165 es un punto de confluencia.

9. Intersección del Lugar con el eje imaginario:

Aplicando la regla de Routh, serán los puntos que corresponden a los polos que hacen al sistema críticamente estable. La ecuación característica es:

$$s^3 + 6s^2 + 10s + K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 6 & 20K \\ s^1 & \dfrac{60-20K}{6} & 0 \\ s^0 & 20K & 0 \end{array}$$

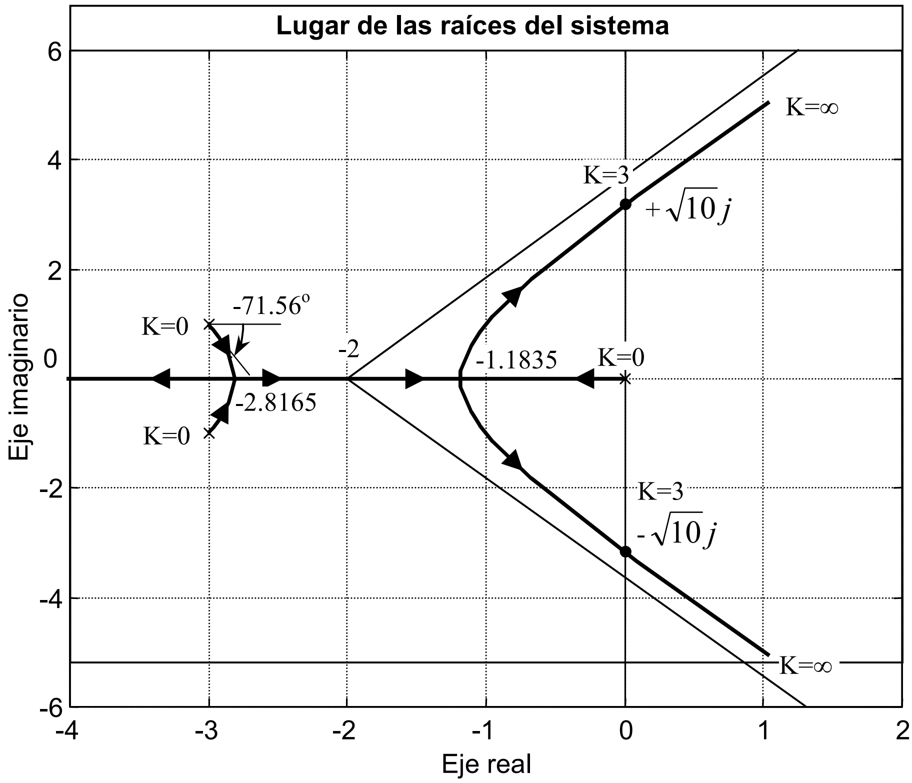
Obligando a que la fila de s^1 sea de ceros, se ha de cumplir que: $60 - 20K = 0$

Resolviendo: $K = 3$.

El valor de la ordenada en los puntos de corte con el eje imaginario se obtendrá sustituyendo este valor de K en la ecuación auxiliar:

$$6s^2 + 20K = 6s^2 + 60 = 0 \qquad s = \pm\sqrt{10}\, j$$

Por tanto, el lugar de las raíces queda según se muestra en la siguiente figura.



b) El sistema es estable para 0<K<3.

El sistema no presentará sobreoscilación entre los dos puntos de bifurcación.

De la ecuación característica: $\dfrac{20K}{s(s^2+6s+10)} = -1$

Obtenemos para $s = -1.1835 \;\Rightarrow\; K = 0.254$

y para $s = -2.8165 \;\Rightarrow\; K = 0.145$

luego para 0.145<K<0.254, no tendremos sobreoscilación.

Y para 0.254<K<3, tendremos sobreoscilación.

c) Se desea para el primer caso que $t_s = 4$ seg.:

$$\frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{\sigma} = t_s = 4 \text{ seg (criterio del 5\%), luego: } \delta\omega_n = 0.75$$

Con este valor en el lugar de las raíces, se obtiene:

$$s_{1,2} = -0.75 \pm 1.7j \text{ luego } K = 0.55$$

Y en el segundo caso: $t_s = 6$ seg.:

$$\frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{\sigma} = t_s = 6 \text{ seg}; \text{ luego } \delta\omega_n = 0.5 .$$

Con este valor en el lugar de las raíces se obtiene:

$$s_{1,2} = -0.5 \pm 2.2j \text{ luego } K = 1.26$$

El error en régimen permanente ante una entrada rampa unitaria viene dada por:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot H(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{20K}{s(s^2+6s+10)} = \frac{20K}{10} = 2K$$

$$e_{rp} = \frac{R}{K_v} = \frac{1}{K_v}; \qquad e_{rp} = \frac{1}{2K}; \qquad M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

para el primer caso:

$$e_{rp} = \frac{1}{2 \cdot 0.55} = 0.9091$$

$$\theta = \text{arc tg}\frac{1.7}{0.75} = 66.1941^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta = \cos\theta = 0.4036$$

$$M_p = e^{-\frac{0.4036\pi}{\sqrt{1-0.4036^2}}} = e^{-1.3858} = 0.2501 = 25.01\%$$

para el segundo caso:

$$e_{rp} = \frac{1}{2 \cdot 1.26} = 0.3968;$$

$$\theta = \text{arc tg}\frac{2.2}{0.5} = 77.1957^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta = \cos\theta = 0.2216$$

$$M_p = e^{-\frac{0.2216\pi}{\sqrt{1-0.2216^2}}} = e^{-0.7139} = 0.4897 = 48.97\%$$

En el primer caso, el error en régimen permanente es mayor a cambio de un menor sobreimpulso en la respuesta transitoria, al contrario que en el segundo caso. Para conciliar el régimen permanente y el régimen transitorio, habría que incluir un control derivativo que mejorase el régimen transitorio para un régimen permanente dado.

EJERCICIO 6.14.

Un sencillo sistema de control está formado por un sensor de función de transferencia unidad, un controlador proporcional de ganancia ajustable K y una planta cuya función de transferencia es la siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{s(1+0.02s)(1+0.01s)}$$

- Trazar el Lugar directo de las raíces del sistema.
- Indicar todos los posibles modos de funcionamiento que se pueden obtener mediante una mera variación de la ganancia K del controlador.
- Indicar los valores positivos de K que son límites para la estabilidad del sistema

Ecuación característica del sistema:

$$1 + K \cdot G(s) \cdot H(s) = 1 + \frac{K}{s(1+0.02s)(1+0.01s)} = 1 + \frac{5000K}{s(s+50)(s+100)}$$

1. El número de ramas independientes del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en lazo abierto: G(s)H(s):

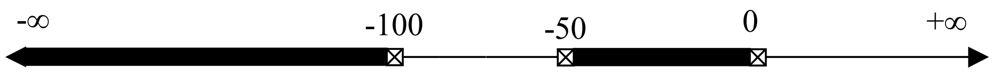
Número de polos de lazo abierto: 3, luego el L.R. tendrá 3 ramas.

2. Cada rama del L.R. comienza en un polo de la FTLA y termina en un cero de la misma:

Puntos de comienzo (K = 0): polos 0, -50, -100.

Puntos de término (K = ∞): ceros tres en el infinito.

3. Comportamiento en el eje real: un punto situado sobre el eje real pertenecerá al L.R. si el número de polos y ceros situados a su derecha es impar:



4. Simetría: el L.R. es simétrico respecto al eje real.

5. Asíntotas: su número viene dado por *(n - m)* y los ángulos que forman con el eje real vienen dados por:

$$\vartheta_a = \frac{180^\circ(2q+1)}{n-m} \qquad (q = 0, 1, 2, ...)$$

En donde n = número de polos finitos de G(s)H(s)
m = número de ceros finitos de G(s)H(s)

sustituyendo valores:

$$\vartheta_a = \frac{180^\circ(2q+1)}{3-0} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{180^\circ(1)}{3} = 60^\circ \\ \vartheta_2 &= \frac{180^\circ(3)}{3} = 180^\circ \\ \vartheta_3 &= \frac{180^\circ(5)}{3} = 300^\circ \end{aligned}$$

6. Centroide: las asíntotas cortan al eje real en un punto situado a una distancia del origen dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) \; - \; \sum \text{ceros de } G(s)H(s)}{n-m} = \frac{-100-50}{3} = -50$$

7. Ángulos de salida de los polos complejos: no hay polos complejos conjugados.

8. Puntos de dispersión y de confluencia de ramas:

   Despejando K de la ecuación característica de la forma: K = f (s), si en la ecuación característica se hace: $5000K = K'$, se tiene:

$$1 + K'\frac{1}{s(s+50)(s+100)} = 0 \quad \Rightarrow \quad K' = -s(s+50)(s+100)$$

y hallamos las raíces de la ecuación: $\dfrac{dK'}{ds} = 0$

luego:

$$3s^2 + 300s + 5000 = 0$$

Resolviendo la ecuación, se obtienen dos soluciones reales:

s_1 = -78.86, que no pertenece al Lugar de las raíces, luego no puede ser punto de dispersión o confluencia

s_2 = -21.13 que sí pertenece al Lugar de las raíces.

Para saber si este punto es de confluencia o de dispersión, se halla la segunda derivada y se sustituye s por s_2:

$$\left(\frac{d^2K'}{ds^2}\right)_{s=s_2} = 6s + 300\Big|_{s=s_2} = 6(-21.13) + 300 = -26.78 \; > 0$$

Luego s_2= -21.13 es un punto de dispersión de las ramas del Lugar.
Para hallar el valor de K' en este punto de dispersión, se aplica el criterio del módulo:

$$K'\frac{1}{|s_2||s_2+50||s_2+100|} = 1 = K'\frac{1}{21.13 \cdot 28.87 \cdot 78.87} = \frac{K'}{48112.52}$$

luego: $$K' = 48112.52 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{48112.52}{5000} = 9.62$$

9. Intersección del Lugar con el eje imaginario:

Se determina aplicando la regla de Routh, ya que dichos puntos corresponden a los polos que hacen al sistema críticamente estable.

La ecuación característica es:

$$s^3 + 150s^2 + 5000s + K' = 0$$

Su tabla de Routh, será:

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 5000 \\
s^2 & 150 & K' \\
s^1 & \dfrac{5000 \cdot 150 - 150 \cdot K'}{150} & 0 \\
s^0 & K' & 0
\end{array}$$

Obligando a que la fila de S^0 sea de ceros, se ha de cumplir que:

$$K' = 0$$

$$s=0$$

Obligando a que la fila de S^1 sea de ceros, se ha de cumplir que:

$$5000 - \frac{K'}{150} = 0$$

$$K' = 750000$$

luego

$$K = 150.$$

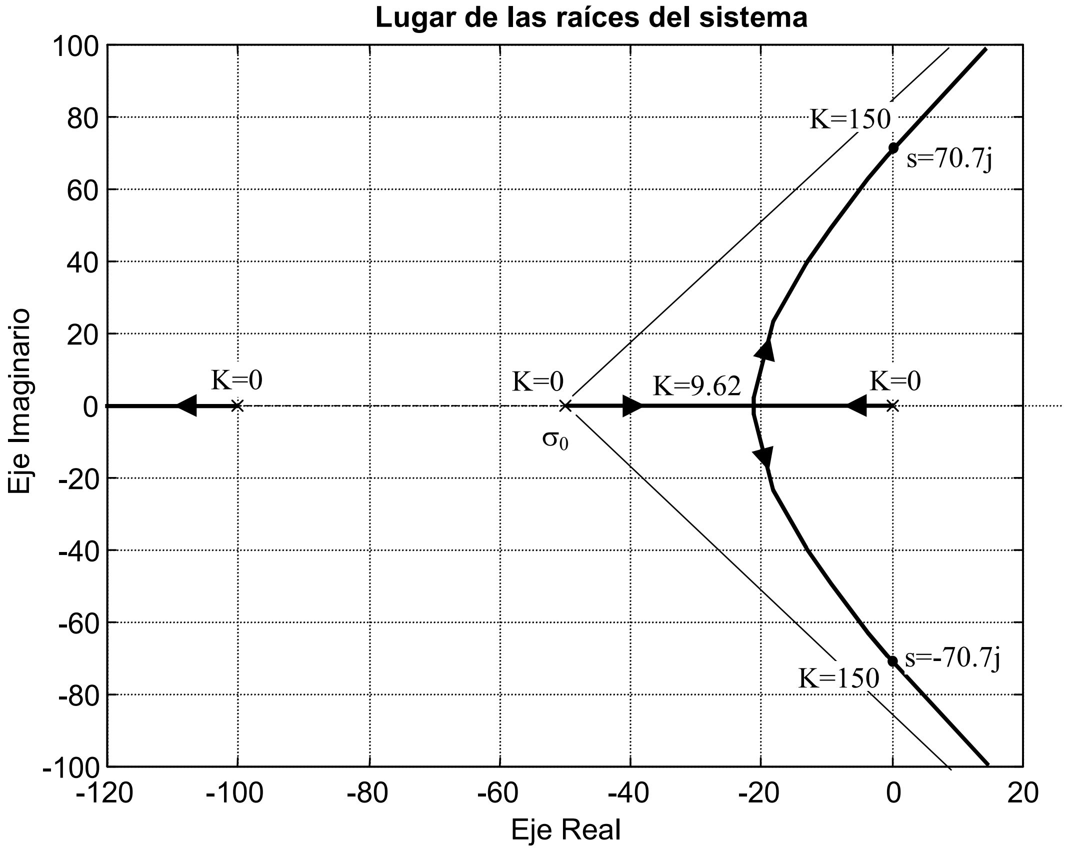
El valor de la ordenada en los puntos de corte con el eje imaginario se obtendrá sustituyendo este valor de K en la ecuación auxiliar:

$$150s^2 + K' = 0$$

$$150s^2 + 750000 = 0$$

$$s = \pm 70.71j$$

Luego el lugar de las raíces queda según se muestra en la siguiente figura.



Modos de funcionamiento:

Existe un polo en lazo abierto (s = -100) que, en lazo cerrado, no va a afectar casi nada el funcionamiento del sistema.

Para valores de K comprendidos entre 0 y 9.62 el sistema va a ir pasando por:

- Integrador puro
- Primer orden
- Segundo orden sobreamortiguado
- Segundo orden con amortiguamiento = 1

Para valores: $9.62 < K < 150$: Sistema de segundo orden subamortiguado.

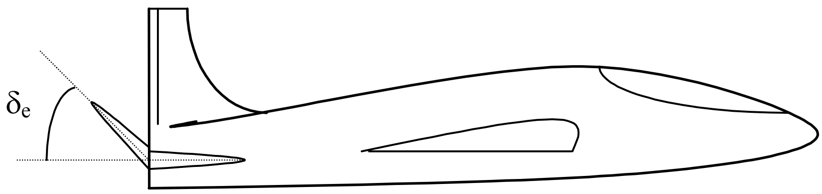
Para $K = 150$: Sistema oscilante.

Para $K > 150$: Sistema inestable.

El sistema es estable para: $0 < K < 150$.

EJERCICIO 6.15.

La función de transferencia que liga la posición del alerón trasero del aeroplano de la figura con el ángulo de inclinación (pitch) del aparato es la que se muestra a continuación:

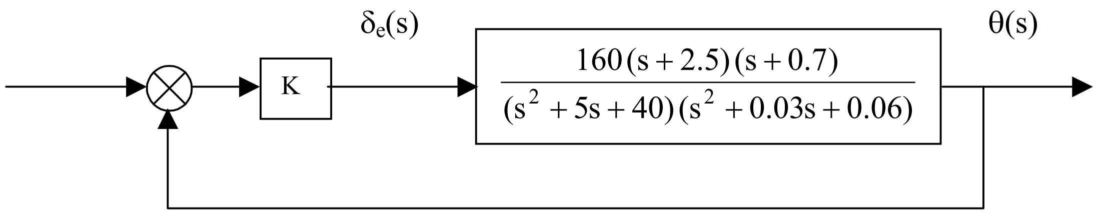


$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{160(s+2.5)(s+0.7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)}$$

Se desea realizar un piloto automático para controlar la inclinación del avión θ(s). Para ello se decide utilizar un sistema de control de lazo cerrado, usando como medida de la inclinación del aparato la señal aportada por un giróscopo que actuará como un sensor de función de transferencia unidad, y un controlador de configuración serie.

- Dibujar el Lugar de las raíces del sistema para variaciones del control proporcional entre cero e infinito.
- Indicar todos los posibles modos distintos de funcionamiento que puede tener el sistema, mediante la variación del controlador proporcional, así como el valor de este controlador en los puntos límite entre los diferentes modos de funcionamiento.

El lazo de control del sistema puede representarse mediante la siguiente figura:



Trazado del Lugar de las raíces:

Obtención de la ecuación característica del sistema:

$$1 + K \cdot G(s) \cdot H(s) = 0$$

$$1 + \frac{K \cdot 160(s+2.5)(s+0.7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)} = 0$$

1. El número de ramas independientes del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en lazo abierto: G(s)H(s):

Número de polos de lazo abierto: 4, luego el L.R. tendrá 4 ramas.

2. Cada rama del L.R. comienza en un polo de la FTLA y termina en un cero de la misma:

   Puntos de comienzo (K = 0): polos:

$$\frac{-5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{15}\,j,\frac{-5}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{15}\,j,-0.015+\frac{\sqrt{0.2391}}{2}\,j,-0.015-\frac{\sqrt{0.2391}}{2}\,j.$$

   Puntos de término (K = ∞): ceros:

   -2.5, -0.7 y dos en el infinito.

3. Comportamiento en el eje real: un punto situado sobre el eje real pertenecerá al L.R. si el número de polos y ceros situados a su derecha es impar:

4. Simetría: el L.R. es simétrico respecto al eje real.

5. Asíntotas: su número viene dado por *(n - m)* y los ángulos que forman con el eje real vienen dados por: $\vartheta_a = \dfrac{180^\circ(2q+1)}{n-m}$ (q = 0, 1, 2, ...)

   En donde *n* = número de polos finitos de G(s)H(s)
   m = número de ceros finitos de G(s)H(s)

   sustituyendo valores:

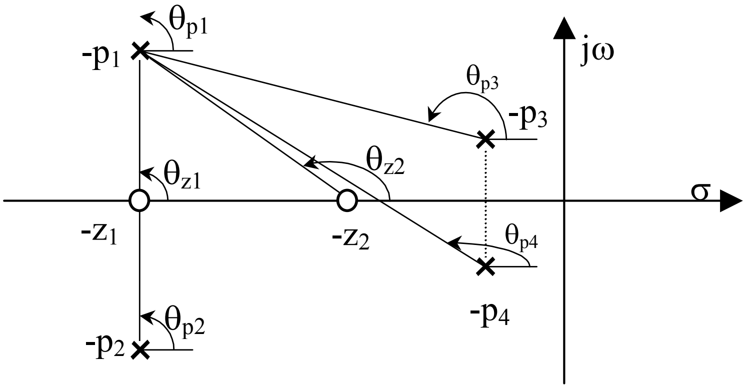
$$\vartheta_a = \frac{180^\circ(2q+1)}{4-2} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta_1 = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ \\ \vartheta_2 = \dfrac{180^\circ \cdot 3}{2} = 270^\circ \end{cases}$$

6. Centroide: las asíntotas cortan al eje real en un punto situado a una distancia del origen dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) \;-\; \sum \text{ceros de } G(s)H(s)}{n-m} =$$

$$= \frac{-2.5-2.5-0.015-0.015-(-2.5-0.7)}{2} = \frac{-5.03+3.2}{2} = \frac{-1.83}{2} = -0.915$$

7. Ángulos de salida de los polos complejos: hay dos pares de polos complejos conjugados. Se aplica el criterio del argumento en un punto muy próximo a cada par de polos conjugados. Se comenzará hallando el ángulo de salida de los polos complejos de parte real -2.5:



$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

$$\theta_{z2} = 180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{15}}{2.5-0.7} = 107.215^\circ$$

$$\theta_{p3} = 180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{15}-\frac{1}{2}\sqrt{0.2391}}{2.5-0.015} = 114^\circ$$

$$\theta_{p4} = 180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{15}+\frac{1}{2}\sqrt{0.2391}}{2.5-0.015} = 112.3^\circ$$

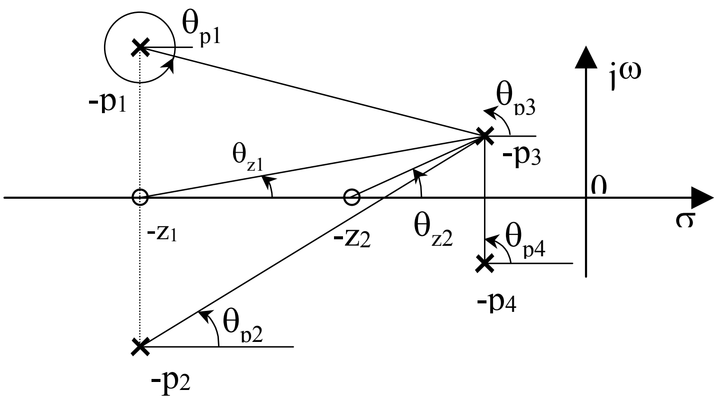
$$\theta_{z1} = \theta_{p2} = 90^\circ$$

$$\theta_{z1} + \theta_{z2} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} - \theta_{p4} = 180^\circ$$

$$90 + 107.215 - \theta_{p1} - 90 - 114 - 112.3 = 180$$

$$\theta_{p1} = -299.085 = 60.915^\circ$$

Ahora el ángulo de salida de los polos complejos de parte real -0.015:



$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

$$\theta_{p1} = 360^\circ - \text{arctg}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{15} - \frac{1}{2}\sqrt{0.2391}}{2.5 - 0.015} = 294^\circ$$

$$\theta_{p2} = \text{arctg}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{15} + \frac{1}{2}\sqrt{0.2391}}{2.5 - 0.015} = 67.683^\circ$$

$$\theta_{z1} = \text{arctg}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{0.2391}}{2.5 - 0.015} = 5.619^\circ$$

$$\theta_{z2} = \text{arctg}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{0.2391}}{0.7 - 0.015} = 19.624^\circ$$

$$\theta_{p4} = 90^\circ$$

$$\theta_{z1} + \theta_{z2} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} - \theta_{p4} = 180^\circ$$

$$5.619 + 19.624 - 294 - 67.683 - \theta_{p3} - 90 = 180$$

$$\theta_{p3} = -606.44 = -246.44 = 113.56^\circ$$

8. Puntos de dispersión y de confluencia de ramas:

   Despejando la ecuación característica de la forma: K = f (s), si en la ecuación característica hacemos: $160 \cdot K = K'$, tenemos.

$$1 + K'\frac{(s + 2.5)(s + 0.7)}{(s^2 + 5s + 40)(s^2 + 0.03s + 0.06)} = 0$$

y hallando las raíces de la ecuación:

$$\frac{dK'}{ds} = 0$$

Dado que el grado del polinomio en "s", es superior a tres, la solución de la ecuación se realiza por métodos gráficos o de aproximaciones sucesivas que resuelven satisfactoriamente el problema. Llamando "a" al posible punto de dispersión o confluencia, y aplicando:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a + p_i} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a + z_i}$$

Como en este caso se tienen parejas de polos complejos conjugados de la forma:

$$-p_1 = -\alpha + \beta j \quad y \quad -p_2 = -\alpha - \beta j$$

se pueden simplificar los términos de la siguiente forma:

$$\frac{1}{a+p_1}+\frac{1}{a+p_2}=\frac{2a+p_1+p_2}{(a+p_1)(a+p_2)}=\frac{2(a+\alpha)}{(a+\alpha)^2+\beta^2}$$

Aplicándolo a este caso, se tiene:

$$\frac{2(a+2.5)}{(a+2.5)^2+(\frac{3}{2}\sqrt{15})^2}+\frac{2(a+0.015)}{(a+0.015)^2+(\frac{1}{2}\sqrt{0.2391})^2}=\frac{1}{a+2.5}+\frac{1}{a+0.7}$$

Tomando como primer valor de "a" la media entre los dos ceros:

$$a=\frac{-2.5-0.7}{2}=-1.6$$

Como la resolución es por iteración, se sustituye este valor de "a" en los sumandos que no tengan nada en común con el intervalo tomado: -2.5 y -0.7, resultando:

$$\frac{2(-1.6+2.5)}{(-1.6+2.5)^2+\dfrac{9\cdot 15}{4}}+\frac{2(-1.6+0.015)}{(-1.6+0.015)^2+\dfrac{0.2391}{4}}=\frac{1}{a+2.5}+\frac{1}{a+0.7}$$

$$-1.1804=\frac{2a+3.2}{a^2+3.2a+1.75}$$

Resolviendo la ecuación, se obtienen dos soluciones reales:

a = -3.6832, que no pertenece al intervalo considerado

a = -1.2111 que sí pertenece al intervalo.

Ahora partiendo de este valor hallado de a = -1.2111 se repite el proceso de cálculo, quedando:

$$\frac{2(-1.2111+2.5)}{(-1.2111+2.5)^2+\dfrac{9\cdot 15}{4}}+\frac{2(-1.2111+0.015)}{(-1.2111+0.015)^2+\dfrac{0.2391}{4}}=\frac{1}{a+2.5}+\frac{1}{a+0.7}$$

$$-1.5322=\frac{2a+3.2}{a^2+3.2a+1.75}$$

Resolviendo la ecuación, se obtienen dos soluciones reales:

a = -3.3643, que no pertenece al intervalo que hemos considerado

a = -1.1409 que sí pertenece al intervalo.

Se volvería a introducir este valor de "a" en la ecuación y se obtendría más fidelidad en el resultado. Se tomará este valor de -1.14 como punto de confluencia.

Para hallar el valor de K' en este punto de confluencia, se aplica el criterio del módulo:

$$K'\left|\frac{(s+2.5)(s+0.7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)}\right|_{s=a=-1.14}=1$$

luego:

$$K'=78.8498 \quad \Rightarrow \quad K=\frac{78.8498}{160}=0.4928$$

9. Intersección del Lugar con el eje imaginario:

Los determinaremos aplicando la regla de Routh, ya que dichos puntos corresponden a los polos que hacen al sistema críticamente estable.

La ecuación característica es:

$$1+K'\frac{(s+2.5)(s+0.7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)}=0$$

$$s^4+5.03s^3+(40.21+K')s^2+(1.5+3.2K')s+(2.4+1.75K')=0$$

Su tabla de Routh, será:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 40.21+K' & 2.4+1.75K' \\
s^3 & 5.03 & 1.5+3.2K' & \\
s^2 & \dfrac{5.03(40.21+K')-1.5-3.2K'}{5.03} & 2.4+1.75K' & \\
s^1 & \dfrac{1.1642(K')^2+119.4607K'+47.7957}{39.9118+0.3638K'} & & \\
s^0 & 2.4+1.75K' & &
\end{array}$$

Obligando a que la fila de S^0 sea de ceros, se ha de cumplir que:

$K' = -1.3714$ que corresponde al lugar inverso de las raíces.

Obligando a que la fila de S^1 sea de ceros, se ha de cumplir que:

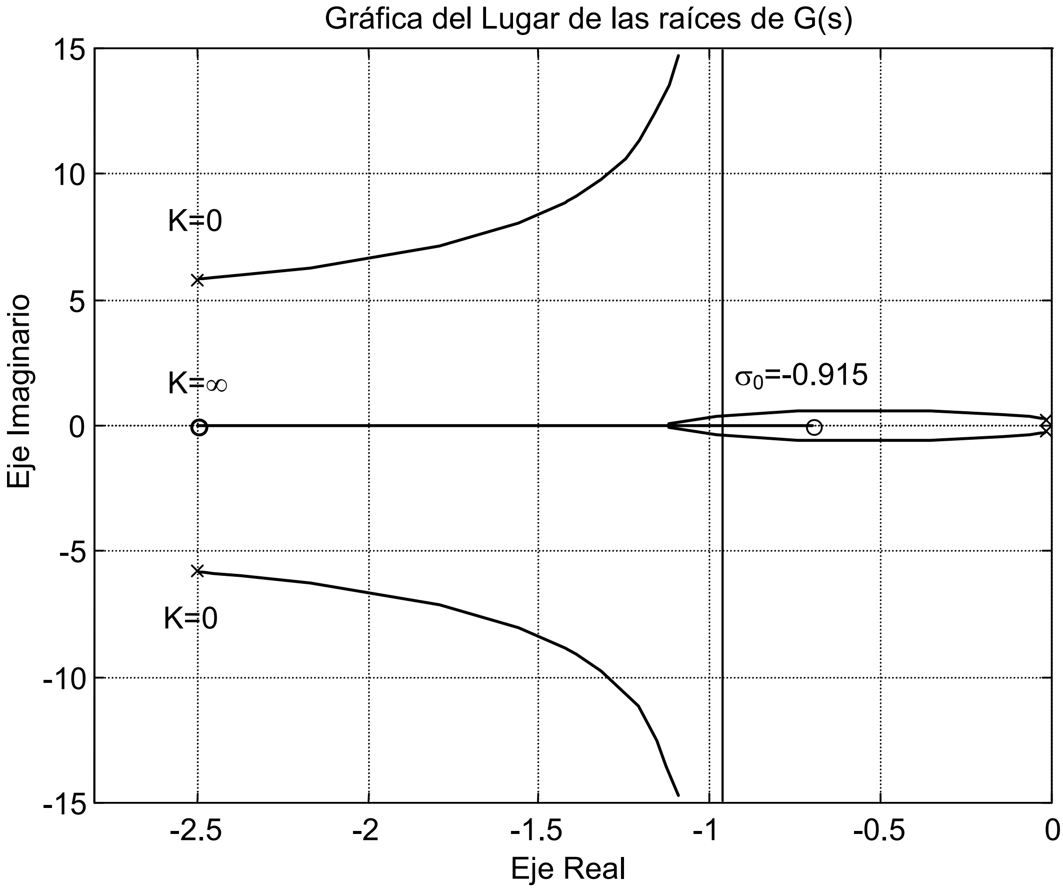
$$\frac{1.1642(K')^2+119.4607K'+47.7957}{39.9118+0.3638K'}=0$$

cuyas soluciones son :

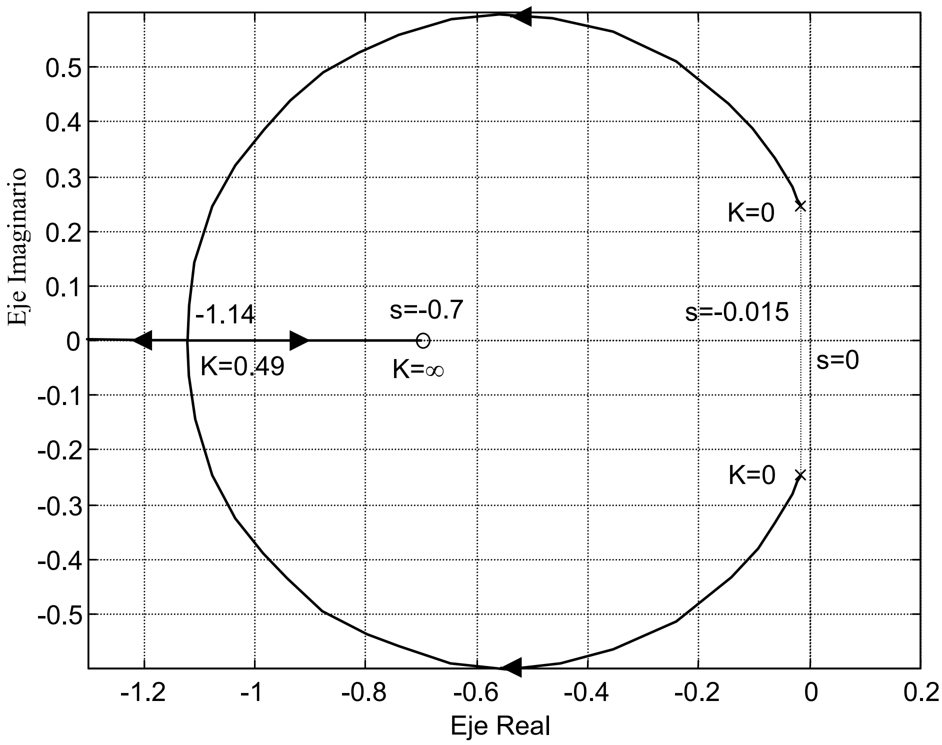
$K'=-0.4$ y $K'=-102.2$ que también corresponden al lugar inverso.

Luego significa que K' debe ser un valor negativo, es decir, no existe corte con el eje imaginario para el lugar directo de las raíces.

Por tanto, la forma final del lugar de las raíces es la que se muestra en la figura.



A continuación se muestra una ampliación de la zona del origen:

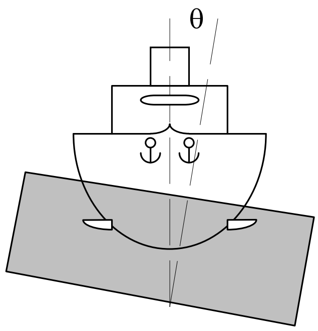


El sistema es estable para cualquier valor del controlador proporcional desde K igual a 0 a K igual a infinito.

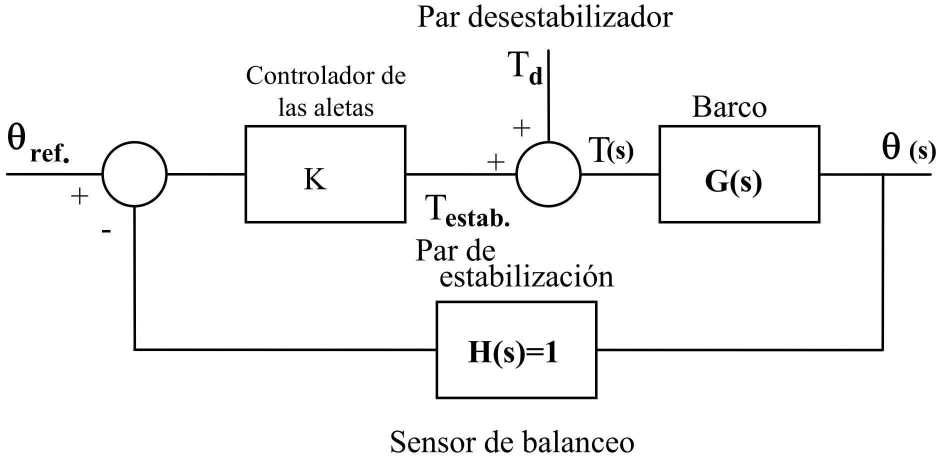
- Para valores de K comprendidos entre 0 y 0.49 el sistema en lazo cerrado se comportaría similar a uno de 2º orden con un par de polos complejos conjugados dominantes Los otros dos polos complejos conjugados están muy alejados.
- Para valores de K superiores a 0.49 el sistema, en lazo cerrado, se comporta como un sistema con 2 polos simples y un par de polos complejos conjugados. La respuesta es la de un sistema subamortiguado tanto más rápido cuanto mayor es el valor de K.

EJERCICIO 6.16.

Para garantizar la comodidad de los pasajeros en los barcos, estabilizando las oscilaciones producidas por las olas, se suelen disponer unas aletas móviles que permiten generar un momento de torsión de estabilización (mayor o menor en función de la superficie horizontal que presenten estas aletas).



Para conseguir reducir el balanceo a unos límites aceptables se introduce el sistema de control que muestra la figura.



Por otro lado, el movimiento de balanceo del barco puede considerarse como un péndulo oscilante con una desviación de θ grados en torno a la vertical, de forma que la función de transferencia de la dinámica del barco es de la forma siguiente:

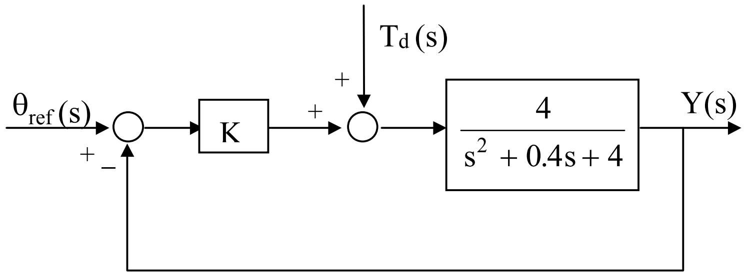
$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{4}{s^2 + 0.4s + 4}$$

Siendo:

$\theta(s)$: el ángulo de giro del barco respecto a la vertical
T(s): el par aplicado al barco.

Calcular y dibujar el lugar de las raíces.

Lugar de las raíces:



$$M_1(s) = \frac{\theta(s)}{\theta_{ref}(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K\dfrac{4}{s^2 + 0.4s + 4}}{1 + K\dfrac{4}{s^2 + 0.4s + 4}} = \frac{4K}{s^2 + 0.4s + 4 + 4K}$$

$$M_2(s) = \frac{\theta(s)}{T_d(s)} = \frac{G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{\dfrac{4}{s^2 + 0.4s + 4}}{1 + K\dfrac{4}{s^2 + 0.4s + 4}} = \frac{4}{s^2 + 0.4s + 4 + 4K}$$

1) Las dos funciones de transferencia tienen la misma ecuación característica:

$$G(s) \cdot H(s) = K \cdot \frac{4}{s^2 + 0.4s + 4}$$

2) No existe lugar de las raíces en el eje real.

3) Asíntotas:

$$\theta = \frac{180(2q + 1)}{2} = 90º\,,270º$$

4) Centroide:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Ceros}}{p - z} = \frac{-0.2 - 0.2}{2} = -0.2$$

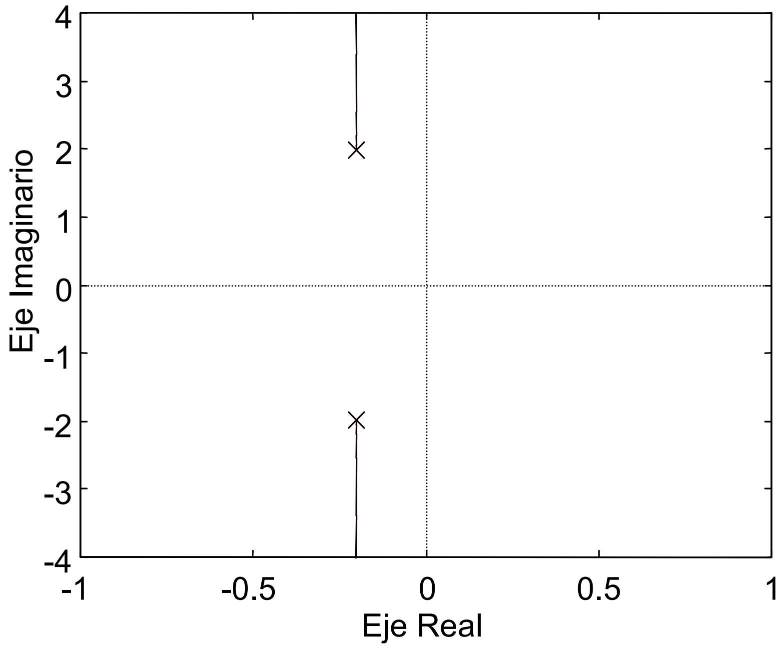
5) Angulos de salida de los polos complejos conjugados

$$\sum \theta_{polos} - \sum \theta_{ceros} = 180º$$

$$0º - (90º + \theta_{p1}) = 180º$$

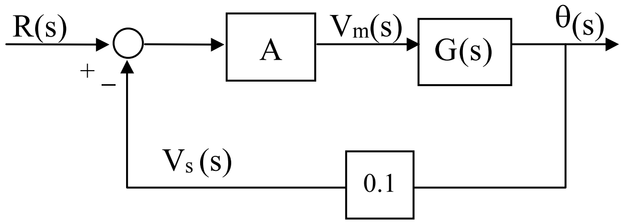
$$\theta_{p1} = -270º$$

Luego el dibujo del lugar de las raíces queda:



EJERCICIO 6.17.

Para el sistema del ejercicio 1.15. considerando L_a despreciable, dibujar el lugar directo e inverso de las raíces del sistema e indicar todos los posibles modos de funcionamiento que puede tener este sistema al variar la ganancia del regulador. ¿Es posible calcular un modelo equivalente reducido de este sistema? Calcular el valor del regulador proporcional A que hace que el sistema se comporte como un sistema de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 10%.



$$G(s) = \frac{K_2}{(J_T s^2 + f_T s - 6.93)(R_a + L_a s) + K_2 K_3 s}$$

Donde:

Parámetro	Valor (Unidades en S.I.)
R_a : Resistencia del inducido	1
L_a : Inductancia del inducido	0
K_3 : Cte. de fuerza contraelectromotriz	0.68
K_2 : Cte. del par motor	0.68
J_T : Momento de inercia total	1
f_T : Fricción viscosa total	0.1

En el ejercicio 1.15 puede verse la obtención del diagrama de bloques anterior, donde considerando L_a despreciable, y sustituyendo el valor de los parámetros en las ecuaciones se obtiene:

$$G(s) = \frac{0.68}{(s^2 + 0.1s - 6.93) + 0.4624s}$$

$$G(s) = \frac{0.68}{s^2 + 0.5624s - 6.93}$$

Luego la ecuación característica del sistema será:

$$1 + A \cdot \frac{0.68}{s^2 + 0.5624s - 6.93} \cdot 0.1 = 0$$

$$1 + A \cdot \frac{0.068}{s^2 + 0.5624s - 6.93} = 0$$

1) Nº de ramas: 2
2) Puntos de inicio: s=2.37
s=-2.93

Puntos de finalización: s=∞

3) Lugar en el eje real:

Lugar directo: [-2.93, 2.37]
Lugar inverso: (-∞,-2.93] y [2.37, ∞)

4) Asíntotas:

Directo: $\theta_a = \frac{180(2q+1)}{2} = \begin{cases} 90^{\circ} \\ -90^{\circ} \end{cases}$

Inverso: $\theta_a = \frac{180(2q)}{2} = \begin{cases} 0^{\circ} \\ 180^{\circ} \end{cases}$

5) Centroide: $\sigma_o = \frac{-2.93 + 2.37}{2} = -0.28$

6) Corte con el eje imaginario para el punto s=0.

Valor de A para el punto de corte con el eje imaginario:

$$A = -\left.\frac{s^2 + 0.5624s - 6.93}{0.068}\right|_{s=0} = 101.9$$

7) Punto de dispersión:

$$A = -\frac{s^2 + 0.5624s - 6.93}{0.068}$$

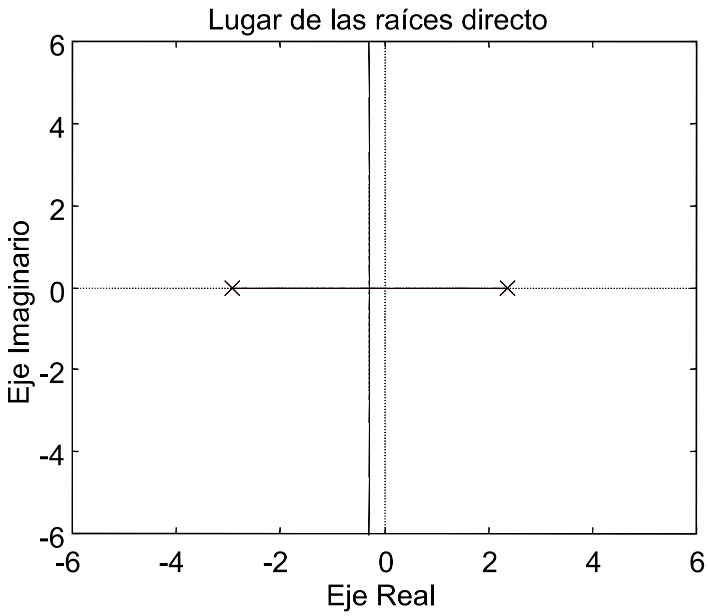
$$\frac{dA}{ds} = -\frac{1}{0.068}(2s + 0.5624) = 0$$

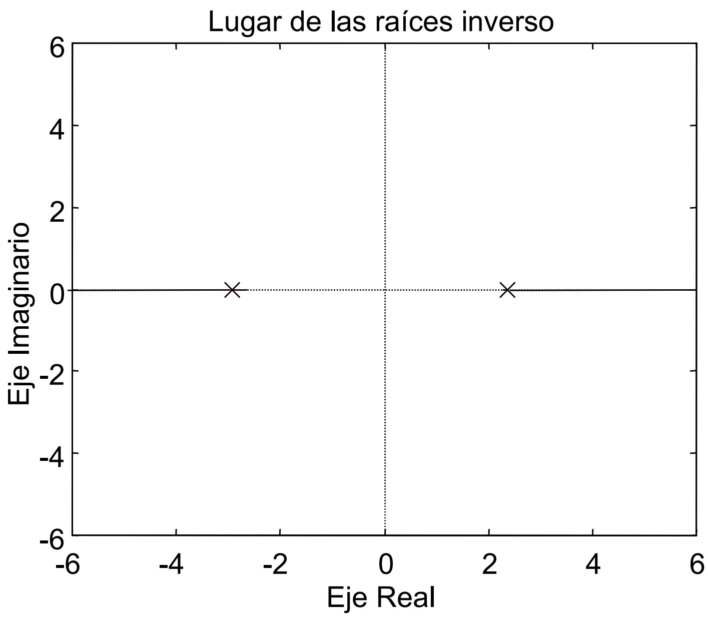
$$s = -\frac{0.5624}{2} = -0.28$$

Valor de A para el punto de dispersión:

$$A = -\left.\frac{s^2 + 0.5624s - 6.93}{0.068}\right|_{s=-0.28} = 103.1$$

Luego los lugares de las raíces directo e inverso quedarán:





Modos de funcionamiento:

A < 101.9 Inestable
A = 101.9 Críticamente estable
101.9 < A < 103.1 Sistema de segundo orden sobreamortiguado.
A > 103.1. Sistema de segundo orden subamortiguado.

Equivalente reducido:

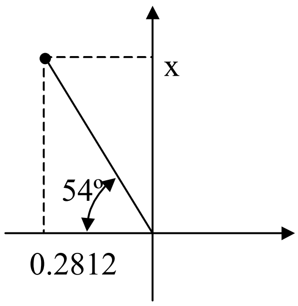
No puede obtenerse un equivalente reducido, ya que para A=150, el sistema presenta únicamente dos polos complejos en: $s = -0.28 \pm j1.79$

Regulador.

$$M_p = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.1 \qquad 5.3 = \frac{\pi^2\delta^2}{1-\delta^2} \qquad -5.3 + 5.3\delta^2 = -\pi^2\delta^2$$

$$\delta = 0.5911$$

$$\theta = \arccos\delta = 53.7^o \approx 54^o$$



$$\mathrm{tg}\,54^o = \frac{x}{0.2812} \qquad x = 0.3837$$

Luego el punto de corte con el lugar de las raíces es el:

$$s = -0.28 + j0.38$$

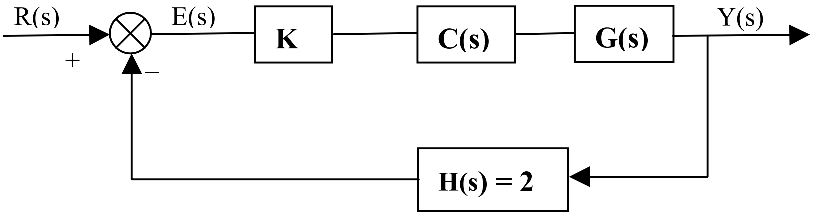
Se calcula ahora el valor de A para ese punto:

$$A = -\left.\frac{s^2 + 0.5624s - 6.93}{0.068}\right|_{s=-0.28+j0.38} = 105.2$$

Luego A debe valer 105.2.

EJERCICIO 6.18.

Sea el siguiente sistema de control:



Donde :

K es un amplificador de ganancia regulable.
C(s) es un regulador con la siguiente función de transferencia:

$$C(s) = \frac{s+6}{s^2+10s+26}$$

G(s) **)** es la función de transferencia de la planta:

$$G(s) = \frac{1}{s^2+6s+11}$$

H(s) = 2.

Dibujar el lugar de las raíces del sistema. Calcular el valor de la ganancia del amplificador, mediante el lugar de las raíces, para que el sistema funcione como uno de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 20%.

La ecuación característica del sistema es:

$$1 + K \cdot C(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = 0$$

$$1 + K \cdot \frac{s+6}{s^2+10s+26} \cdot \frac{1}{s^2+6s+11} \cdot 2 = 1 + K \frac{2s+12}{(s^2+10s+26)\,(s^2+6s+11)} = 0$$

- El número de ramas independientes del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en lazo abierto: C(s) G(s) H(s)

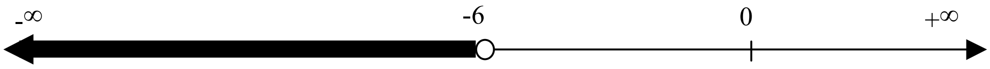
Número de polos de lazo abierto: 4, luego el L.R. tendrá 4 ramas.

- Cada rama del L.R. comienza en un polo de la FTLA y termina en un cero de la misma:

Puntos de comienzo (K = 0): polos $-3 \pm \sqrt{2}j; \quad -5 \pm j$

Puntos de término (K = ∞): ceros -6 y tres en el infinito.

- Comportamiento en el eje real: un punto situado sobre el eje real pertenecerá al L.R. si el número de polos y ceros situados a su derecha es impar:



- Simetría: el L.R. es simétrico respecto al eje real.

- Asíntotas: su número viene dado por *(n - m)* y los ángulos que forman con el eje real vienen dados por:

$$\vartheta_a = \frac{\pi(2q+1)}{n-m} \qquad (q = 0,1,2,...)$$

En donde n = número de polos finitos de la FTLA
m = número de ceros finitos de la FTLA

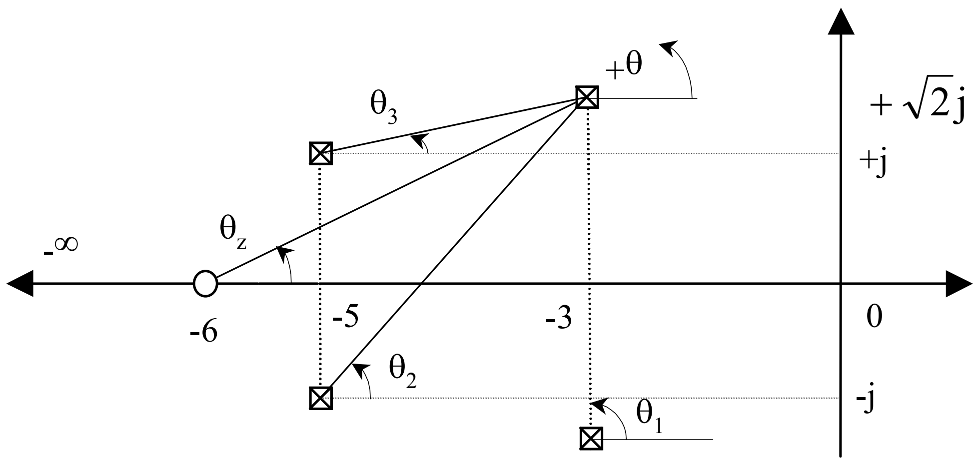
sustituyendo valores:

$$\vartheta_a = \frac{180^\circ(2q+1)}{4-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vartheta_1 = \dfrac{180(2\cdot 0+1)}{3} = 60^\circ \\ \vartheta_2 = \dfrac{180(2\cdot 1+1)}{3} = 180^\circ \\ \vartheta_3 = \dfrac{180(2\cdot 2+1)}{3} = 300^\circ \end{cases}$$

- Centroide: las asíntotas cortan al eje real en un punto situado a una distancia del origen dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) \; - \; \sum \text{ceros de } G(s)H(s)}{n-m} = \frac{-3-3-5-5+6}{3} = \frac{-10}{3} = -3.33$$

- Ángulos de salida de los polos complejos: se hallan aplicando el criterio del argumento en un punto muy próximo a dichos polos complejos



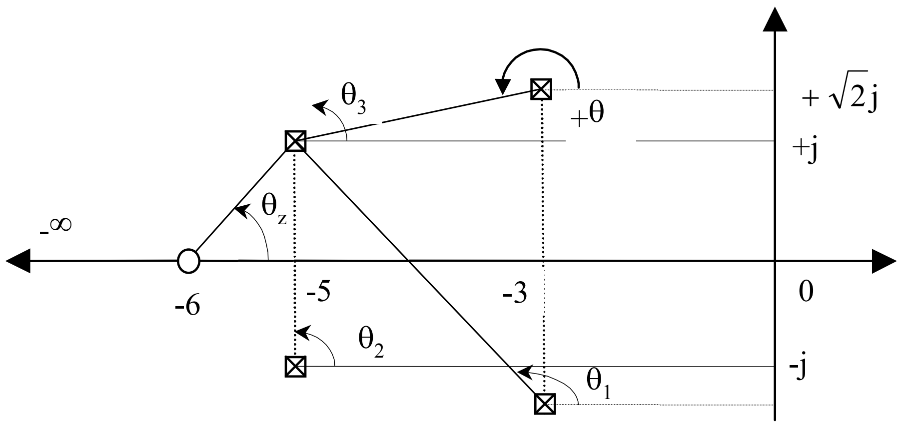
$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = \theta_z - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta = \text{arc tg}\frac{\sqrt{2}}{6-3} - 90^\circ - \text{arc tg}\frac{\sqrt{2}+1}{5-3} - \text{arc tg}\frac{\sqrt{2}-1}{5-3} - \theta$$

$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = 25.24^\circ - 90^\circ - 50.36^\circ - 11.70^\circ - \theta = -126.82^\circ - \theta = 180$$

$$\theta = 53.18^\circ$$

Para el otro par de polos complejos conjugados:



$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = 180^\circ$$

$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = \theta_z - \theta - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3$$

$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = \text{arc tg}\frac{6-5}{1} - \left(270^\circ - \text{arc tg}\frac{5-3}{\sqrt{2}-1}\right) - \left(180^\circ - \text{arc tg}\frac{1+\sqrt{2}}{5-3}\right) - 90^\circ - \theta_3$$

$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = 45^\circ - 191.70^\circ - 129.64^\circ - 90^\circ - \theta_3 = 180^\circ$$

$$\theta_3 = 186.34^\circ = -173.66^\circ$$

- Puntos de dispersión y de confluencia de ramas:

Se pone la ecuación característica de la forma: K = f (s),

$$K = \frac{-s^4 - 16s^3 - 97s^2 - 266s - 286}{2s + 12}$$

y se hallan las raíces de la ecuación:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(-6s^4 - 112s^3 - 770s^2 - 2328s - 2620)}{4s^2 + 48s + 144} = 0$$

por lo que:

$$6s^4 + 112s^3 + 770s^2 + 2328s + 2620 = 0$$

Resolviendo la ecuación, se obtienen las siguientes soluciones:

$$s_1 = -3.6392; \quad s_2 = -6.7534; \quad s_{3,4} = -4.13 \pm 0.8j$$

Una única solución real que pertenece al lugar de las raíces es: $s_2 = -6.7534$. Para saber si este punto es de confluencia o de dispersión, se halla la segunda derivada y se sustituye s por s_2:

$$\left(\frac{d^2K}{ds^2}\right)_{s=s_2} = \left[\frac{-48s^5 - 1312s^4 - 14208s^3 - 76032s^2 - 200800s - 209472}{16s^4 + 384s^3 + 3456s^2 + 13824s + 20736}\right]_{s=-6.7534} = 61.70$$

Como el resultado es mayor que cero, el punto s_2 = -6.7534 es un punto de confluencia de las ramas del lugar.

También se podría haber utilizado el método de iteración, ya que el orden de GH(s) es superior a 3:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a - p_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a - z_j}$$

Sustituyendo para cada polo y cero:

$$\frac{2(a+3)}{(a+3)^2 + 1.414^2} + \frac{2(a+5)}{(a+5)^2 + 1^2} = \frac{1}{a+6}$$

Suponiendo a = -6.5 y sustituyendo este valor de "a" en todas las fracciones excepto en las correspondientes a los polos o ceros que limitan el lugar del eje real a estudiar, se tiene:

$$\frac{2(-6.5+3)}{(-6.5+3)^2 + 1.414^2} + \frac{2(-6.5+5)}{(-6.5+5)^2 + 1^2} = \frac{1}{a+6} \quad \Rightarrow \quad a = -6.707$$

Haciendo una segunda iteración con este valor hallado se obtiene $a = -6.75$. Valor que damos por aceptable.

- Intersección del Lugar con el eje imaginario:

Se determinarán aplicando la regla de Routh, ya que dichos puntos corresponden a los polos que hacen al sistema críticamente estable.

La ecuación característica es:

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + K\,\frac{2s+12}{(s^2+10s+26)\,(s^2+6s+11)} = 0$$

Operando:

$$s^4 + 16s^3 + 97s^2 + (266 + 2K)s + (286 + 12K) = 0$$

Su tabla de Routh, será:

s^4	1	97	286+12K
s^3	16	266+2K	0
s^2	$97-\dfrac{266+2K}{16}$	286+12K	0
s^1	$\dfrac{-0.25K^2-64.5K+16803.75}{0.125K+80.375}$	0	0
s^0	286+12K	0	0

Obligando a que la fila de s^1 sea de ceros, se ha de cumplir que:

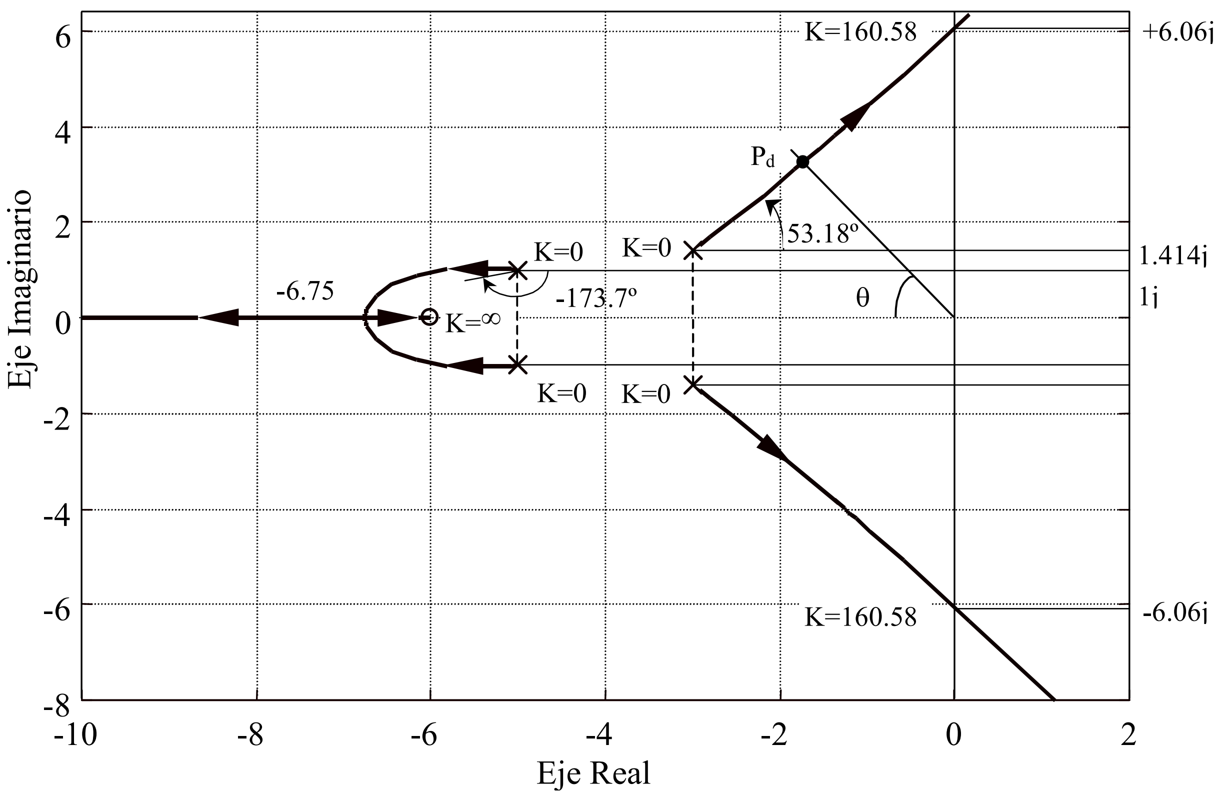
$$-0.25K^2-64.5K+16803.75=0 \quad K=160.579.$$

El otro valor pertenece al lugar inverso. El valor de la ordenada en los puntos de corte con el eje imaginario se obtendrá sustituyendo este valor de K en la ecuación auxiliar:

$$\left(97-\frac{266+2\cdot 160.579}{16}\right)s^2+286+12\cdot 160.579=0$$

$$60.3s^2+2212.95=0 \qquad s=\pm 6.06j$$

La figura muestra el lugar de las raíces resultante:



El punto de funcionamiento para las condiciones pedidas será:

$$\mathrm{Mp} = e^{-\pi \cot g\,\theta} = 20\% = 0.20$$

Resolviendo:

$$\ln e^{-\pi \cot g\,\theta} = -\pi \cot g\,\theta = \ln 0.20 = -1.6094$$

$$\cot g\,\theta = \frac{1.6094}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \theta = 62.8745º \quad \text{luego} \quad \delta = \arccos\theta = 0.4559$$

Del gráfico se obtiene, aproximadamente:

$$P_d = -1.69 \pm 3.3\,j$$

Aplicando el criterio del argumento se obtiene el valor de la ganancia necesaria:

$$K = \left|\frac{1}{G(s)\,H(s)}\right|_{s_d} = \left|\frac{(s^2 + 10s + 26)(s^2 + 6s + 11)}{2s + 12}\right|_{s=-1.69+3.3j} =$$

$$= \frac{\left|(-1.69 + 3.3j)^2 + 10(-1.69 + 3.3j) + 26\right|\left|(-1.69 + 3.3j)^2 + 6(-1.69 + 3.3j) + 11\right|}{\left|2(-1.69 + 3.3j) + 12\right|} =$$

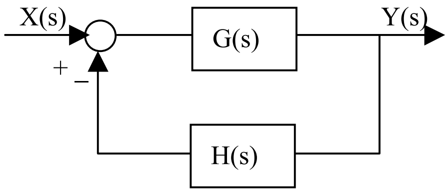
$$= \frac{\left|2.8561 - 11.154j - 10.89 - 16.9 + 33j + 26\right|\left|2.8561 - 11.154j - 10.89 - 10.14 + 19.8j + 11\right|}{\left|-3.38 + 6.6j + 12\right|} =$$

$$= \frac{\left|1.0661 + 21.846j\right|\left|-7.1739 + 8.646j\right|}{\left|8.62 + 6.6j\right|} = \frac{21.872 \cdot 11.2347}{10.8565} = 22.6339$$

Luego la ganancia del amplificador será: K = 22.6339

EJERCICIO 6.19.

Calcular el contorno de las raíces para variaciones del parámetro K del sistema mostrado en la figura.



$$G(s) = \frac{s}{s+2} \qquad H(s) = \frac{K}{s+K}$$

Calculando la función de transferencia de cadena cerrada:

$$M(s) = \frac{\frac{s}{s+2}}{1 + \frac{s}{s+2} \cdot \frac{K}{s+K}} = \frac{s(s+K)}{(s+2)(s+K) + Ks} = \frac{s(s+K)}{s^2 + 2s + K(2s+2)} = \frac{\frac{s(s+K)}{s^2+2s}}{1 + K\frac{2s+2}{s^2+2s}}$$

Ecuación característica:

$$1 + K\frac{2s+2}{s^2+2s} = 0$$

$$1 + K\frac{2(s+1)}{s(s+2)} = 0$$

1) Nº de ramas: 2

2) Puntos de inicio: s = 0
s = -2

Puntos de finalización: s = -1

3) Lugar en el eje real: [-∞ , -2] y [-1 , 0]

4) El contorno de las raíces es simétrico respecto al eje real.

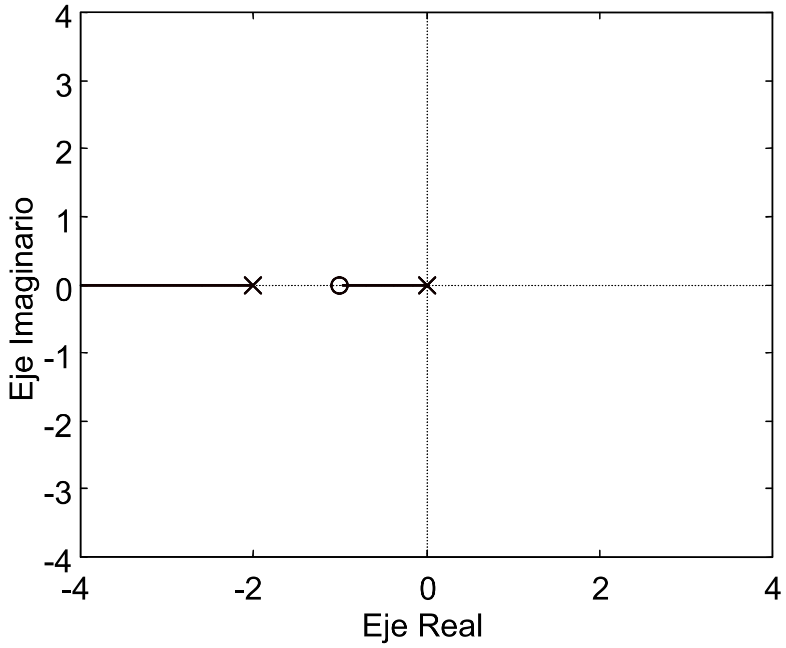
5) Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{1} = 180^\circ$$

6) Corte con el eje imaginario para el punto s=0.

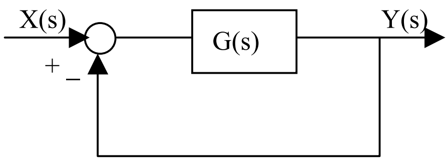
7) Punto de dispersión: No hay porque la rama que comienza en el polo en s=0 termina en s=-1 y la que comienza en el polo en s=-2 es asintótica con 180º.

8) Intersección con el eje imaginario: Sólo en s=0.



EJERCICIO 6.20.

Calcular el contorno de las raíces para variaciones del coeficiente de amortiguamiento δ del sistema mostrado en la figura:



$$G(s) = \frac{2s-4}{s^2+6\delta s+9}$$

$$M(s) = \frac{\dfrac{2s-4}{s^2+6\delta s+9}}{1+\dfrac{2s-4}{s^2+6\delta s+9}} = \frac{2s-4}{s^2+2s+5+6\delta s} = \frac{\dfrac{2s-4}{s^2+2s+5}}{1+\delta\dfrac{6s}{s^2+2s+5}}$$

$$1+\delta\frac{6s}{s^2+2s+5}=0$$

1) Nº de ramas: 2

2) Puntos de inicio: $s=-1\pm 2j$

Puntos de finalización: $s = 0$

3) Lugar en el eje real: $[-\infty , 0]$

4) El contorno de las raíces es simétrico respecto al eje real.

5) Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{1} = 180^{\circ}$$

6) Corte con el eje imaginario para el punto s=0.

7) Punto de dispersión:

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)} = -\frac{s^2+2s+5}{6s}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s+2)\cdot 6s - (s^2+2s+5)\cdot 6}{(6s)^2} = 0$$

$$(2s+2)\cdot 6s - (s^2+2s+5)\cdot 6 = 0$$

$$s^2 - 5 = 0$$

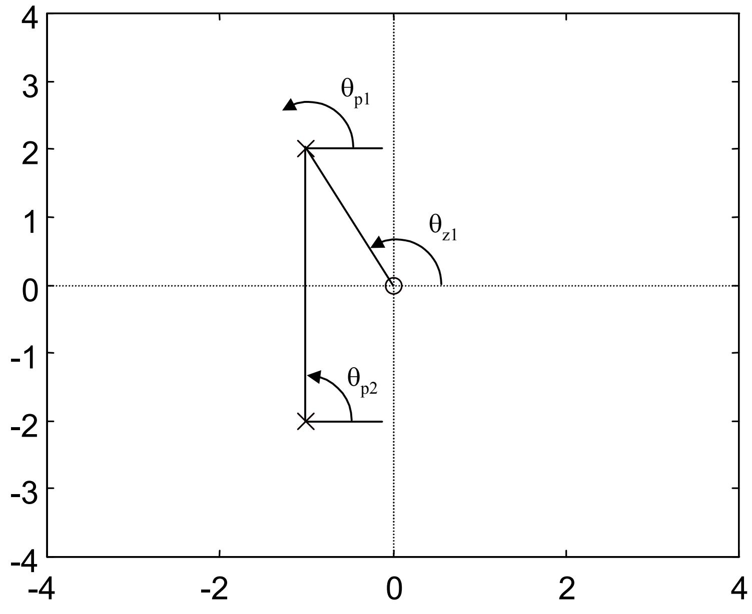
$$s = \pm\sqrt{5} = \pm 2.2$$

Luego el punto de dispersión estará en –2.2.

8) Intersección con el eje imaginario: Solo corta al eje imaginario en s = 0.

9) Ángulos de salida y llegada a polos complejos conjugados:

$$\sum \theta_{ceros} - \sum \theta_{polos} = 180^{\circ}(2q+1)$$



$$\theta_{z1} = 180 - \text{arctg}\,2 = 116.6^\circ$$

$$\theta_{p2} = 90^\circ$$

$$\theta_{z1} - (\theta_{p1} + \theta_{p2}) = 180^\circ$$

$$116.6^\circ - (\theta_{p1} + 90^\circ) = 180^\circ$$

$$\theta_{p1} = -153.4^\circ = 206.6^\circ$$