



Capítulo III

III.3 Métodos numéricos de análisis cinemático

Capítulo III

Análisis cinemático de mecanismos

- III.1 Análisis cinemático de mecanismos. Métodos gráficos.
- III.2 Métodos analíticos de análisis cinemático.
- III.3 Métodos numéricos de análisis cinemático.
 - 1. Coordenadas y ecuaciones de restricción.
 - 2. Determinación de la posición inicial.
 - 3. Desplazamientos finitos.
 - 4. Determinación de las velocidades.
 - 5. Determinación de las aceleraciones.

Capítulo III: Tema 3

Métodos numéricos de análisis cinemático

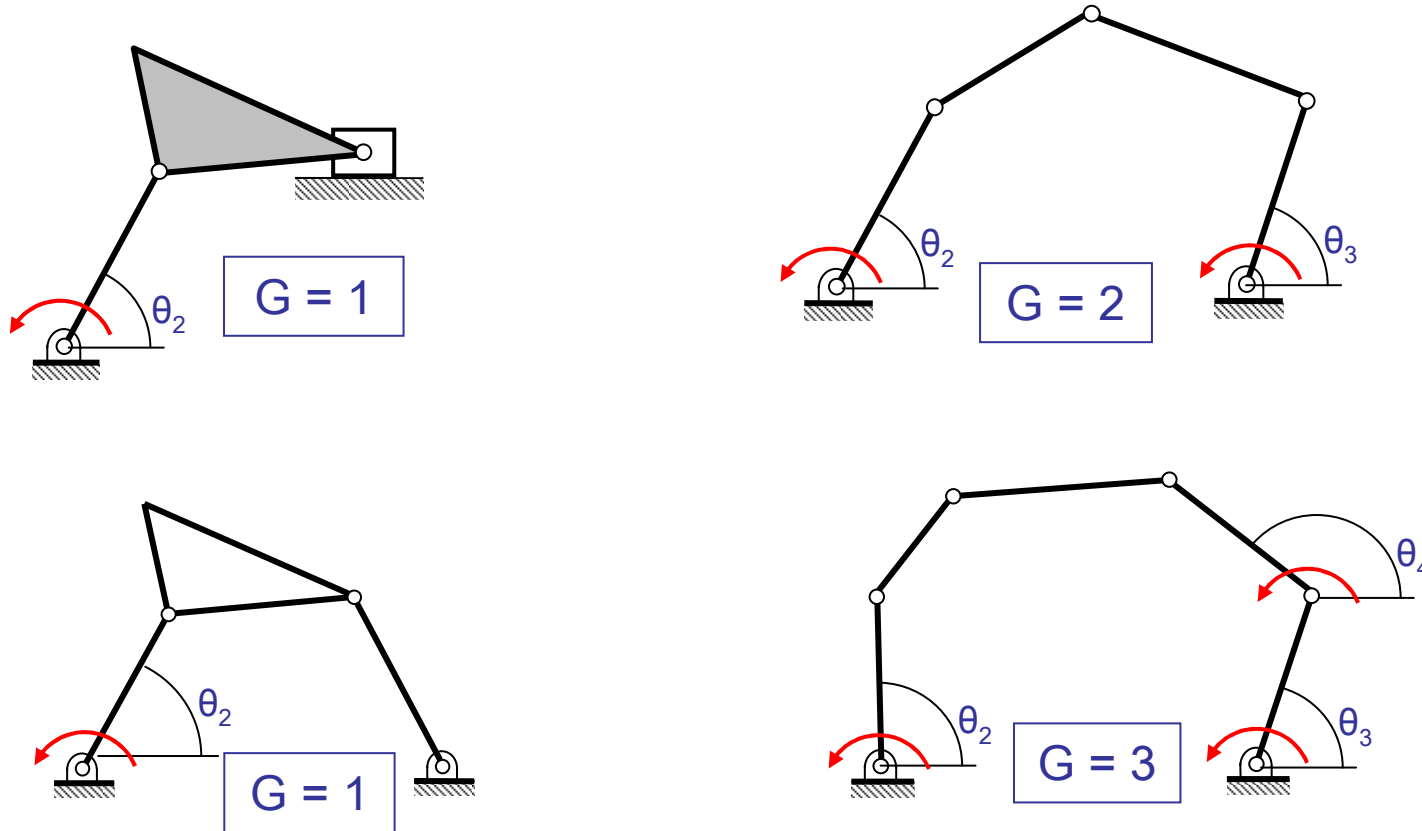
1. Coordenadas y ecuaciones de restricción.
 1. Coordenadas independientes.
 2. Coordenadas dependientes.
 3. Ecuaciones de restricción.
 4. Tipos de coordenadas.
2. Determinación de la posición inicial.
3. Desplazamientos finitos.
4. Determinación de las velocidades.
5. Determinación de las aceleraciones.

Capítulo III: Tema 3

Métodos numéricos de análisis cinemático

1. Coordenadas y ecuaciones de restricción.
 1. Coordenadas independientes.
 2. Coordenadas dependientes.
 3. Ecuaciones de restricción.
 4. Tipos de coordenadas.

Coordenadas independientes



El número de grados de libertad define el número el número de elementos de entrada. Es decir, el número de motores y/o actuadores que deben colocarse en el mecanismo para proporcionar movimiento.

Coordenadas independientes

Coordenadas independientes: son aquellas que coinciden con el número de grados de libertad del mecanismo, y por tanto son el mínimo número de coordenadas necesarias para definir completamente la posición.

$$\mathbf{q}_i^T = [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]$$

Las coordenadas independientes dependen directamente de la variable tiempo. Son las entradas en el mecanismo y el analista establece como varían con el tiempo.

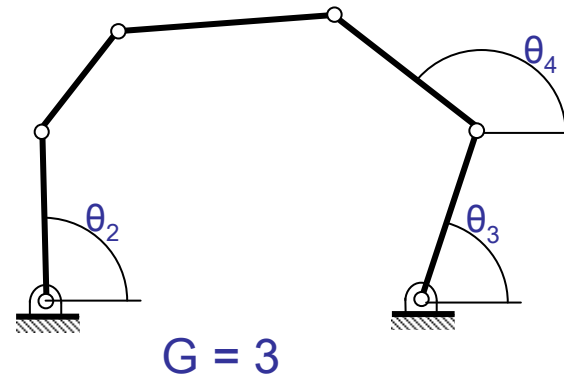
$$\theta_1 = \theta_1(t)$$

$$\theta_2 = \theta_2(t)$$

$$\theta_3 = \theta_3(t)$$

$$\rightarrow \Phi(t) = 0$$

Restricciones temporales



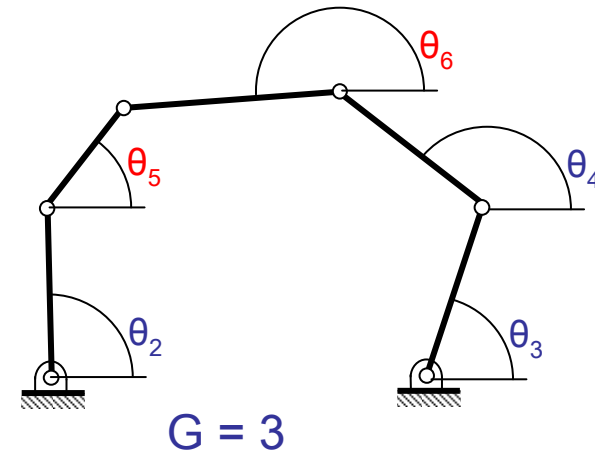
Coordenadas dependientes

Coordenadas dependientes: se puede emplear un número mayor de coordenadas que el número de grados de libertad. De esta forma se consigue una descripción mucho más sencilla del sistema pero deben de incluirse unas ecuaciones de restricción que las relacione.

$$\mathbf{q}_i^T = [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]$$

$$\mathbf{q}_d^T = [\theta_5 \ \theta_6]$$

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_i^T \ \mathbf{q}_d^T]$$



Coordenadas dependientes

El número de coordenadas dependientes puede ser seleccionado por el analista en función de los resultados que quiera obtener y por tanto no existe una regla fija.

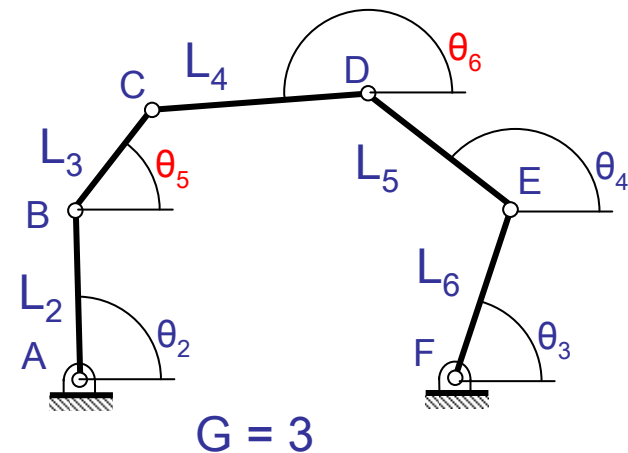
Sin embargo, cuando se emplean coordenadas dependientes es necesario ligarlas con las coordenadas independientes a través de lo que se conoce como ecuaciones de restricción. Estas ecuaciones de restricción deben ser introducidas en la formulación del problema cinemático.

Ecuaciones de restricción:

$$\mathbf{q}_i^T = [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]$$

$$\mathbf{q}_d^T = [\theta_5 \ \theta_6]$$

$$\begin{cases} \Phi_1(q_i, q_d) \\ \Phi_2(q_i, q_d) \end{cases} = \Phi(q) = 0$$



Ecuaciones de restricción

Por tanto, el número de ecuaciones de restricción en un problema cinemático es igual al número de coordenadas dependientes empleadas. Estas restricciones dan lugar a un sistema de ecuaciones no lineal, más difícil de resolver cuantas más ecuaciones contenga.

Las ecuaciones de restricción pueden clasificarse en 2 tipos:

- Restricciones en los elementos: En elementos rígidos se establecen normalmente como condición de longitud constante.
- Restricciones en los pares cinemáticos: Son ecuaciones que permiten el movimiento relativo en los grados de libertad del par cinemático y restringen el resto de movimientos.

Ecuaciones de restricción

Ecuaciones de restricción en los elementos

Plano

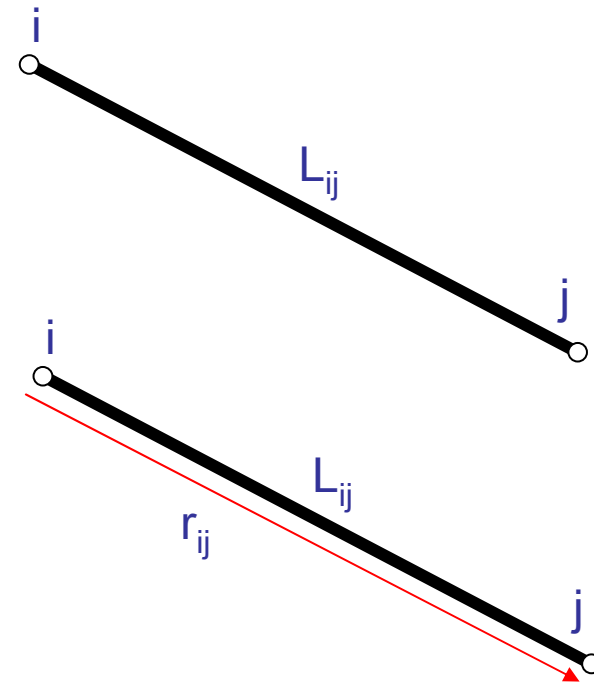
$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - L_{ij}^2 = 0$$

Espacio

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - L_{ij}^2 = 0$$

Otra forma de representarlo (producto escalar):

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} - L_{ij}^2 = 0$$



Ecuaciones de restricción

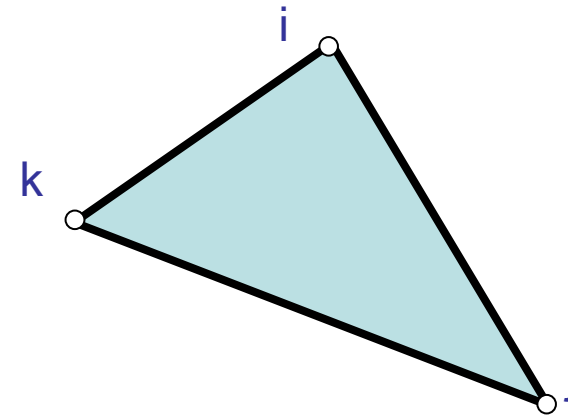
Ecuaciones de restricción en los elementos

Elemento con tres puntos (pares cinemáticos) no alineados:

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} - L_{ij}^2 = 0; \quad (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - L_{ij}^2 = 0$$

$$\mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_{ik} - L_{ik}^2 = 0; \quad (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 - L_{ik}^2 = 0$$

$$\mathbf{r}_{kj} \cdot \mathbf{r}_{kj} - L_{kj}^2 = 0; \quad (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 - L_{kj}^2 = 0$$



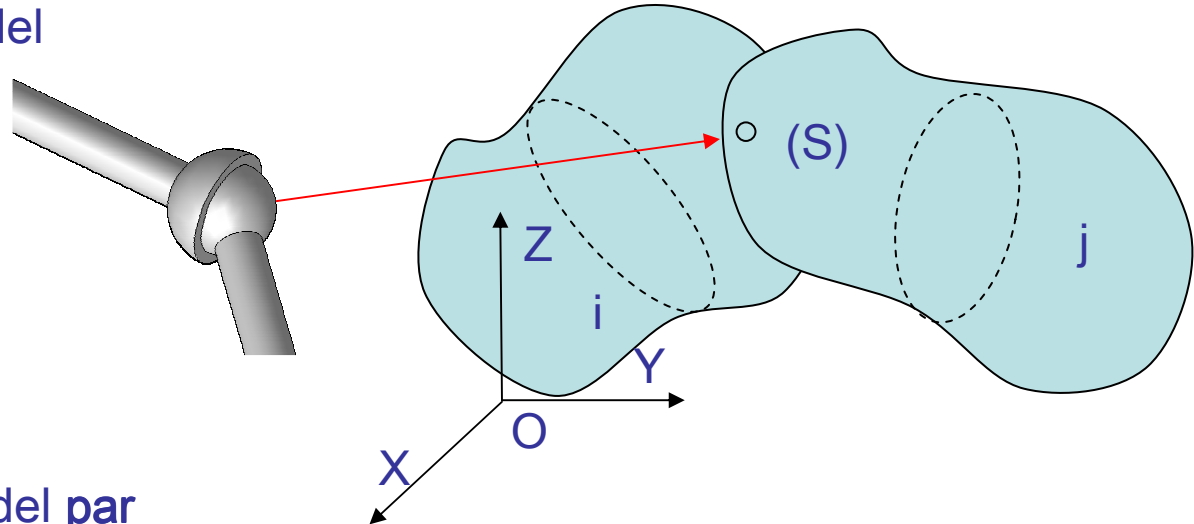
Se puede seguir aumentando el número de puntos (pares cinemáticos) en el elemento incluyendo nuevas ecuaciones de restricción.

Ecuaciones de restricción

Ecuaciones de restricción en los pares cinemáticos

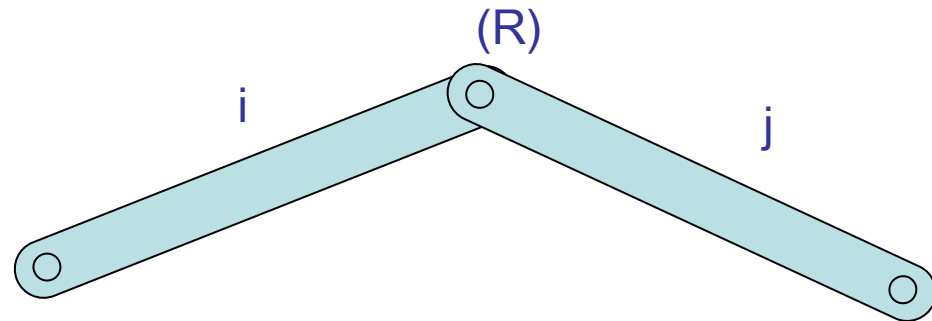
Ecuaciones de restricción del par esférico (S):

$$\left. \begin{aligned} x_i - x_j &= 0 \\ y_i - y_j &= 0 \\ z_i - z_j &= 0 \end{aligned} \right\}$$



Ecuaciones de restricción del par de revolución (R):

$$\left. \begin{aligned} x_i - x_j &= 0 \\ y_i - y_j &= 0 \end{aligned} \right\}$$

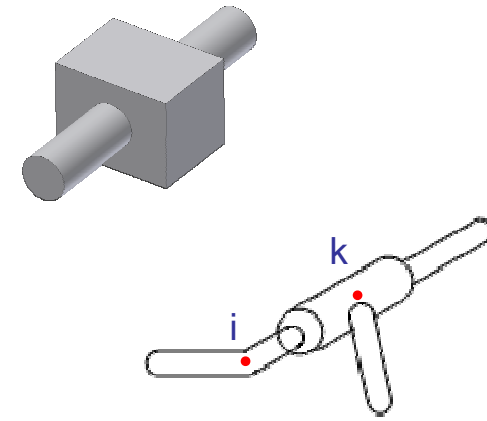
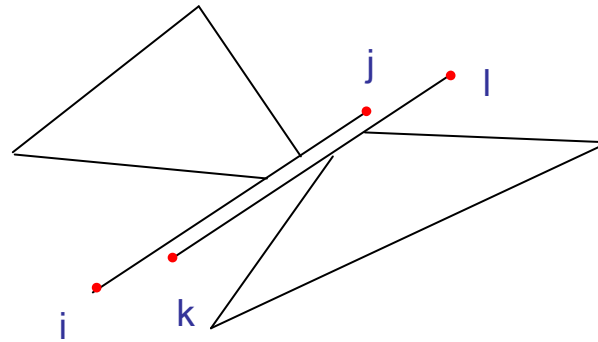


Ecuaciones de restricción

Ecuaciones de restricción en los pares cinemáticos

Ecuaciones de restricción del par cilíndrico (C):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^{ij} \times \mathbf{r}^{ik} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}^{kl} \times \mathbf{r}^{kj} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\}$$



En el par cilíndrico es necesario garantizar que existe un eje común en los dos elementos. La primera ecuación implica que los puntos i,j,k están alineados y la segunda ecuación implica que también lo están k,l,j.

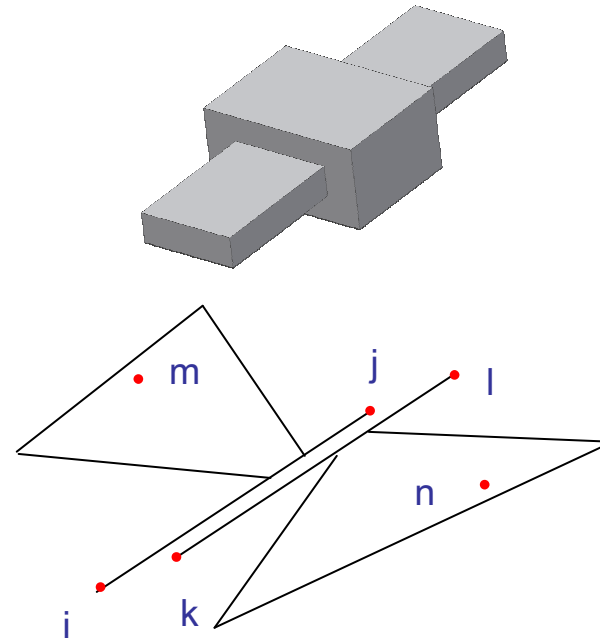
Ecuaciones de restricción

Ecuaciones de restricción en los pares cinemáticos

Ecuaciones de restricción del par prismático (P):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^{ij} \times \mathbf{r}^{ik} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}^{kl} \times \mathbf{r}^{kj} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} + \left. \begin{aligned} \mathbf{r}^{im} \cdot \mathbf{r}^{jn} - \alpha_1 &= 0 \\ \mathbf{r}^{im} \cdot \mathbf{r}^{kn} - \alpha_2 &= 0 \\ \mathbf{r}^{im} \cdot \mathbf{r}^{ln} - \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Cilíndrico + prismático
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: constantes del producto escalar



En el par prismático las restricciones son las mismas que en el cilíndrico pero además es necesario garantizar que el ángulo relativo entre los elementos no se modifica.

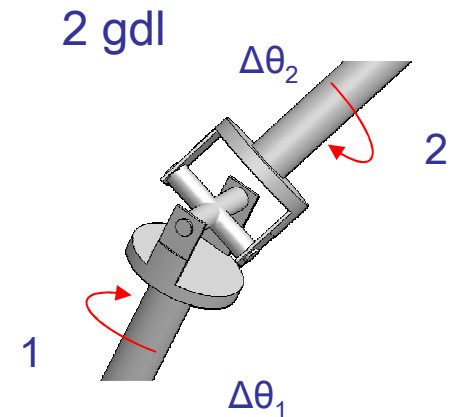
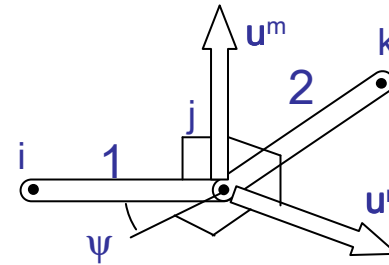
Ecuaciones de restricción

Ecuaciones de restricción en los pares cinemáticos

Ecuaciones de restricción de la Junta Cardan o Universal:

$$\left. \begin{aligned} x_{1j} - x_{2j} &= 0 \\ y_{1j} - y_{2j} &= 0 \\ z_{1j} - z_{2j} &= 0 \end{aligned} \right\} + \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^n = 0 \}$$

Esférico + cardan



Si además fuese necesario mantener el ángulo Ψ constante:

$$\left. \mathbf{r}^{ij} \cdot \mathbf{r}^{jk} - L_{ij} L_{jk} \cos \Psi = 0 \right\}$$

Tipos de coordenadas

Los tipos de coordenadas que se pueden emplear son las siguientes:

1. Coordenadas relativas.
2. Puntos de referencia.
3. Coordenadas cartesianas.
4. Combinación.

La selección de unas u otras tiene una gran importancia ya que, dependiendo del caso, conducen a una formulación más sencilla o complicada del problema.

En algunos casos se seleccionan aquellas coordenadas que coinciden con el elemento matriz de entrada.

Ejemplo: Motor -> ángulo girado.
Actuador lineal -> desplazamiento.

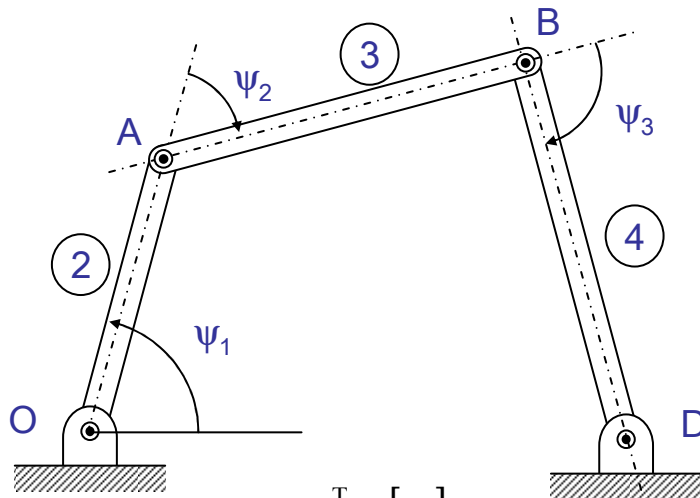
Tipos de coordenadas

Coordenadas relativas

Las coordenadas relativas definen la posición de cada elemento relativa con respecto al elemento anterior.

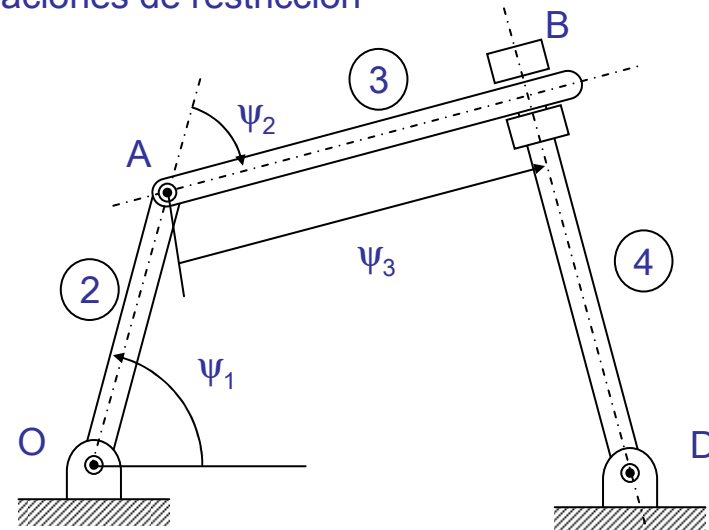
1 gdl

2 coord. dependientes = 2 ecuaciones de restricción



$$\mathbf{q}_i^T = [\psi_1]$$

$$\mathbf{q}_d^T = [\psi_2 \ \psi_3]$$



$$\mathbf{q}_i^T = [\psi_1]$$

$$\mathbf{q}_d^T = [\psi_2 \ \psi_3]$$

$$\Phi(q) = \left\{ \begin{array}{l} L_1 \cos \psi_1 + L_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) - \mathbf{OD} = 0 \\ L_1 \sin \psi_1 + L_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Phi(q) = \left\{ \begin{array}{l} L_1 \cos \psi_1 + \psi_3 \cos(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 - \pi/2) - \mathbf{OD} = 0 \\ L_1 \sin \psi_1 + \psi_3 \sin(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 - \pi/2) = 0 \end{array} \right\}$$

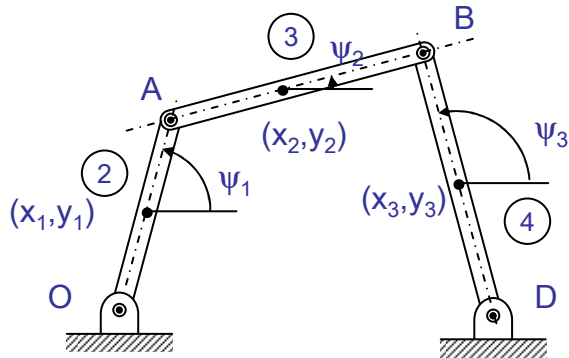
Tipos de coordenadas

Puntos de referencia

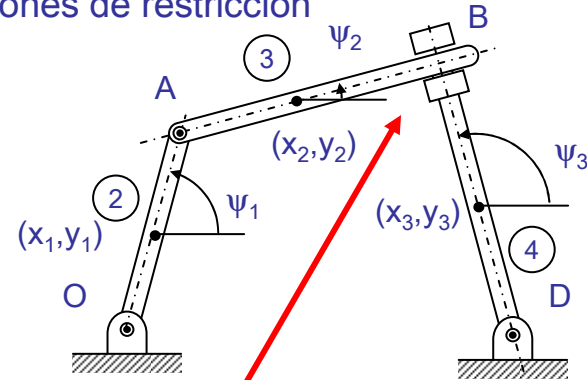
Las coordenadas basadas en puntos de referencia consideran las coordenadas de un punto en cada elemento y un ángulo.

1 gdl

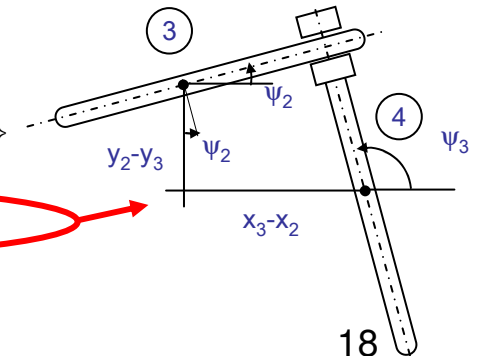
8 coord. dependientes = 8 ecuaciones de restricción



$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} (x_1 - x_0) - L_1/2 \cos \psi_1 \\ (y_1 - y_0) - L_1/2 \sin \psi_1 \\ (x_2 - x_1) - L_1/2 \cos \psi_1 - L_2/2 \cos \psi_2 \\ (y_2 - y_1) - L_1/2 \sin \psi_1 - L_2/2 \sin \psi_2 \\ (x_3 - x_2) - L_2/2 \cos \psi_2 - L_3/2 \cos \psi_3 \\ (y_3 - y_2) - L_2/2 \sin \psi_2 - L_3/2 \sin \psi_3 \\ (x_3 - x_D) - L_3/2 \cos \psi_3 \\ (y_3 - y_D) - L_3/2 \sin \psi_3 \end{cases}$$



$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} (x_1 - x_0) - L_1/2 \cos \psi_1 \\ (y_1 - y_0) - L_1/2 \sin \psi_1 \\ (x_2 - x_1) - L_1/2 \cos \psi_1 - L_2/2 \cos \psi_2 \\ (y_2 - y_1) - L_1/2 \sin \psi_1 - L_2/2 \sin \psi_2 \\ \psi_2 - \psi_3 - \pi/2 \\ (y_3 - y_2) \cos \psi_2 + (x_3 - x_2) \sin \psi_2 - L_3/2 \\ (x_3 - x_D) - L_3/2 \cos \psi_3 \\ (y_3 - y_D) - L_3/2 \sin \psi_3 \end{cases}$$

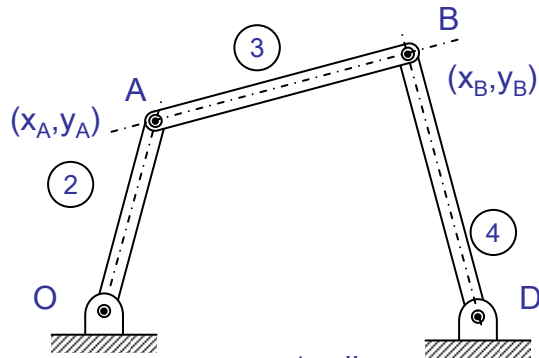


Tipos de coordenadas

Coordenadas cartesianas

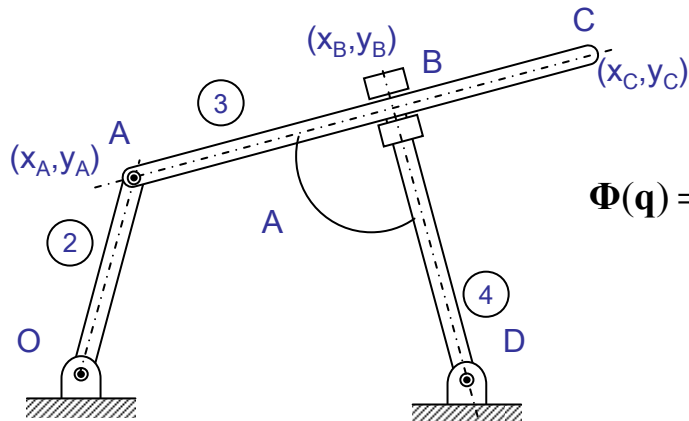
La posición del mecanismo se define a través de coordenadas cartesianas de ciertos puntos de interés.

1 gdl
3 coord. dependientes = 3 ecuaciones de restricción



$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} (x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 - L_2^2 = 0 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - L_3^2 = 0 \\ (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 - L_4^2 = 0 \end{cases}$$

1 gdl
5 coord. dependientes = 5 ecuaciones de restricción



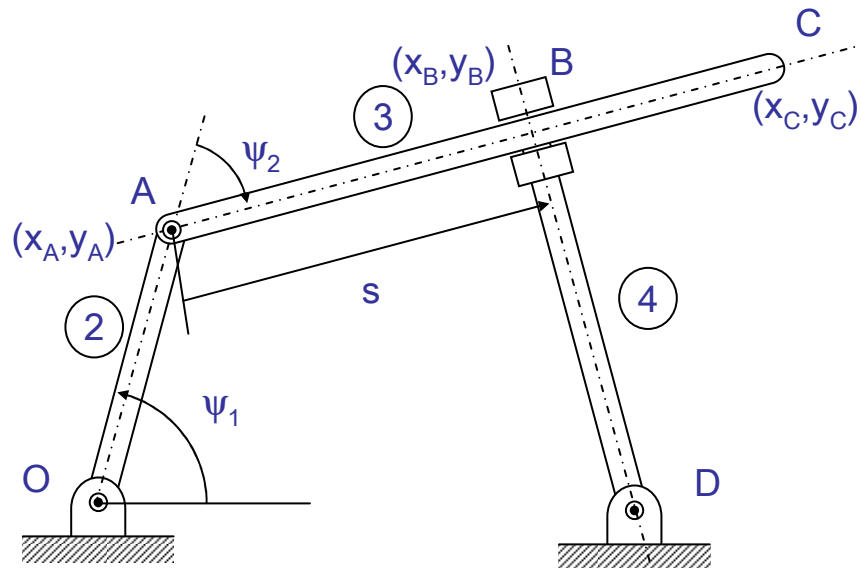
$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} (x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 - L_2^2 = 0 & \text{Longitud constante} \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - L_3^2 = 0 & \text{Longitud constante} \\ (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 - L_4^2 = 0 & \text{Longitud constante} \\ (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) & \text{Puntos alineados} \\ (x_C - x_A)(x_B - x_D) + (x_C - x_A)(x_B - x_D) - L_3 L_4 \cos \phi & \text{Producto escalar} \\ & \text{(ángulo } \phi \text{ constante)} \end{cases}$$

Tipos de coordenadas

Combinación

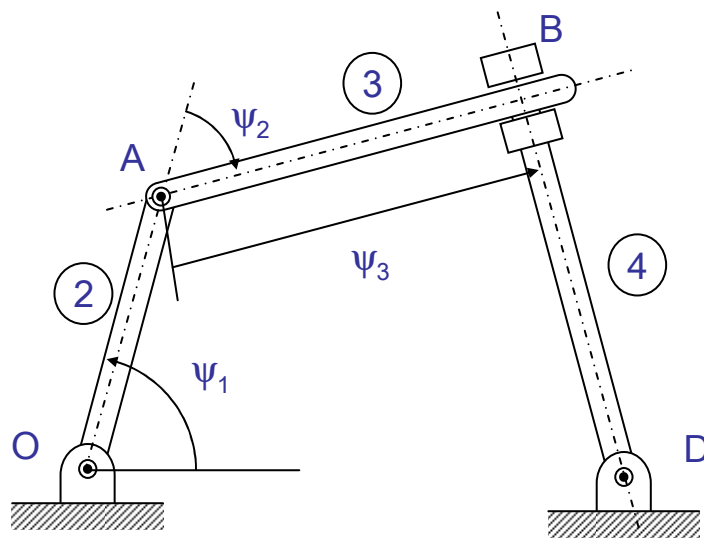
1 gdl

7 coord. dependientes = 7 ecuaciones de restricción



$$\Phi(\mathbf{q}) = \left\{ \begin{array}{l} (x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 - L_2^2 = 0 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - L_3^2 = 0 \\ (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 - L_4^2 = 0 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - s^2 = 0 \\ (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) \\ (x_C - x_A)(x_B - x_D) + (x_C - x_A)(x_B - x_D) - L_3 L_4 \cos \phi \\ (x_A - x_O)(x_C - x_A) + (y_A - y_O)(y_C - y_A) - L_2 L_3 \cos \psi \end{array} \right.$$

Tipos de coordenadas



1 gdl = 1 coord. Independiente = ecuación temporal.

$$\Phi_1(t) = \psi_1 - \omega t = 0$$

2 coord. dependientes = ecuaciones de restricción

$$\Phi_2(q) = \begin{cases} L_1 \cos \psi_1 + \psi_3 \cos(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 - \pi/2) - \mathbf{OD} = 0 \\ L_1 \sin \psi_1 + \psi_3 \sin(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 - \pi/2) = 0 \end{cases}$$

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: ψ_1, ψ_2, ψ_3 .

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \begin{Bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(\mathbf{q}) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

Capítulo III: Tema 3

Métodos numéricos de análisis cinemático

2. Determinación de la posición inicial.

Determinación de la posición inicial

El análisis de la posición en los métodos numéricos se basa en resolver un sistema de ecuaciones llamadas *ecuaciones de restricción*. Las cuales pueden ser expresadas de la siguiente manera,

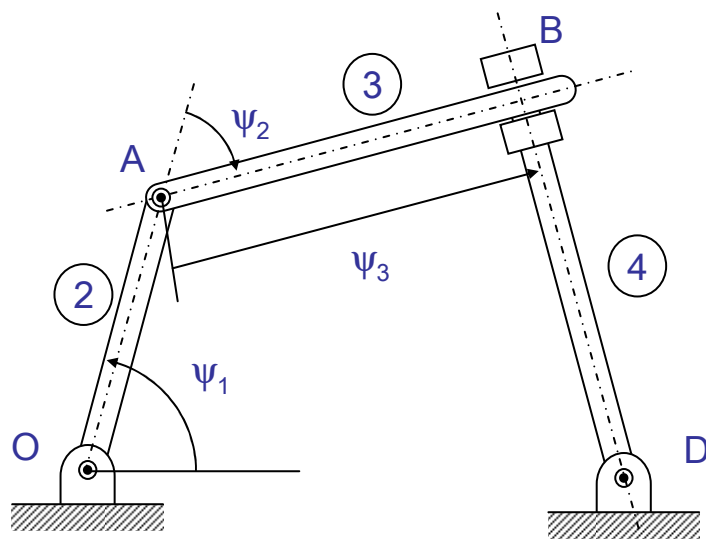
$$\Phi(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (1)$$

donde t representa la variable tiempo y \mathbf{q} es el vector de coordenadas que puede ser expresado como,

$$\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ \dots q_n] \quad (2)$$

Este es el vector de incógnitas. Entonces, el problema de obtener la posición del mecanismo consiste en resolver el sistema de ecuaciones (1) y obtener el valor de (2). Sin embargo, el sistema (1) puede ser un sistema no lineal, de difícil resolución.

Determinación de la posición inicial



1 gdl = 1 coord. Independiente = ecuación temporal.

$$\Phi_1(t) = \psi_1 - \omega t = 0$$

2 coord. dependientes = ecuaciones de restricción

$$\Phi_2(q) = \begin{cases} L_1 \cos \psi_1 + \psi_3 \cos(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 - \pi/2) - \mathbf{OD} = 0 \\ L_1 \sin \psi_1 + \psi_3 \sin(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 - \pi/2) = 0 \end{cases}$$

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: ψ_1, ψ_2, ψ_3 .

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \begin{Bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(\mathbf{q}) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

Determinación de la posición inicial

Resolver el sistema presentado en (1) supone recurrir a métodos numéricos para la resolución de sistemas de ecuaciones como puede ser Newton-Raphson. Este método se basa en la linealización del sistema (1) consistente en remplazar el sistema de ecuaciones por otro aproximado obtenido de aplicar el desarrollo en serie de Taylor. Dicho desarrollo se realiza alrededor de un vector de variables dependientes, \mathbf{q}_i , cuyo valor está cerca de la solución. Es decir, tomando los dos primeros términos del desarrollo se obtiene,

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \Phi(\mathbf{q}_i) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i)(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

donde la variable tiempo no se considera ya que en este caso se considera constante. La matriz $\Phi_{\mathbf{q}}$ es el Jacobiano del vector Φ .

Determinación de la posición inicial

En otras palabras, es la matriz de derivadas parciales de las ecuaciones de restricción respecto de las coordenadas dependientes. Esta matriz desarrollada tiene la siguiente forma,

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde m es el número de ecuaciones de restricción y n el número de coordenadas **generalizadas**. Si las ecuaciones de restricción son independientes se tiene que cumplir: G g.d.l. = n-m.

Determinación de la posición inicial

Por tanto, el sistema de ecuaciones presentado en (3) es un sistema lineal aproximado al sistema original pero no idéntico, la mayor o menor aproximación dependerá del mayor o menor grado de linealidad del sistema (1). Entonces, el valor de las coordenadas dependientes, \mathbf{q} , obtenidas de (3) será también aproximado.

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (1)$$

Sistema original (ecuaciones algebraicas NO lineales)

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \Phi(\mathbf{q}_i) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i)(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

Sistema aproximado
(ecuaciones algebraicas lineales)

Solución aproximada \longrightarrow $\mathbf{q} = \mathbf{q}_i + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i)^{-1} \Phi(\mathbf{q}_i)$

Determinación de la posición inicial

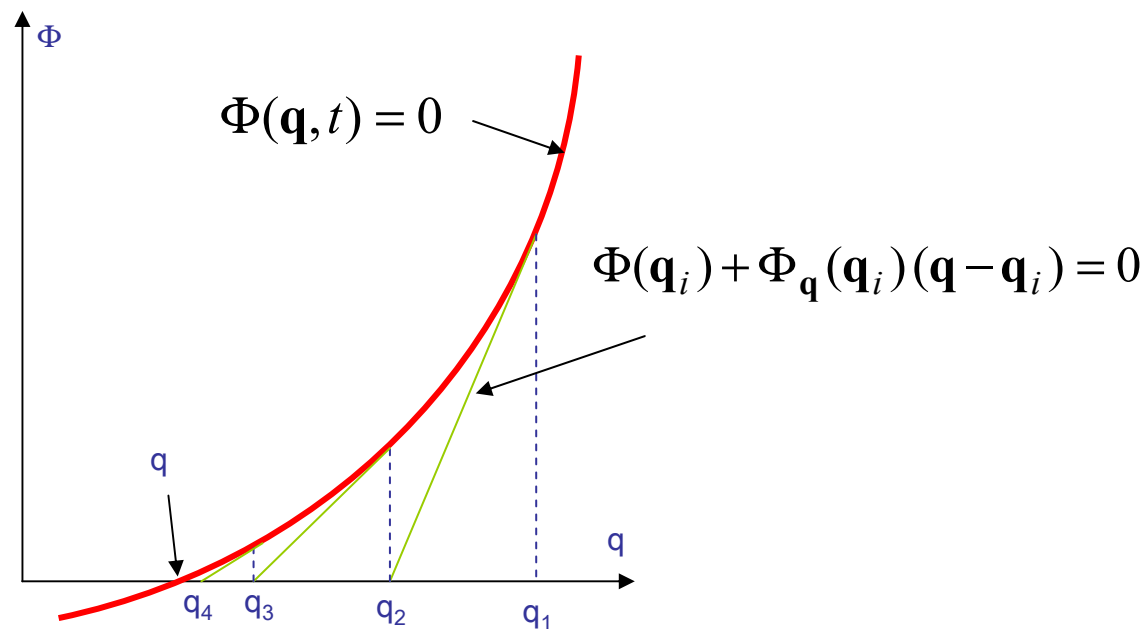
Si denominamos a esta solución q_j podemos emplear la siguiente fórmula recursiva para mejorar la solución,

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i)^{-1} \Phi(\mathbf{q}_i) \quad (5)$$

obteniendo q_{i+1} repetidamente hasta que el error del sistema de ecuaciones (1) sea insignificante, o hasta que la diferencia entre dos iteraciones sucesivas sea tan pequeña como un valor predefinido de tolerancia.

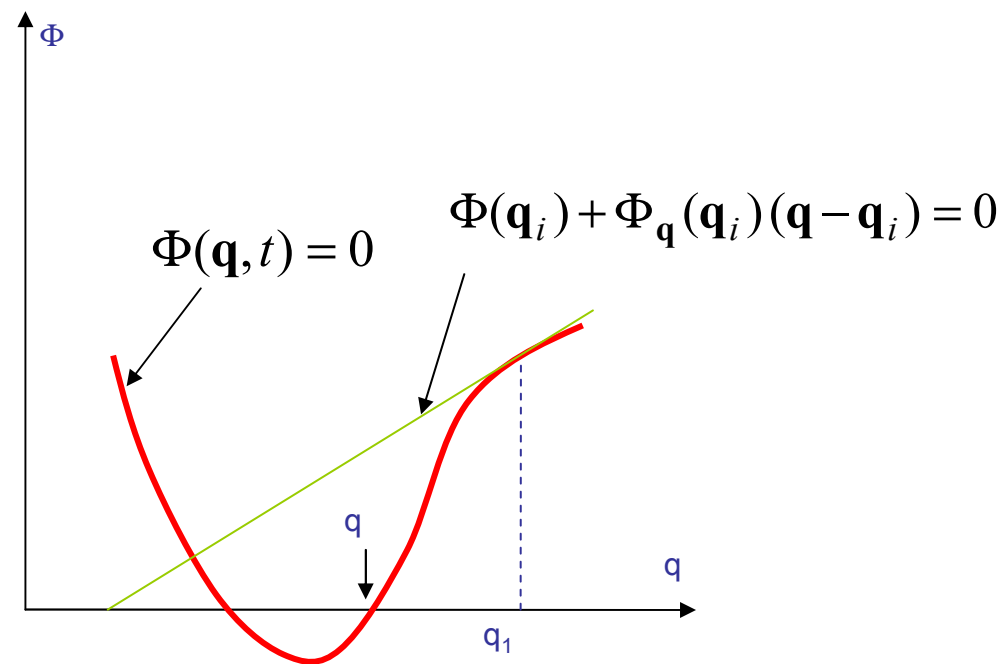
Determinación de la posición inicial

La figura se observa la representación geométrica del método de Newton-Raphson en el caso de una ecuación no lineal. La función $\Phi(\mathbf{q})$ es linealizada sucesivamente partiendo del valor q_0 obtenido del sistema lineal (3) y obteniendo sucesivos valores q_2, q_3 , etc. hasta que se alcance la convergencia.



Determinación de la posición inicial

Es importante resaltar que el método de Newton-Raphson puede no alcanzar la convergencia. Esto ocurre por ejemplo cuando el valor inicial de las coordenadas dependientes, q_1 , está lejos de la solución o cuando dicho valor no representa una solución física posible del problema.



Capítulo III: Tema 3

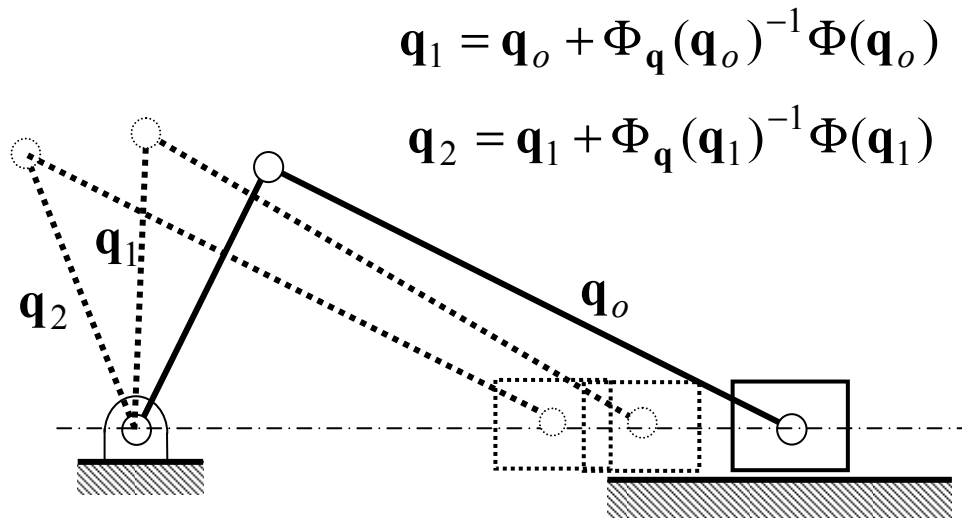
Métodos numéricos de análisis cinemático

3. Desplazamientos finitos.

Desplazamientos finitos

Este problema consiste en una vez determinada la posición inicial determinar la posición siguiente del mecanismo cuando sufre un incremento en la posición del elemento de entrada. Es decir, se debe calcular la nueva posición del mecanismo partiendo de la posición anterior.

Aquí se cuenta con una ayuda fundamental que consiste en conocer el valor de las coordenadas dependientes de una posición cercana, y por tanto, el valor de inicio de iteración presentara una elevada precisión. Evidentemente, esto sólo ocurre si el incremento de posición en el elemento de entrada es lo suficientemente pequeño.



Desplazamientos finitos

Si el problema de desplazamientos finitos se repite para distintos incrementos de posición del elemento de entrada se puede conocer el movimiento del mecanismo en un determinado rango, obteniendo de forma directa las trayectorias de los puntos cuyas coordenadas sean variables dependientes, y de forma indirecta las trayectorias de los otros puntos.

Capítulo III: Tema 3

Métodos numéricos de análisis cinemático

4. Determinación de las velocidades.

Análisis de velocidades

En este apartado se estudia como obtener las velocidades relacionadas con las coordenadas **generalizadas** seleccionadas. Es decir como obtener la derivada temporal de las coordenadas **generalizadas**,

$$\dot{q}$$

Como se ha visto en el problema de posición el valor de las coordenadas **generalizadas** q se obtiene en instantes discretos de tiempo y por tanto no se conoce una expresión matemática explícita que permita obtener las derivadas temporales de forma analítica.

Análisis de velocidades

Como se ha visto anteriormente, estas coordenadas se han introducido en una serie de ecuaciones denominadas de restricción con la siguiente forma,

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = 0$$

Se puede plantear como alternativa para el cálculo de las derivadas temporales un procedimiento de diferenciación en cadena partiendo del vector de ecuaciones de restricción. Esto es,

$$\dot{\Phi} = \Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = 0 \quad \text{Donde,} \quad \mathbf{q}(t)$$

donde Φ_t es la derivada del vector restricciones respecto del tiempo.

Análisis de velocidades

Reordenando, $\Phi_q \dot{q} + \Phi_t = 0$ Se obtiene,

$$\Phi_q \dot{q} = -\Phi_t = v$$

Si la matriz Φ_q es no singular esta ecuación representa un sistema de ecuaciones lineales que puede ser resuelta mediante procedimientos bien conocidos en análisis numérico. Una vez resuelta se obtienen las velocidades para valores discretos de tiempo. Es decir,

$$\dot{q} = -\Phi_q^{-1} \Phi_t$$

Expresión que nos ofrece las velocidades de las coordenadas **generalizadas**.

Capítulo III: Tema 3

Métodos numéricos de análisis cinemático

5. Determinación de las aceleraciones.

Análisis de aceleraciones

Para obtener los valores de aceleración el procedimiento seguido es similar al procedimiento de las velocidades. Se toma el vector de ecuaciones de restricción y se deriva dos veces respecto del tiempo según la regla de derivación en cadena,

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = 0 \quad \text{considerando,} \quad \mathbf{q}(t)$$

Derivada 1a

$$\dot{\Phi} = \Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = 0$$

Derivada 2a

$$\frac{d}{dt}(\Phi) = \frac{d}{dt}(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t) = 0$$

$$(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t)_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t) = 0$$

$$(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{t\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}t} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt} = 0$$

Análisis de aceleraciones

$$\ddot{\Phi} = \Phi_q \ddot{q} + (\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} + \Phi_{qt} \dot{q} + \Phi_{tq} \dot{q} + \Phi_{tt} = 0$$

Reordenando,

$$\Phi_q \ddot{q} = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt} \dot{q} - \Phi_{tt} = \gamma$$

Donde,

$$\gamma = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt} \dot{q} - \Phi_{tt}$$

Es un valor completamente conocido una vez resuelto el problema de velocidades. Entonces,

$$\Phi_q \ddot{q} = \gamma$$

Resulta ser un sistema de ecuaciones lineal que puede ser resuelto fácilmente mediante procedimientos habituales.