Universidad de Cantabria
Departamento de Ing. Estructural y Mecánica

Capitulo III

III 2. Métodos analíticos de análisis cinemático

Capítulo III
Análisis cinemático de mecanismos

Capítulo III: Tema 2
Métodos analíticos de análisis cinemático

1. Introducción.
2. Mecanismo cuadrilátero articulado.
    1. Problema de posición.
    2. Problema de velocidades.
    3. Problema de aceleración.

Capítulo III: Tema 2
Métodos analíticos de análisis cinemático

1. Introducción.

Introducción

Los métodos analíticos tratan de llegar a una expresión matemática de las variables cinemáticas de posición, velocidad y aceleración, en función de los parámetros que definen las dimensiones del mecanismo analizado y las variables cinemáticas de entrada.

Normalmente estos métodos se basan en tres tipos de enfoques matemáticos: trigonométrico, números complejos y análisis vectorial. En cualquiera de los casos se trata de plantear las denominadas <u>ecuaciones de cierre</u> o <u>ecuaciones de lazo</u>. Estas ecuaciones representan las restricciones del movimiento del mecanismo de forma matemática empleando cualquiera de los tres enfoques mencionados.

En este apartado se estudiará el método analítico de Raven, uno de los más utilizados, y que permite obtener con relativa facilidad las ecuaciones analíticas del mecanismo cuadrilátero articulado y biela-manivela.

Capítulo III: Tema 2
Métodos analíticos de análisis cinemático

2. Mecanismo cuadrilátero articulado.
    1. Problema de posición.
    2. Problema de velocidades.
    3. Problema de aceleración.

Problema de posición

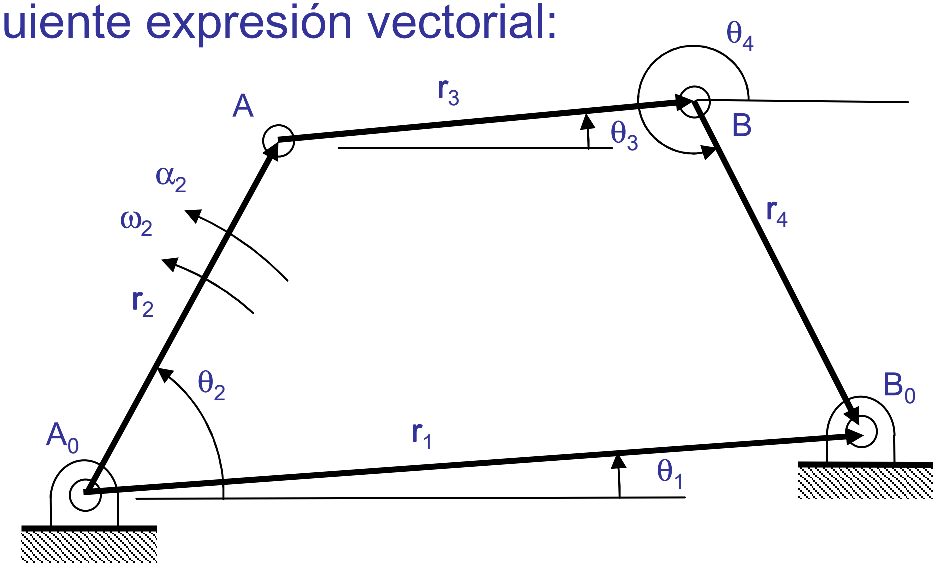
Mecanismo cuadrilátero articulado:

Para la determinación de la posición inicial se plantea la ecuación de cierre del mecanismo que tiene la siguiente expresión vectorial:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4$$

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 \cos\theta_1 &= r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 + r_4 \cos\theta_4 \\ r_1 sen\theta_1 &= r_2 sen\theta_2 + r_3 sen\theta_3 + r_4 sen\theta_4 \end{aligned}\right\}$$



Sistema algebraico que puede ser resuelto para obtener los valores de θ_3 y θ_4 en función de los valores conocidos de θ_1, θ_2, r_1, r_2, r_3 y r_4. Se puede utilizar un método numérico para su resolución o métodos trigonométricos para la resolución de este tipo de ecuaciones.

Problema de posición

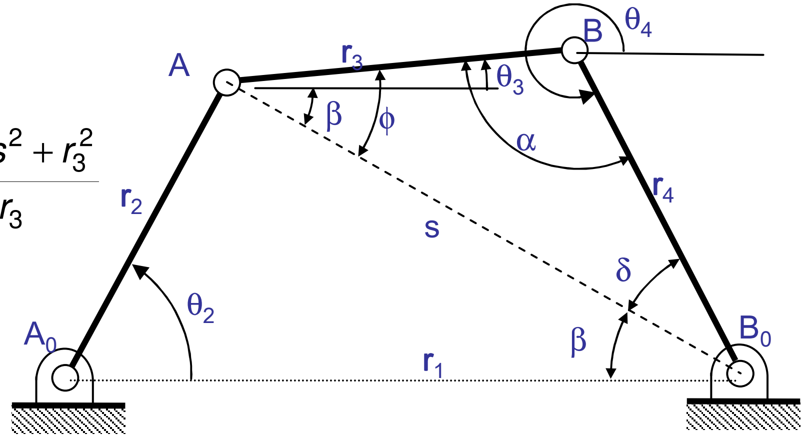
Para obtener la posición inicial se puede emplear un procedimiento trigonométrico

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}$$

$$r_4^2 = s^2 + r_3^2 - 2sr_3 \cos\phi \qquad \phi = a\cos\frac{-r_4^2 + s^2 + r_3^2}{2sr_3}$$

$$s\,sen\beta = r_2 sen\theta_2 \qquad \beta = asen\left(\frac{r_2}{s} sen\theta_2\right)$$

$$r_4 sen\delta = r_3 sen\phi \qquad \delta = asen\left(\frac{r_3}{r_4} sen\phi\right)$$



Ahora podemos obtener los ángulos que definen las posiciones de las barras como,

$$\theta_3 = \phi - \beta \qquad \theta_4 = 360º - (\beta + \delta)$$

Hay que tener en cuenta que las expresiones planteadas pueden variar en función de la posición relativa de los elementos. Así por ejemplo, si el ángulo θ_2 es mayor que 180º o si se considera la solución cruzada frente a la solución abierta.

Problema de posición

Para establecer la posición de un punto cualquiera sobre un eslabón cualquiera es necesario plantear formulación adicional. En el caso del elemento 2 se tendrá,

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{g}_2 = g_2 e^{i\lambda_2} \qquad \lambda_2 = \theta_2 + \phi_2$$

$$\left.\begin{aligned} x_{p_2} &= g_2 \cos \lambda_2 = g_2 \cos(\theta_2 + \phi_2) \\ y_{p_2} &= g_2 \sin \lambda_2 = g_2 \sin(\theta_2 + \phi_2) \end{aligned}\right\}$$

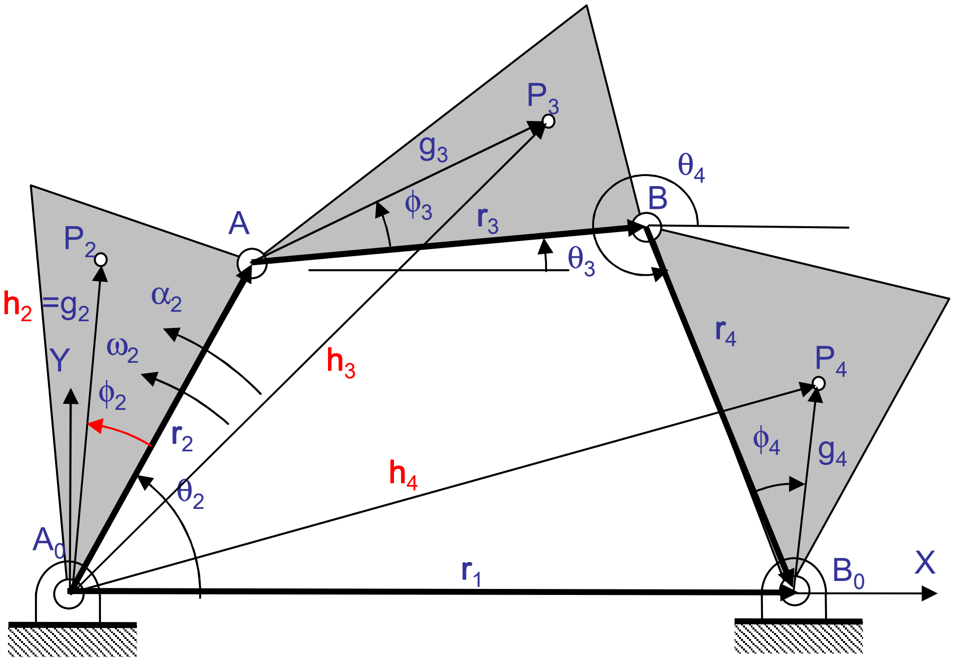
En el caso del punto P_3 y P4 sobre el elemento 3 y 4 respectivamente,

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{r}_2 + g_3 e^{i\lambda_3} \qquad \lambda_3 = \theta_3 + \phi_3$$

$$\left.\begin{aligned} x_{p_3} &= r_2 \cos\theta_2 + g_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\ y_{p_3} &= r_2 sen\theta_2 + g_3 sen(\theta_3 + \phi_3) \end{aligned}\right\}$$

$$\mathbf{h}_4 = \mathbf{r}_1 + g_4 e^{i\lambda_4} \qquad \lambda_4 = \theta_4 - \phi_4 + 180$$

$$\left.\begin{aligned} x_{p_4} &= r_1 + g_4 \cos(\theta_4 - \phi_4 + 180) \\ y_{p_4} &= g_4 sen(\theta_4 - \phi_4 + 180) \end{aligned}\right\}$$



En esta expresión se ha considerado un signo (-) afectando al ángulo ϕ_4 dado su sentido. Este signo puede ser positivo en otros casos.

Problema de velocidades

Para la determinación de las velocidades se considera de nuevo la ecuación de cierre,

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4}$$

Sin pérdida de generalidad se puede considerar que el elemento fijo forma un ángulo θ_1=0. Entonces, reordenando la ecuación queda como,

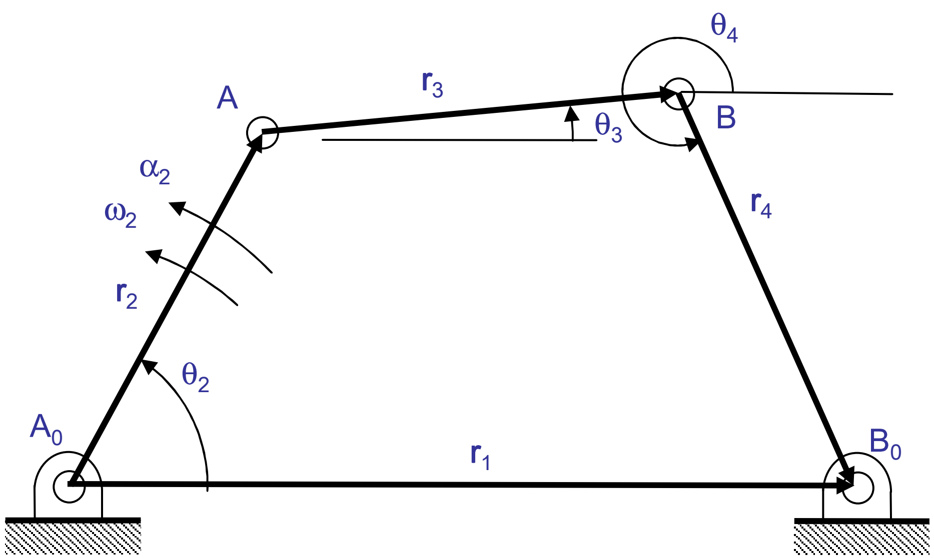
$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} - r_1 = 0$$

Derivando con respecto al tiempo,

$$i r_2 \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} + i r_3 \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} + i r_4 \frac{d\theta_4}{dt} e^{i\theta_4} = 0$$

$$i r_2 \omega_2 e^{i\theta_2} + i r_3 \omega_3 e^{i\theta_3} + i r_4 \omega_4 e^{i\theta_4} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} r_3 \omega_3 sen\theta_3 + r_4 \omega_4 sen\theta_4 &= -r_2 \omega_2 sen\theta_2 \\ r_3 \omega_3 \cos\theta_3 + r_4 \omega_4 \cos\theta_4 &= -r_2 \omega_2 \cos\theta_2 \end{aligned}\right\}$$



Problema de velocidades

$$\left.\begin{aligned} r_3\omega_3 sen\theta_3 + r_4\omega_4 sen\theta_4 &= -r_2\omega_2 sen\theta_2 \\ r_3\omega_3\cos\theta_3 + r_4\omega_4\cos\theta_4 &= -r_2\omega_2\cos\theta_2 \end{aligned}\right\}$$

que es un sistema de ecuaciones donde las únicas incógnitas son ω_3 y ω_4, y por tanto puede resolverse empleando, por ejemplo, la regla de Cramer,

$$\omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} -r_2\omega_2 sen\theta_2 & r_4 sen\theta_4 \\ -r_2\omega_2\cos\theta_2 & r_4\cos\theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_3 sen\theta_3 & r_4 sen\theta_4 \\ r_3\cos\theta_3 & r_4\cos\theta_4 \end{vmatrix}} = \frac{-r_2\omega_2 sen\theta_2 r_4\cos\theta_4 + r_4 sen\theta_4 r_2\omega_2\cos\theta_2}{r_3 sen\theta_3 r_4\cos\theta_4 - r_4 sen\theta_4 r_3\cos\theta_3}$$

Operando,

$$\omega_3 = \frac{-r_2 sen(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 sen(\theta_3 - \theta_4)}\omega_2$$

e igualmente para ω_4,

$$\omega_4 = \frac{r_2 sen(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 sen(\theta_3 - \theta_4)}\omega_2$$

Problema de velocidades

En el caso de un punto cualquiera sobre el eslabón 2 será necesario formular,

$$\mathbf{g}_2 = g_2 e^{i\lambda_2}$$

Derivando respecto del tiempo se obtiene la velocidad. Es decir,

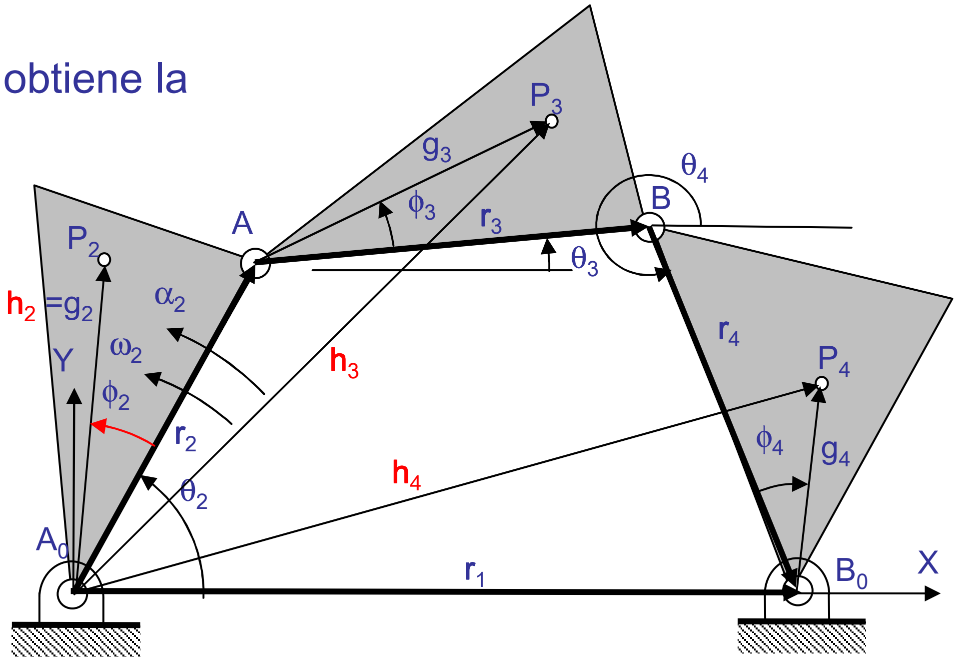
$$\mathbf{V}_{P_2} = \frac{d\mathbf{g}_2}{dt} = i g_2 \frac{d\lambda_2}{dt} e^{i\lambda_2}$$

donde,

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d(\theta_2 + \phi_2)}{dt} = \omega_2$$

Por tanto,

$$\mathbf{V}_{P_2} = i g_2 \omega_2 e^{i(\theta_2 + \phi_2)}$$



Separando en parte real e imaginaria,

$$V_{P_2x} = -g_2 \omega_2 sen(\theta_2 + \phi_2)$$
$$V_{P_2y} = g_2 \omega_2 \cos(\theta_2 + \phi_2)$$

Problema de velocidades

En el caso del punto P_3 la velocidad será,

$$\mathbf{V}_{P_3} = \frac{d\mathbf{g}_3}{dt} = i\mathbf{r}_2\omega_2 e^{i\theta_2} + ig_3\omega_3 e^{i(\theta_3+\phi_3)}$$

Separando en parte real e imaginaria,

$$V_{P_3x} = -r_2\omega_2 sen\theta_2 - g_3\omega_3 sen(\theta_3+\phi_3)$$

$$V_{P_3y} = r_2\omega_2\cos\theta_2 + g_3\omega_3\cos(\theta_3+\phi_3)$$

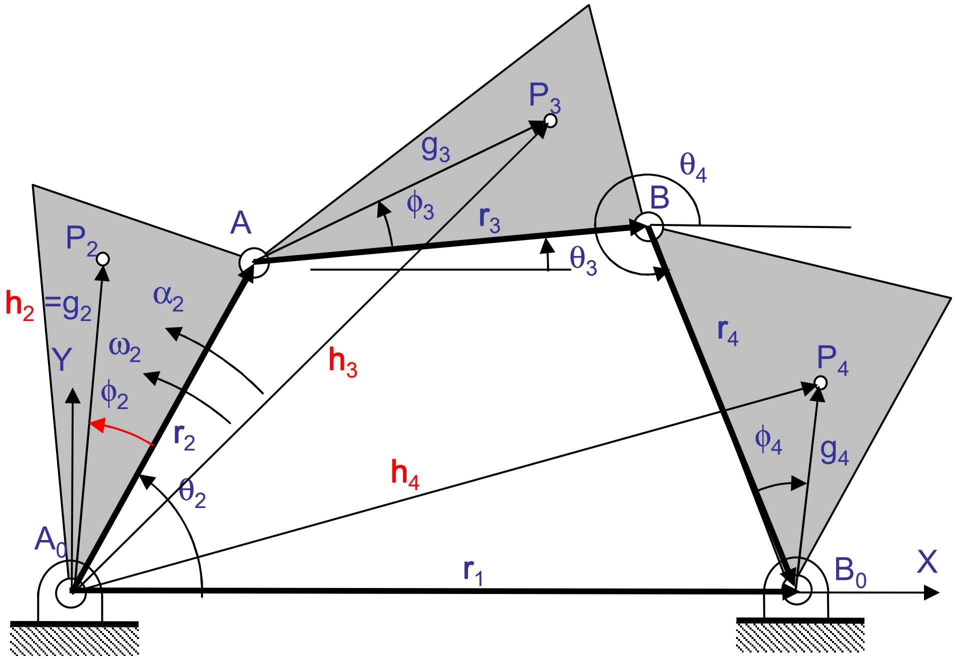
De la misma forma para el punto P_4,

$$\mathbf{V}_{P_4} = \frac{d\mathbf{g}_4}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + ig_4\frac{d\lambda_4}{dt}e^{i\lambda_4} = ig_4\omega_4 e^{i\lambda_4}$$

Separando parte real e imaginaria,

$$V_{P_4x} = -g_4\omega_4 sen(\theta_4 - \phi_4 + 180)$$

$$V_{P_4y} = +g_4\omega_4\cos(\theta_4 - \phi_4 + 180)$$



Las velocidades de cada punto se pueden obtener determinado el módulo y argumento. Esto es,

$$V_i = \sqrt{V_{ix}^2 + V_{iy}^2} \qquad \varphi_i = a\tan\frac{V_{iy}}{V_{ix}}$$

Problema de aceleraciones

Considerando de nuevo la expresión,

$$ir_2 \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} + ir_3 \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} + ir_4 \frac{d\theta_4}{dt} e^{i\theta_4} = 0$$

Derivando otra vez respecto del tiempo,

$$-r_2\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 e^{i\theta_2} - r_3\left(\frac{d\theta_3}{dt}\right)^2 e^{i\theta_3} - r_4\left(\frac{d\theta_4}{dt}\right)^2 e^{i\theta_4} + ir_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} e^{i\theta_2} + ir_3 \frac{d^2\theta_3}{dt^2} e^{i\theta_3} + ir_4 \frac{d^2\theta_4}{dt^2} e^{i\theta_4} = 0$$

O en forma compacta,

$$-r_2\omega_2{}^2 e^{i\theta_2} - r_3\omega_3{}^2 e^{i\theta_3} - r_4\omega_4{}^2 e^{i\theta_4} + ir_2\alpha_2 e^{i\theta_2} + ir_3\alpha_3 e^{i\theta_3} + ir_4\alpha_4 e^{i\theta_4} = 0$$

Reordenando y separando en parte real e imaginaria se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas,

$$\left.\begin{array}{l} -r_3\alpha_3 sen\theta_3 - r_4\alpha_4 sen\theta_4 = r_2\omega_2{}^2\cos\theta_2 + r_3\omega_3{}^2\cos\theta_3 + r_4\omega_4{}^2\cos\theta_4 + r_2\alpha_2 sen\theta_2 \\ r_3\alpha_3\cos\theta_3 + r_4\alpha_4\cos\theta_4 = r_2\omega_2{}^2 sen\theta_2 + r_3\omega_3{}^2 sen\theta_3 + r_4\omega_4{}^2 sen\theta_4 - r_2\alpha_2\cos\theta_2 \end{array}\right\}$$

donde las incógnitas son α_3 y α_4.

Problema de aceleraciones

Resolviendo por Cramer se obtiene,

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} r_2\omega_2^2\cos\theta_2 + r_3\omega_3^2\cos\theta_3 + r_4\omega_4^2\cos\theta_4 + r_2\alpha_2 sen\theta_2 & -r_4 sen\theta_4 \\ r_2\omega_2^2 sen\theta_2 + r_3\omega_3^2 sen\theta_3 + r_4\omega_4^2 sen\theta_4 - r_2\alpha_2\cos\theta_2 & r_4\cos\theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_3 sen\theta_3 & -r_4 sen\theta_4 \\ r_3\cos\theta_3 & r_4\cos\theta_4 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(r_2\omega_2^2\cos\theta_2 + r_3\omega_3^2\cos\theta_3 + r_4\omega_4^2\cos\theta_4 + r_2\alpha_2 sen\theta_2) r_4\cos\theta_4}{-r_3 sen\theta_3 r_4\cos\theta_4 + r_4 sen\theta_4 r_3\cos\theta_3} +$$

$$+ \frac{r_4 sen\theta_4 (r_2\omega_2^2 sen\theta_2 + r_3\omega_3^2 sen\theta_3 + r_4\omega_4^2 sen\theta_4 - r_2\alpha_2\cos\theta_2)}{-r_3 sen\theta_3 r_4\cos\theta_4 + r_4 sen\theta_4 r_3\cos\theta_3} =$$

$$= \frac{r_2\omega_2^2\cos\theta_2\cos\theta_4 + r_3\omega_3^2\cos\theta_3\cos\theta_4 + r_4\omega_4^2\cos^2\theta_4 + r_2\alpha_2 sen\theta_2\cos\theta_4}{r_3 sen(\theta_4 - \theta_3)} +$$

$$+ \frac{r_2\omega_2^2 sen\theta_2 sen\theta_4 + r_3\omega_3^2 sen\theta_3 sen\theta_4 + r_4\omega_4^2 sen^2\theta_4 - r_2\alpha_2\cos\theta_2 sen\theta_4}{r_3 sen(\theta_4 - \theta_3)} =$$

$$= \frac{r_2\omega_2^2\cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2\cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4\omega_4^2 + r_2\alpha_2 sen(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 sen(\theta_4 - \theta_3)} =$$

$$= \frac{r_2\omega_2^2\cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2\cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4\omega_4^2}{r_3 sen(\theta_4 - \theta_3)} - \frac{\alpha_2 r_2 sen(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 sen(\theta_3 - \theta_4)} =$$

$$= \frac{r_2\omega_2^2\cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2\cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4\omega_4^2}{r_3 sen(\theta_4 - \theta_3)} + \frac{\alpha_2\omega_3}{\omega_2}$$

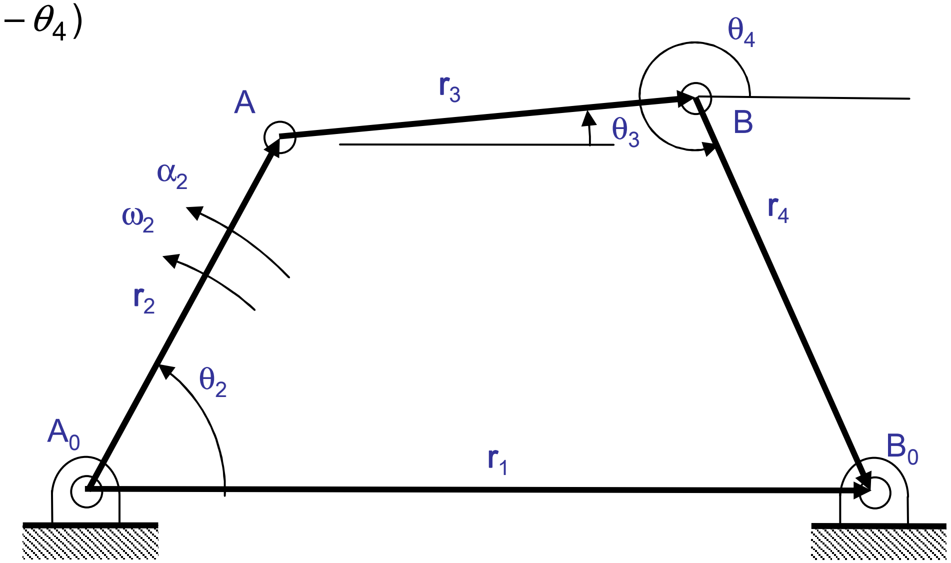
Problema de aceleraciones

Reordenando,

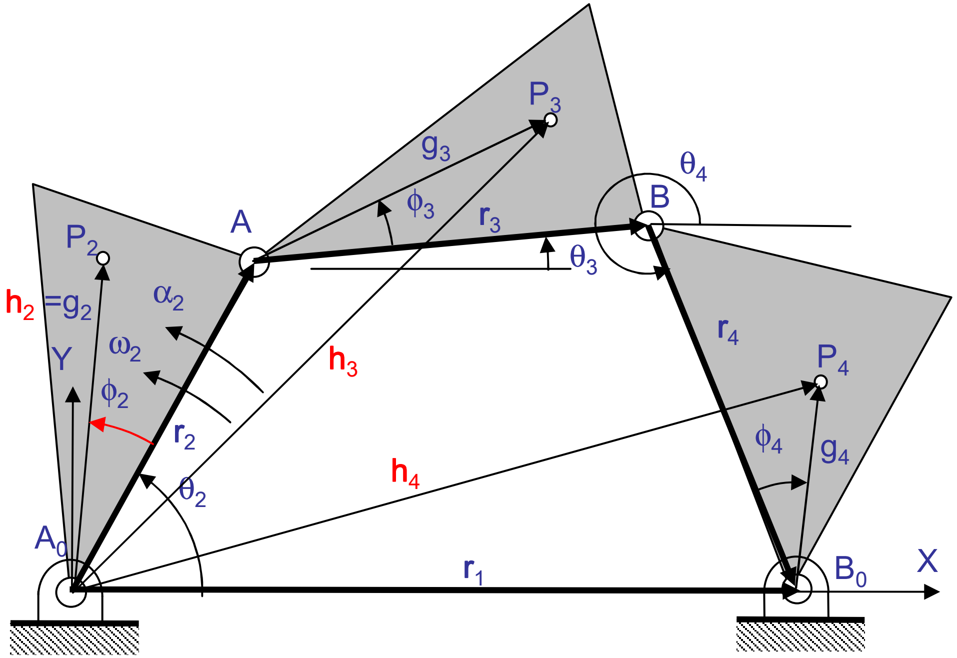
$$\alpha_3 = \frac{\omega_3}{\omega_2}\alpha_2 - \frac{r_2\omega_2^2\cos(\theta_2-\theta_4)+r_3\omega_3^2\cos(\theta_3-\theta_4)+r_4\omega_4^2}{r_3 sen(\theta_3-\theta_4)}$$

De la misma forma para α_4,

$$\alpha_4 = \frac{\omega_4}{\omega_2}\alpha_2 - \frac{r_2\omega_2^2\cos(\theta_2-\theta_3)+r_4\omega_4^2\cos(\theta_3-\theta_4)+r_3\omega_3^2}{r_4 sen(\theta_3-\theta_4)}$$



Problema de aceleraciones



Para el punto P_2 la aceleración será,

$$\mathbf{A}_{P_2} = ig_2\alpha_2 e^{i(\theta_2+\phi_2)} - g_2\omega_2^2 e^{i(\theta_2+\phi_2)}$$

Separando parte real e imaginaria,

$$A_{P_2x} = -g_2\alpha_2 sen(\theta_2+\phi_2) - g_2\omega_2^2\cos(\theta_2+\phi_2)$$

$$A_{P_2y} = g_2\alpha_2\cos(\theta_2+\phi_2) - g_2\omega_2^2 sen(\theta_2+\phi_2)$$

En el caso del punto P_3,

$$\mathbf{A}_{P_3} = ir_2\alpha_2 e^{i\theta_2} - r_2\omega_2^2 e^{i\theta_2} + ig_3\alpha_3 e^{i(\theta_3+\phi_3)} - g_3\omega_3^2 e^{i(\theta_3+\phi_3)}$$

Separando en parte real e imaginaria,

$$A_{P_3x} = -r_2(\alpha_2 sen\theta_2 + \omega_2^2\cos\theta_2) - g_3(\alpha_3 sen(\theta_3+\phi_3) + \omega_3^2\cos(\theta_3+\phi_3))$$

$$A_{P_3y} = r_2(\alpha_2\cos\theta_2 - \omega_2^2 sen\theta_2) + g_3(\alpha_3\cos(\theta_3+\phi_3) - \omega_3^2 sen(\theta_3+\phi_3))$$

Problema de aceleraciones

Finalmente, para el punto P_4 se obtiene,

$$\mathbf{A}_{P_4} = i g_4 \alpha_4 e^{i\lambda_4} - g_4 \omega_4^2 e^{i\lambda_4}$$

Separando parte real e imaginaria,

$$A_{P_4 x} = -g_4 \alpha_4 sen(\theta_4 - \phi_4 + 180) - g_4 \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \phi_4 + 180)$$

$$A_{P_4 y} = +g_4 \alpha_4 \cos(\theta_4 - \phi_4 + 180) - g_4 \omega_4^2 \sin(\theta_4 - \phi_4 + 180)$$

Las componentes globales de aceleración se determinan de la misma forma que en el caso de las velocidades, esto es,

$$A_i = \sqrt{A_{ix}^2 + A_{iy}^2}$$

$$\varphi_i = a\tan\frac{A_{iy}}{A_{ix}}$$