



# Capítulo VI

## VI.2 Engranajes cilíndricos

# Capítulo VI

## Engranajes

VI.1 Introducción a los engranajes.

VI.2 Engranajes cilíndricos.

- Engranajes con perfil de evolvente.
- Espesor del diente.
- Relación de contacto.
- Generación.
- Interferencia.
- Ruedas corregidas.

VI.3 Otros tipos de engranajes.

VI.4 Trenes de engranajes.

# Capítulo VI: Tema 2

## Engranajes cilíndricos

1. Engranajes con perfil de evolvente.
  1. Engranajes con perfil de evolvente.
  2. Propiedades del perfil de evolvente.
2. Espesor del diente.
3. Relación de contacto.
4. Generación.
  1. Útiles de forma.
  2. Generación con cremallera.
  3. Generación con piñón.
5. Interferencia.
  1. Interferencia de tallado con cremallera.
  2. Interferencia de tallado con piñón.
  3. Interferencia de funcionamiento en ruedas talladas con cremallera.
  4. Interferencia de funcionamiento en ruedas talladas con piñón.
6. Ruedas corregidas.

# Capítulo VI: Tema 2

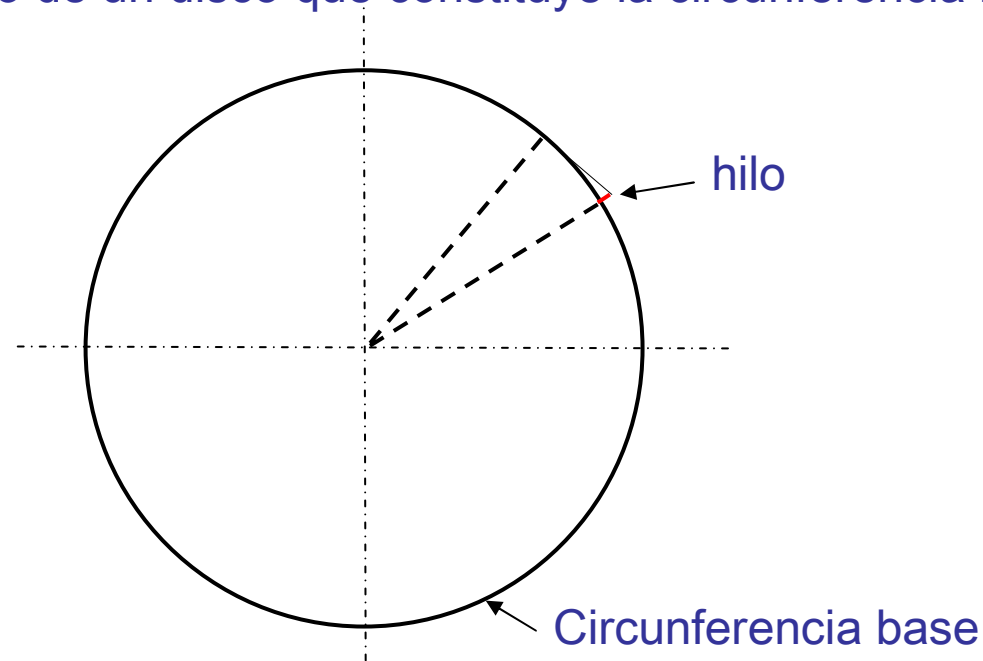
## Engranajes cilíndricos

1. Engranajes con perfil de evolvente.
  1. Engranajes con perfil de evolvente.
  2. Propiedades del perfil de evolvente.

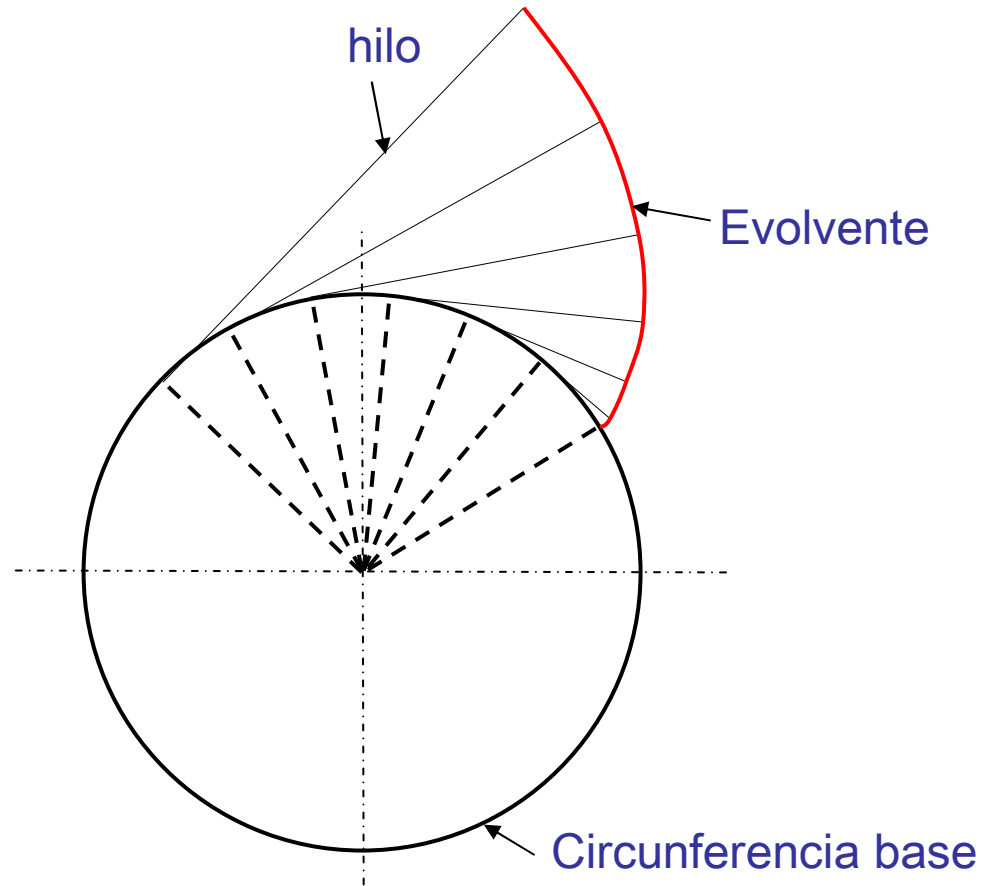
# Engranajes con perfil de evolvente

La evolvente es una curva tal que el lugar geométrico de sus centros de curvatura es una circunferencia. A dicha circunferencia se la denomina circunferencia base.

Intuitivamente es la trayectoria que describe es punto extremo de un hilo al ser desenrollado de un disco que constituye la circunferencia base.



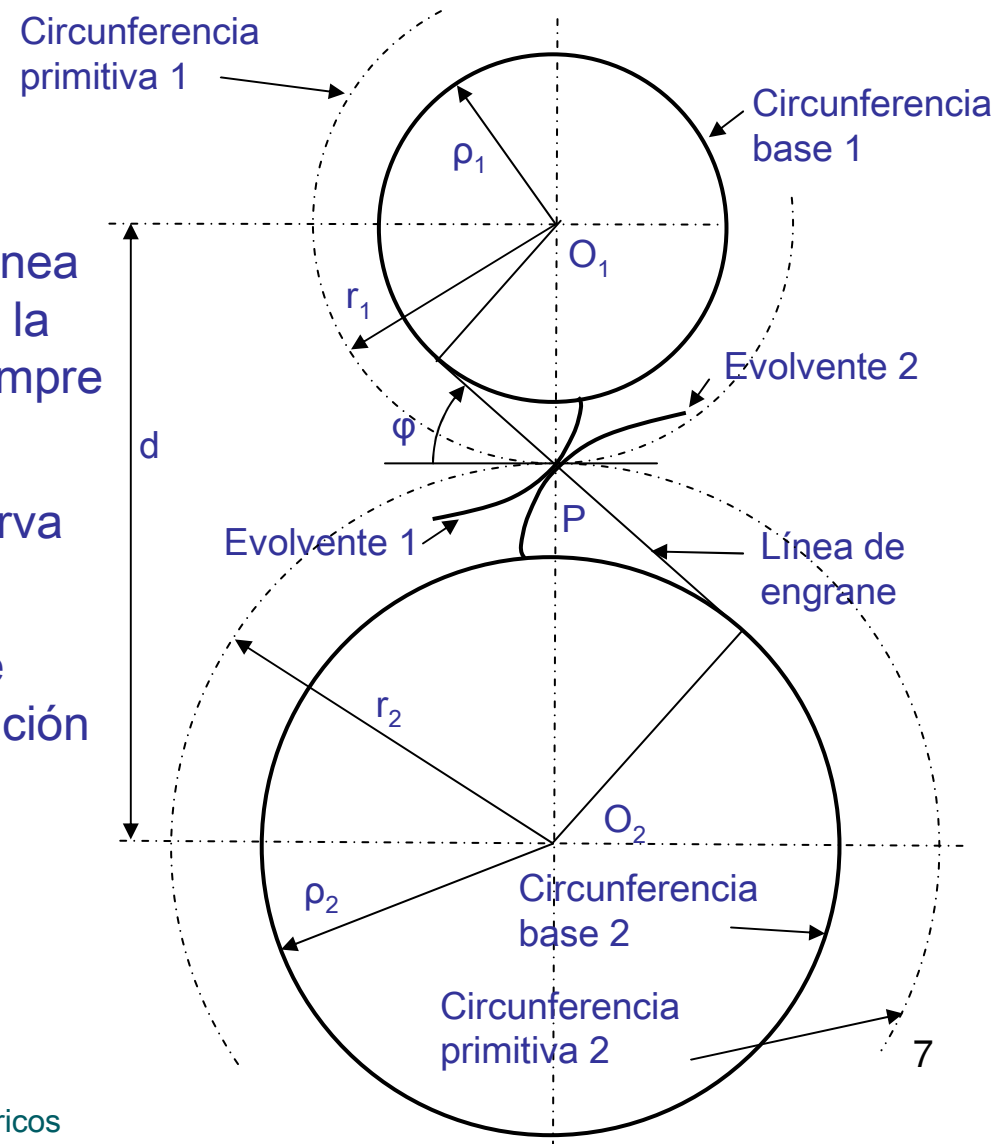
# Engranajes con perfil de evolvente



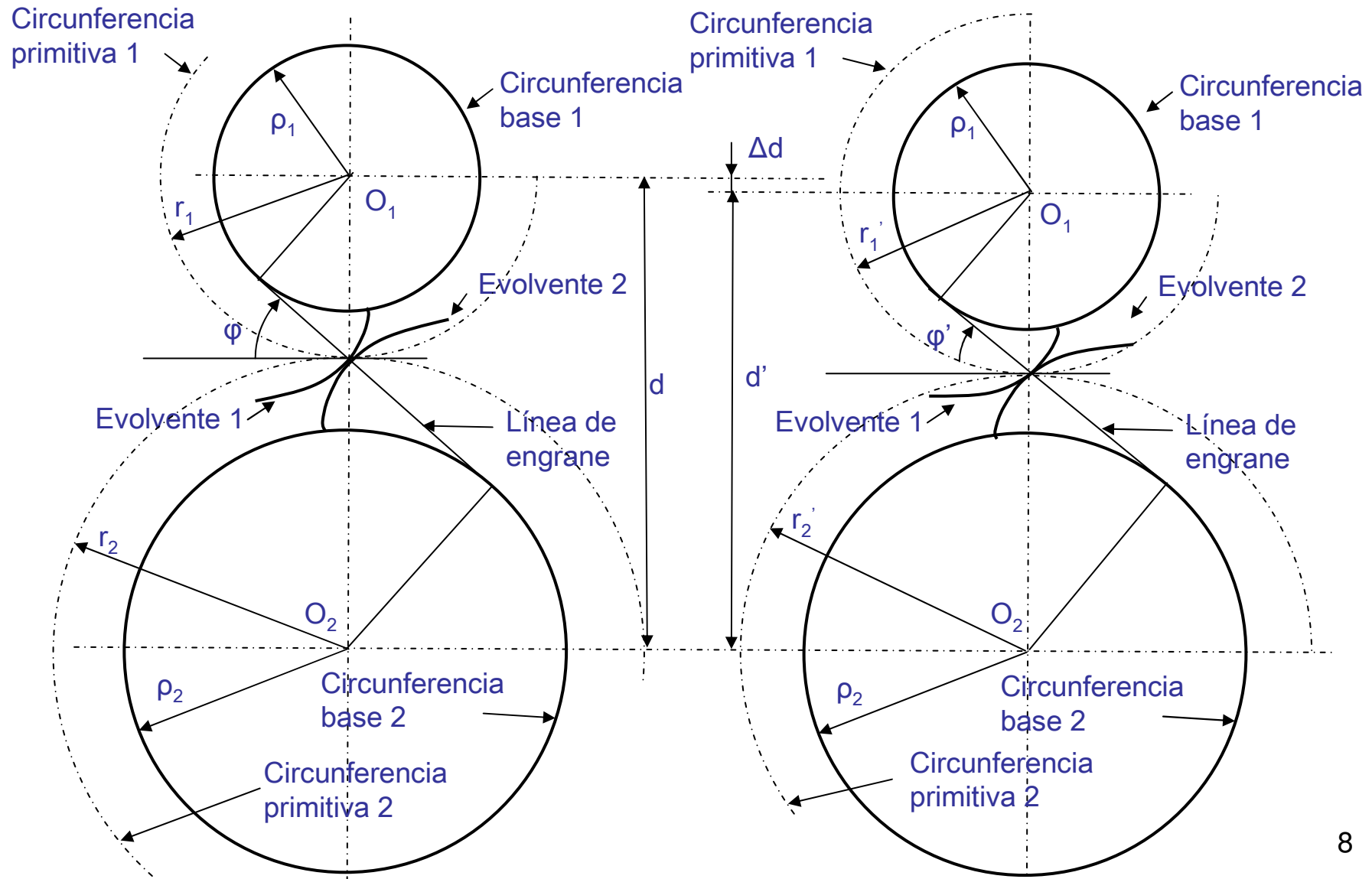
# Engranajes con perfil de evolvente

## Propiedades:

1. La línea de engrane es una línea recta: lo que quiere decir que la fuerza entre dientes tiene siempre la misma dirección.
2. El perfil conjugado de una curva evolvente es otra evolvente.
3. Al modificar la distancia entre centros no se modifica la relación de transmisión.
4. Los engranajes con perfil de evolvente son relativamente fáciles de fabricar.



# Engranajes con perfil de evolvente





# Engranajes con perfil de evolvente

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= r_1 \cos \varphi \\ \rho_2 &= r_2 \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= r_1' \cos \varphi' \\ \rho_2 &= r_2' \cos \varphi' \end{aligned} \right\}$$

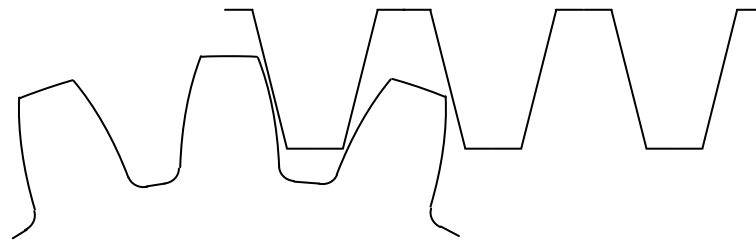
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{r_1}{r_2} = \mu$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{r_1'}{r_2'}$$

$$\boxed{\frac{r_1'}{r_2'} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \mu}$$

# Engranajes con perfil de evolvente

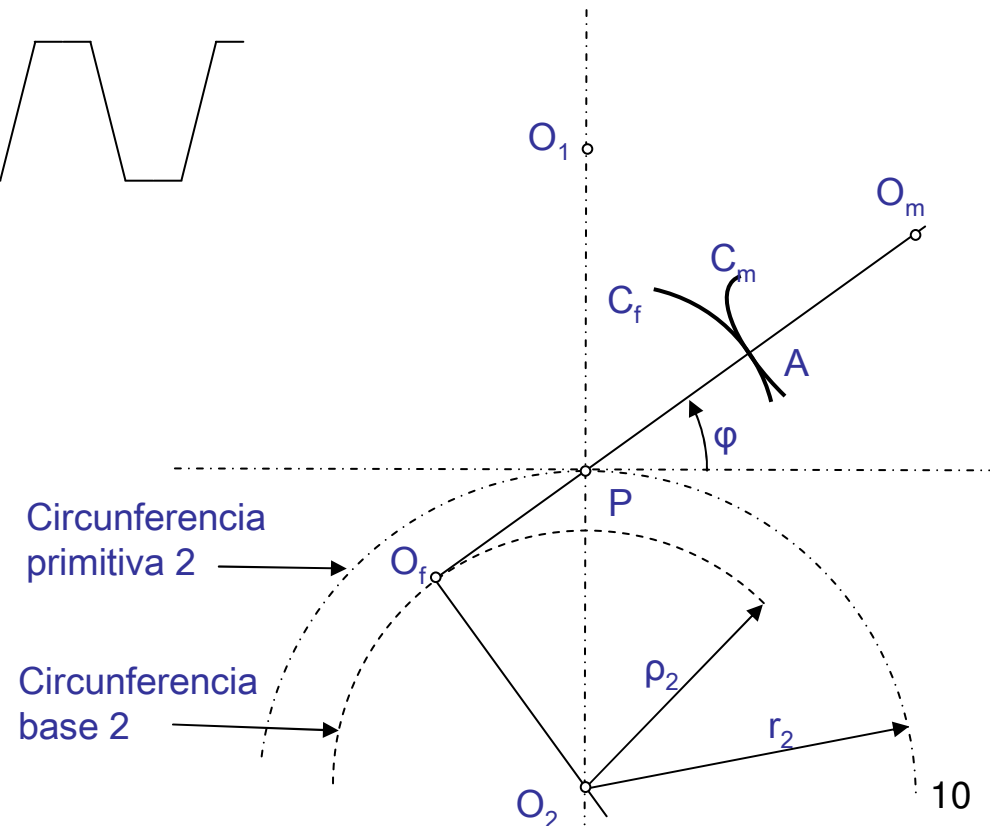
El perfil conjugado de una evolvente, cuando el diámetro primitivo de la otra rueda es infinito, es una línea recta.



$$\left( \frac{1}{O_f P} + \frac{1}{P O_m} \right) \text{sen}(180 - \varphi) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

$$\left( \frac{1}{O_f P} + \frac{1}{\infty} \right) \text{sen}(180 - \varphi) = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{r_2}$$

$$O_f P = r_2 \text{sen} \varphi$$



# Propiedades analíticas del perfil de evolvente

$$\overline{AT} = \rho \tan \psi$$

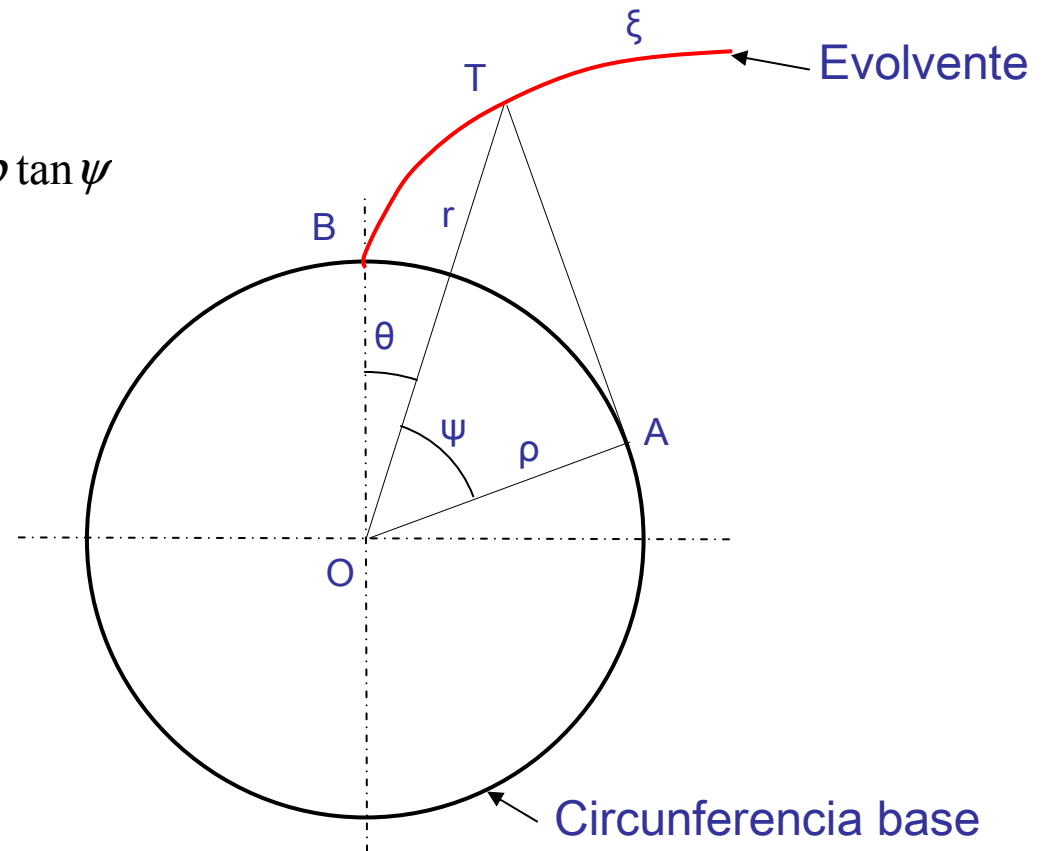
$$\widehat{BA} = (\psi + \theta)\rho = \overline{AT} = \rho \tan \psi$$

$$(\psi + \theta) = \tan \psi$$

$$\theta = \tan \psi - \psi$$

$$E_v(\psi) = \tan \psi - \psi$$

Función de evolvente

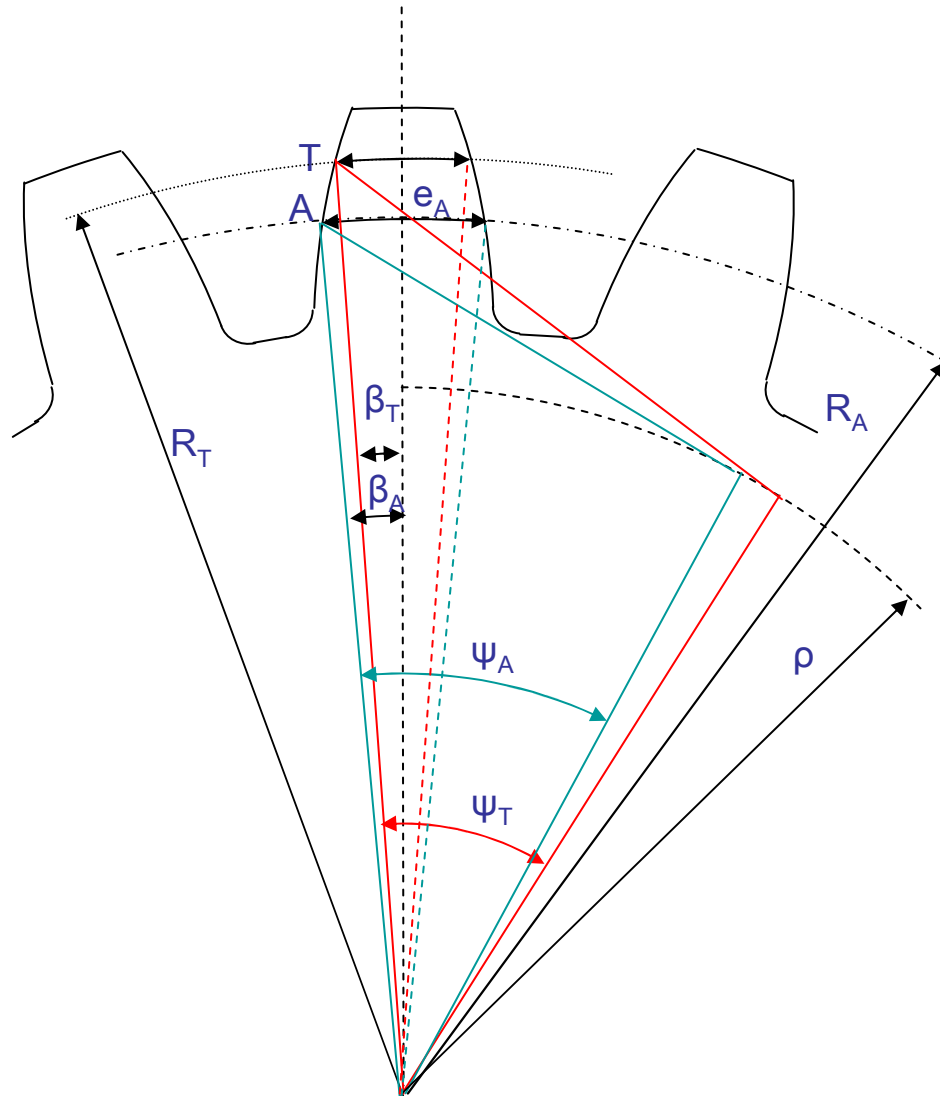


# Capítulo VI: Tema 2

## Engranajes cilíndricos

### 2. Espesor del diente.

# Espesor del diente

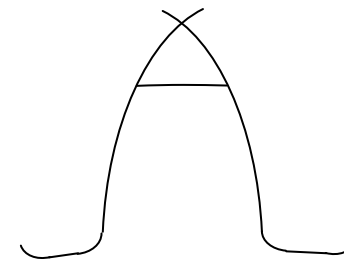


$$e_A = 2R_A \beta_A$$

$$e_T = 2R_T \beta_T = 2R_T [\beta_A + E_v(\psi_A) - E_v(\psi_T)]$$

$$\beta_A = \frac{e_A}{2R_A}$$

$$e_T = R_T \left[ \frac{e_A}{R_A} + 2 [ E_v(\psi_A) - E_v(\psi_T) ] \right]$$

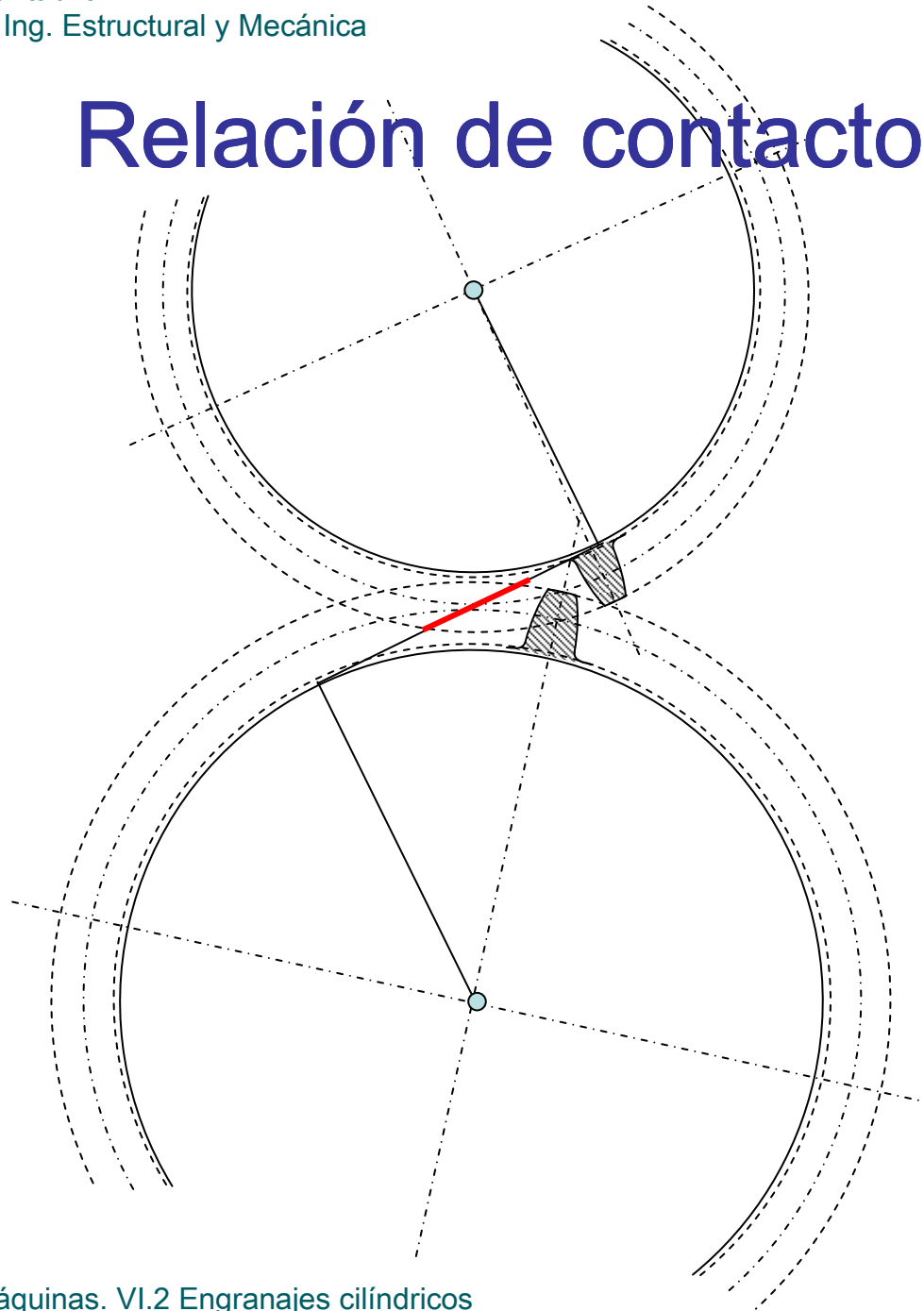


# Capítulo VI: Tema 2

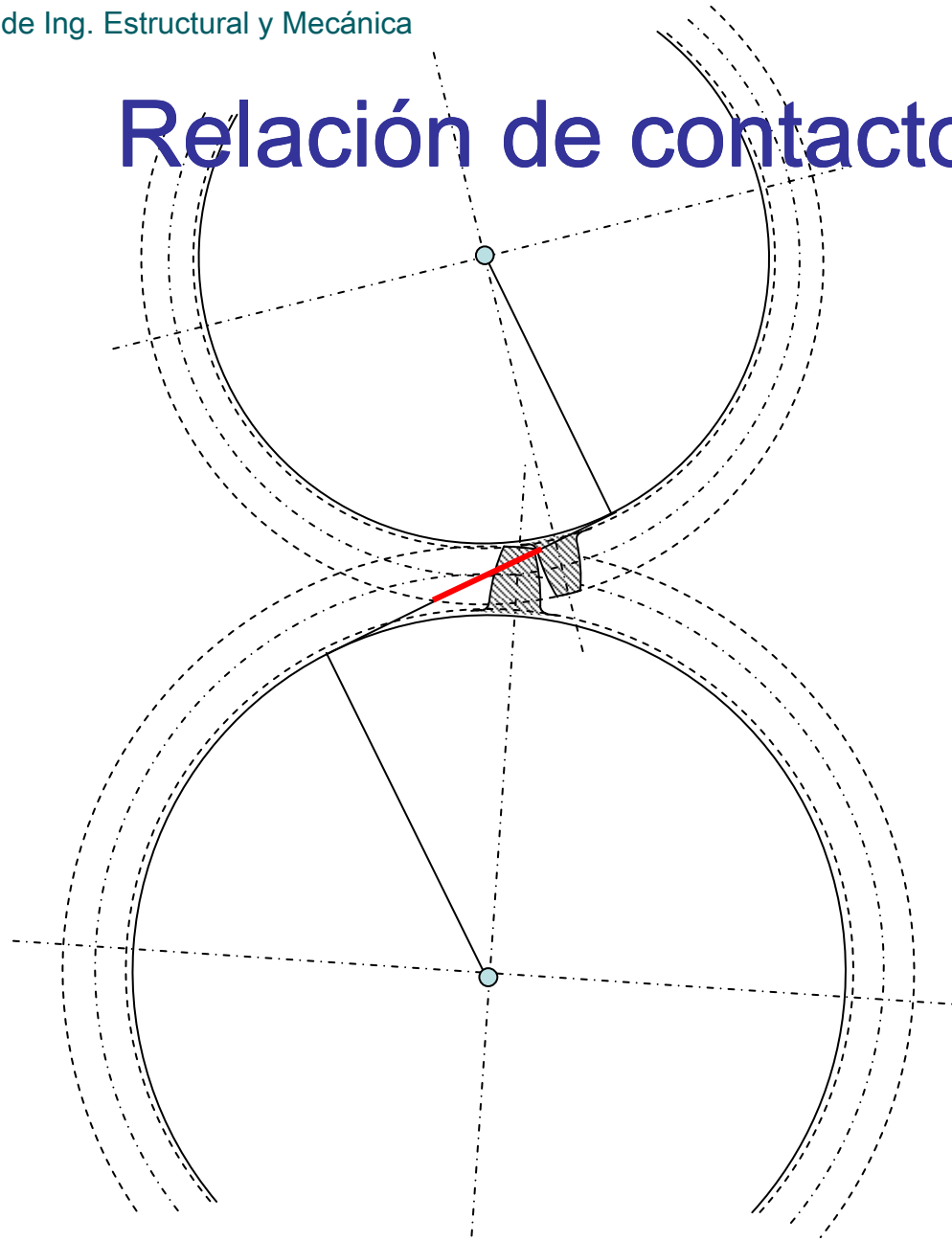
## Engranajes cilíndricos

### 3. Relación de contacto.

# Relación de contacto

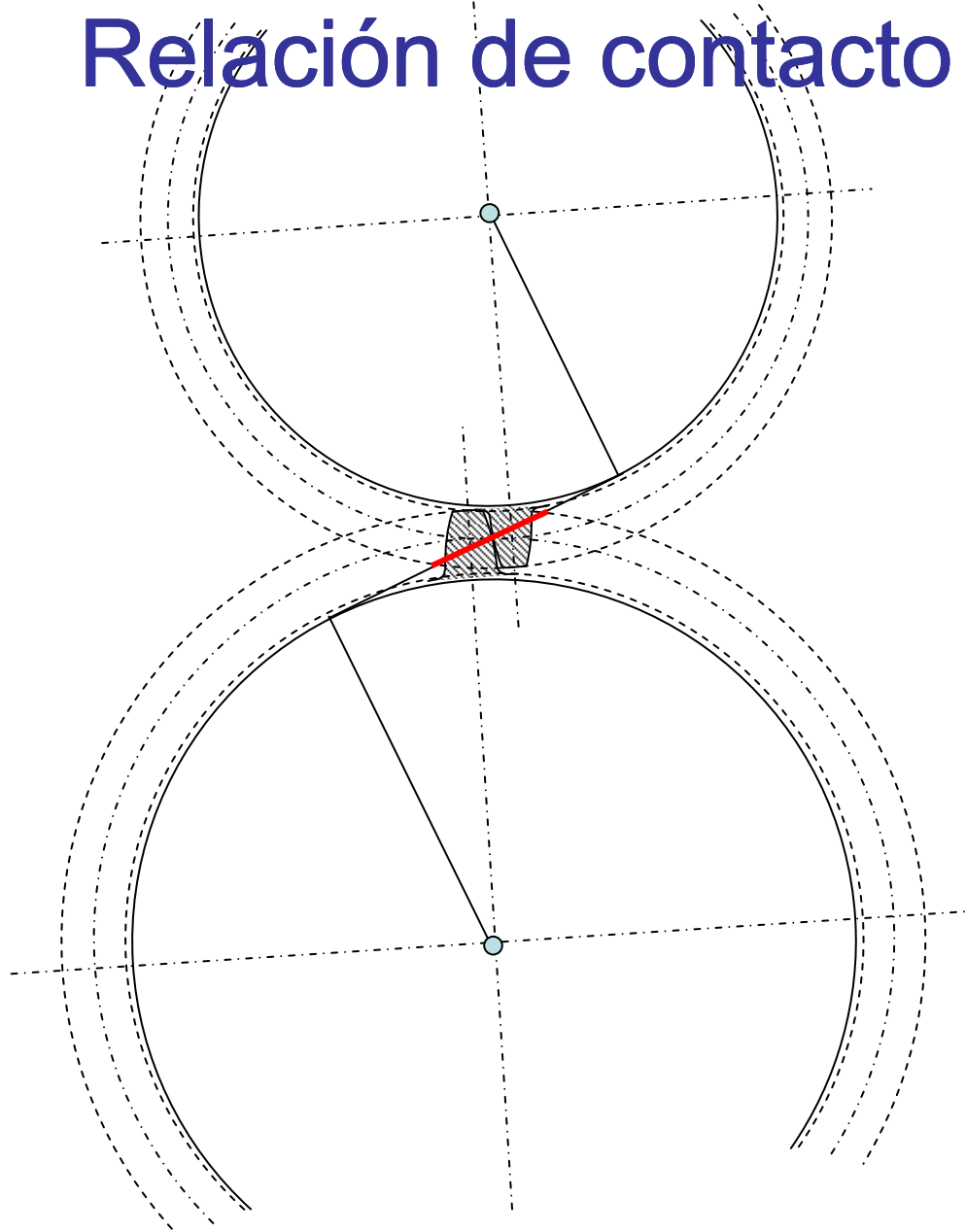


# Relación de contacto

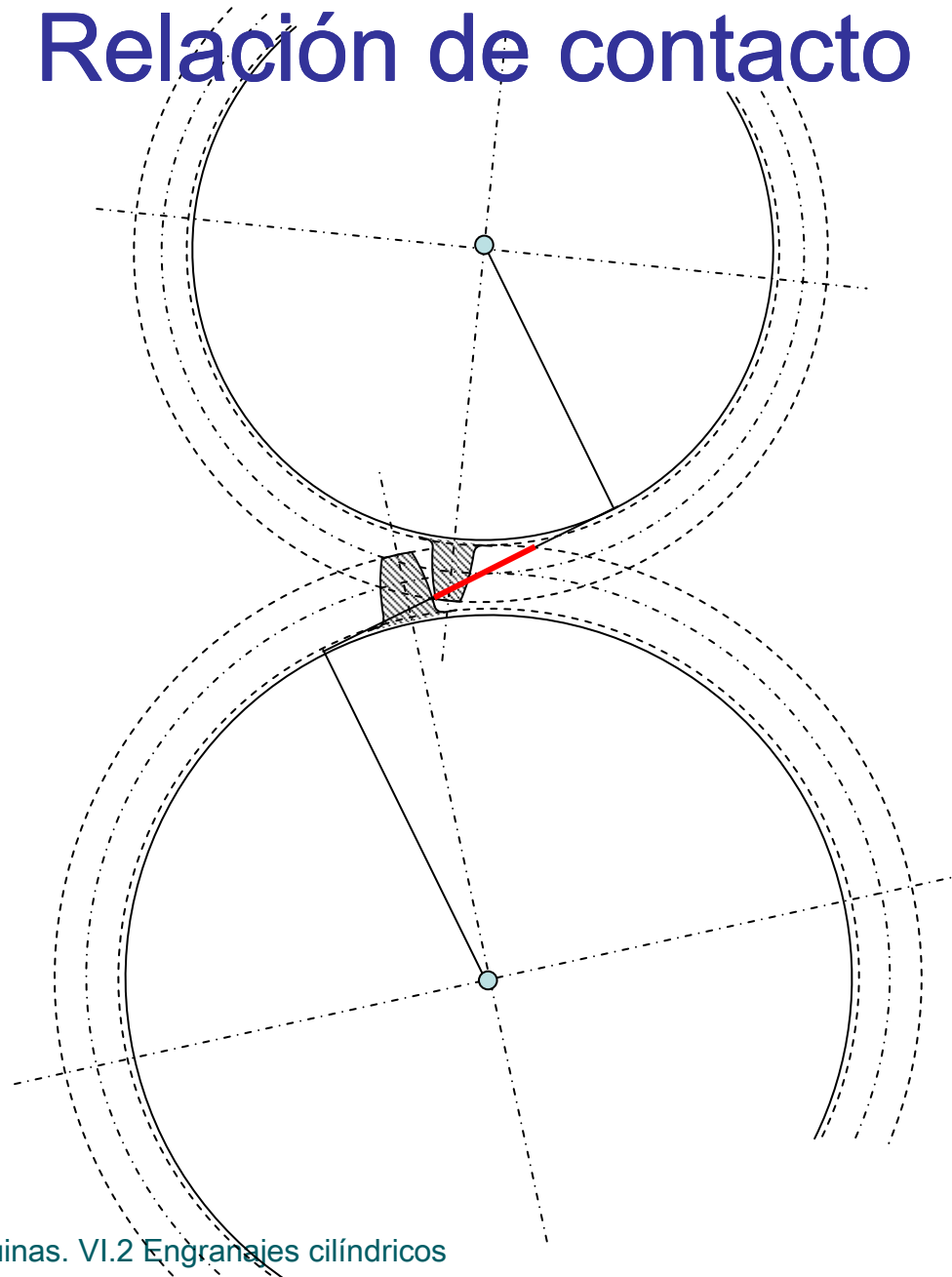




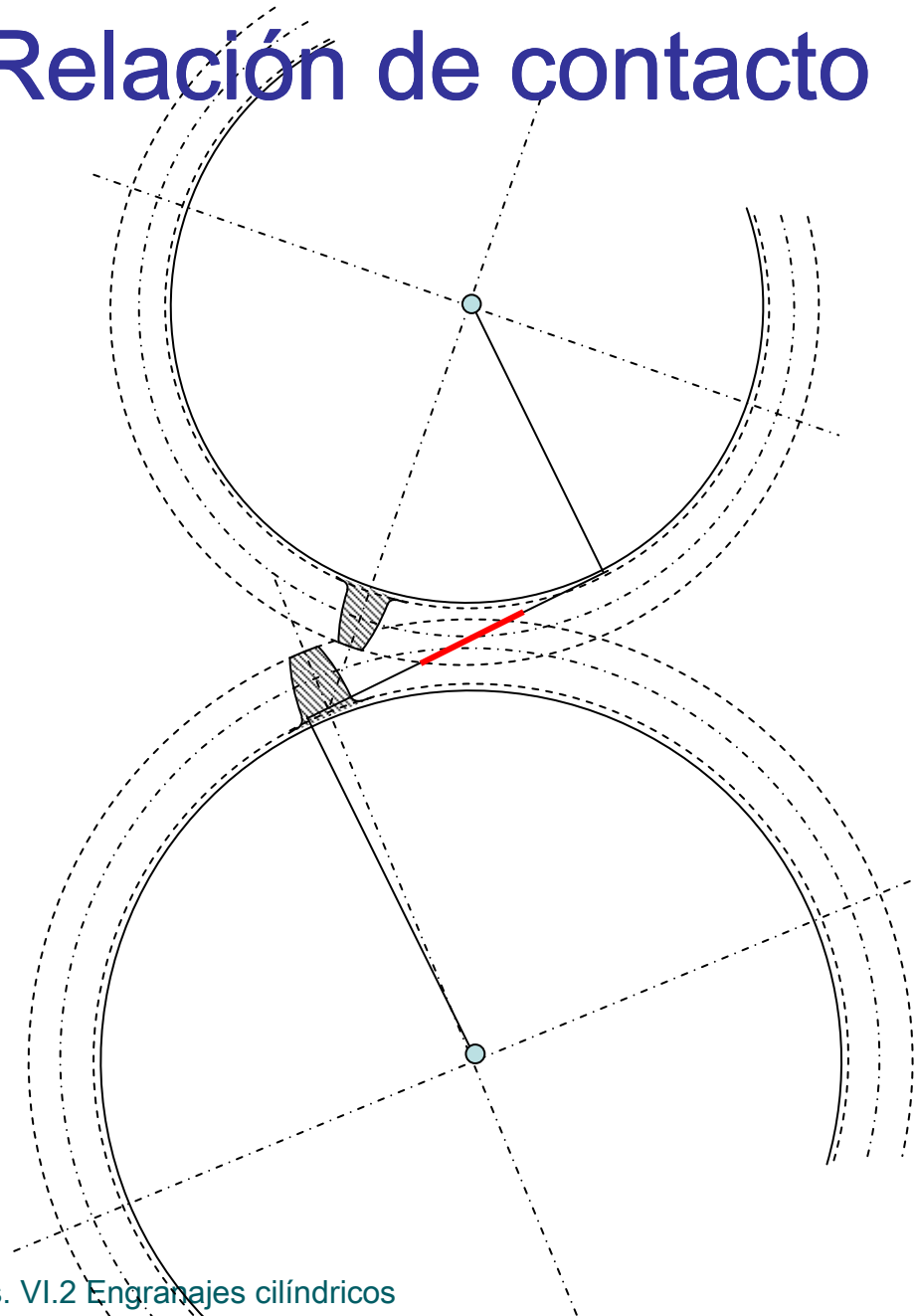
# Relación de contacto



# Relación de contacto



# Relación de contacto



# Relación de contacto

Longitud del arco de conducción ( $q_t$ ): es el arco que recorre el perfil del diente sobre la circunferencia primitiva entre el principio y el final del contacto con el perfil conjugado.

Relación de contacto ( $\rho_c$ ): es el cociente entre la longitud del arco de conducción y el paso circular.

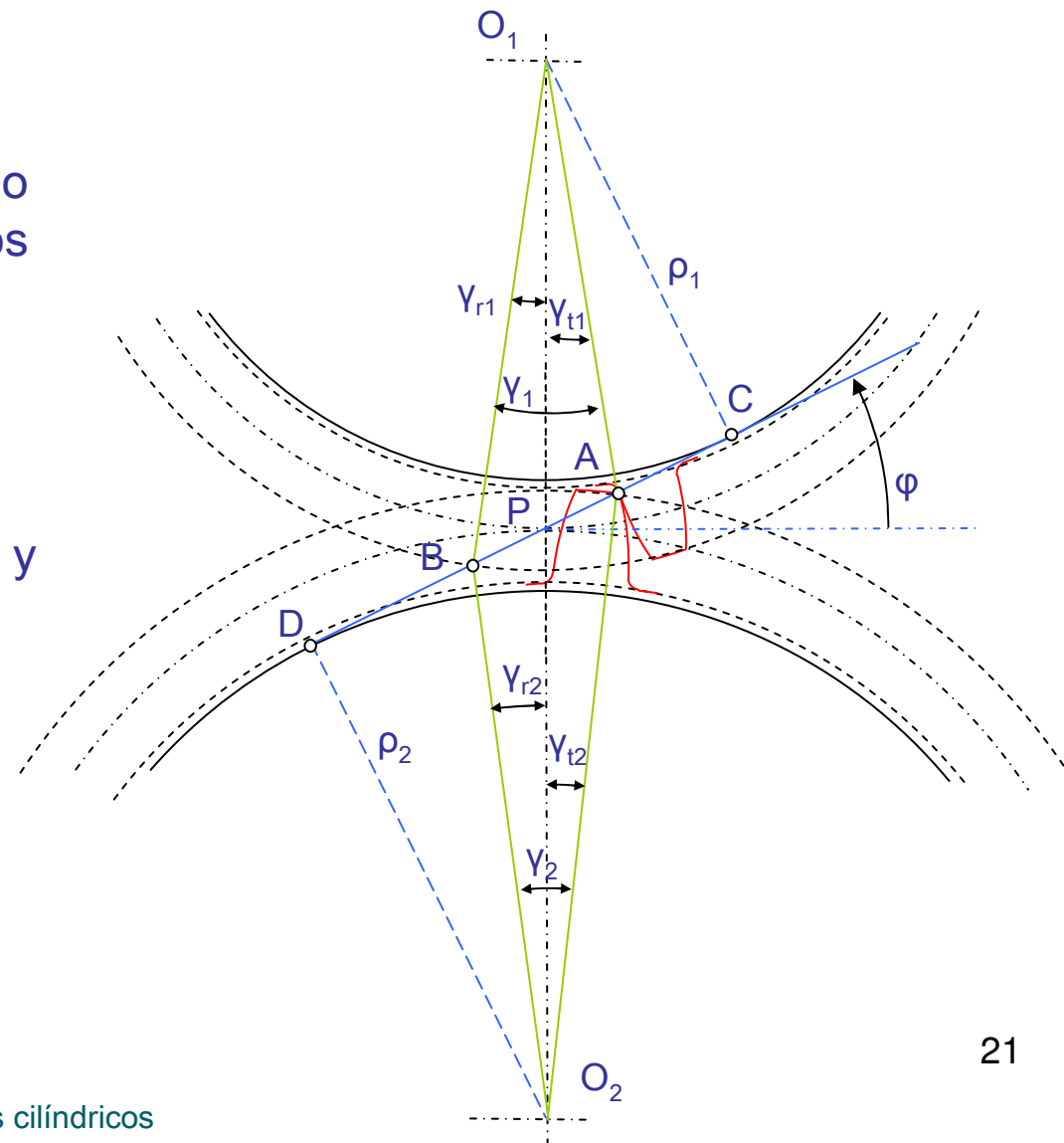
$$\rho_c = \frac{q_t}{p}$$

La relación de contacto se puede considerar como el número medio de dientes que se encuentran en cada instante en contacto.

# Relación de contacto

**Fase de aproximación:** periodo comprendido entre que los dos dientes entran en contacto y alcanzan el punto primitivo (AP).

**Fase de retroceso:** periodo comprendido entre el punto P y los dientes se separan (PB).



# Relación de contacto

$$q_t = q_a + q_r$$

$$\gamma_{t2} = \gamma_{a2} + \gamma_{r2}$$

$$\gamma_{t1} = \gamma_{a1} + \gamma_{r1}$$

$$R_1 \gamma_{t1} = R_2 \gamma_{t2} = q_t$$

$$AP = DA - DP = U_a$$

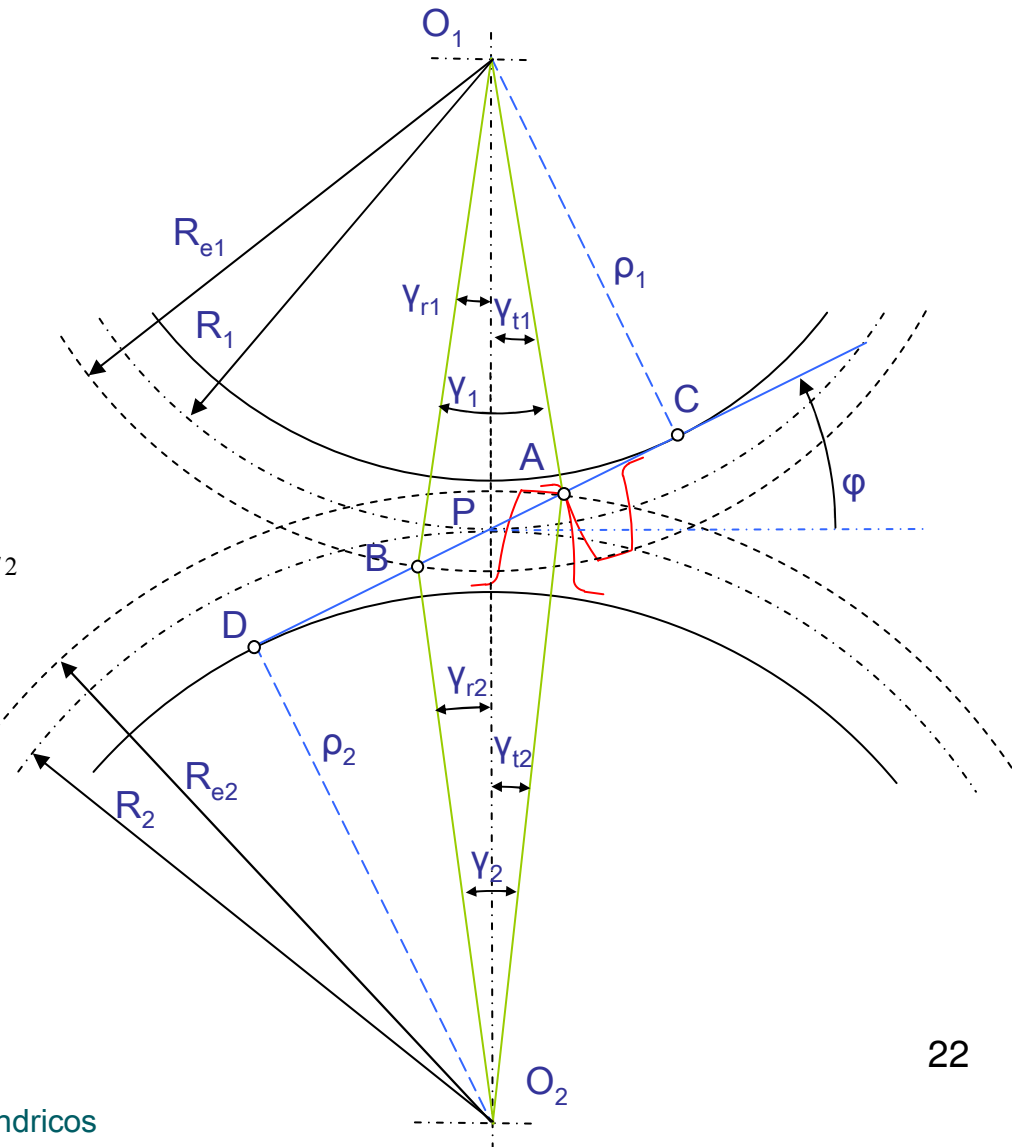
$$DP = R_2 \sin \varphi$$

$$DA = (R_{e2}^2 - \rho_2^2)^{1/2} = [ (R_2 + a_2)^2 - R_2^2 \cos^2 \varphi ]^{1/2}$$

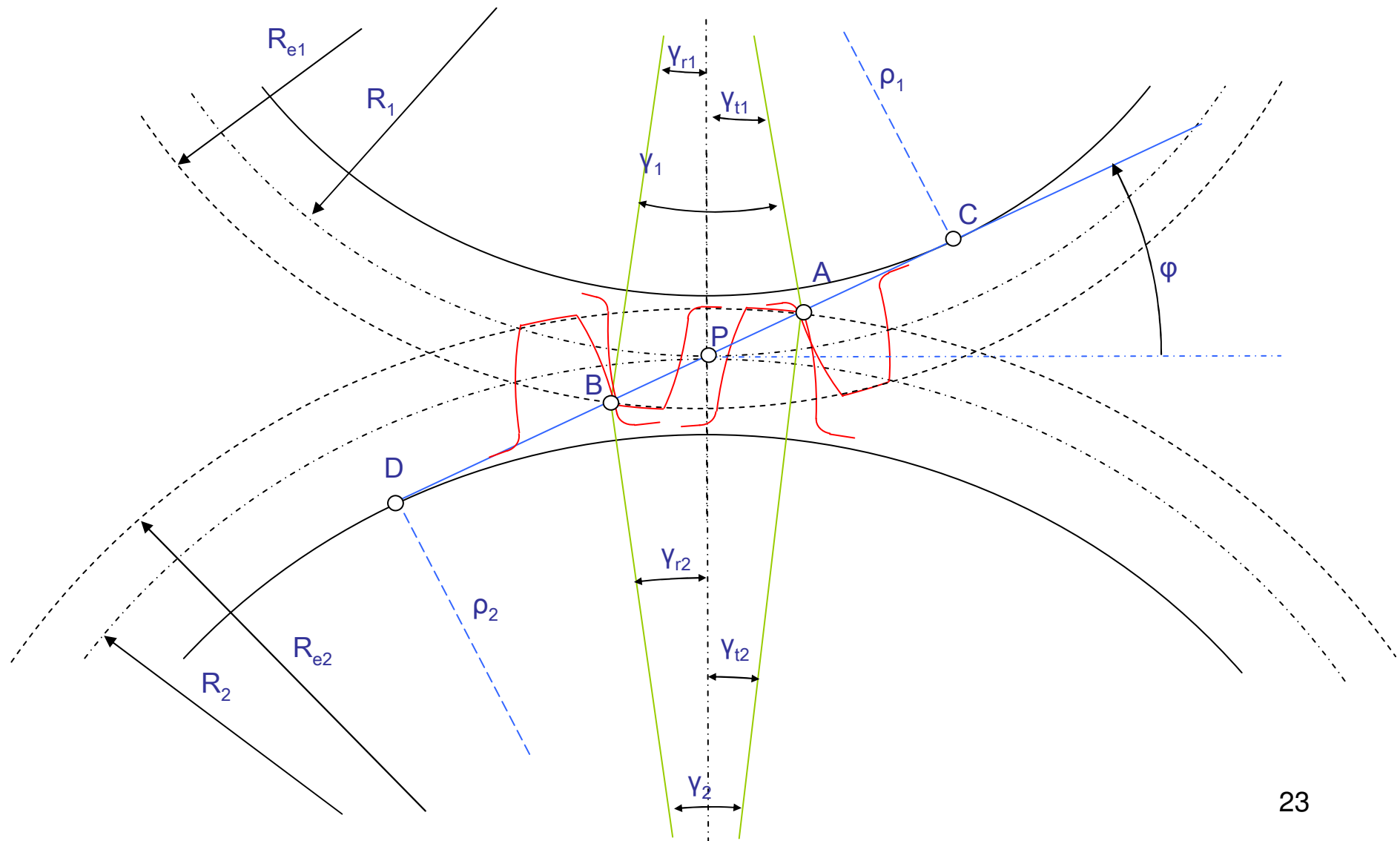
$$U_a = [ (R_2 + a_2)^2 - R_2^2 \cos^2 \varphi ]^{1/2} - R_2 \sin \varphi$$

$$U_r = [ (R_2 + a_1)^2 - R_1^2 \cos^2 \varphi ]^{1/2} - R_1 \sin \varphi$$

$$U_T = U_a + U_r$$



# Relación de contacto



# Relación de contacto

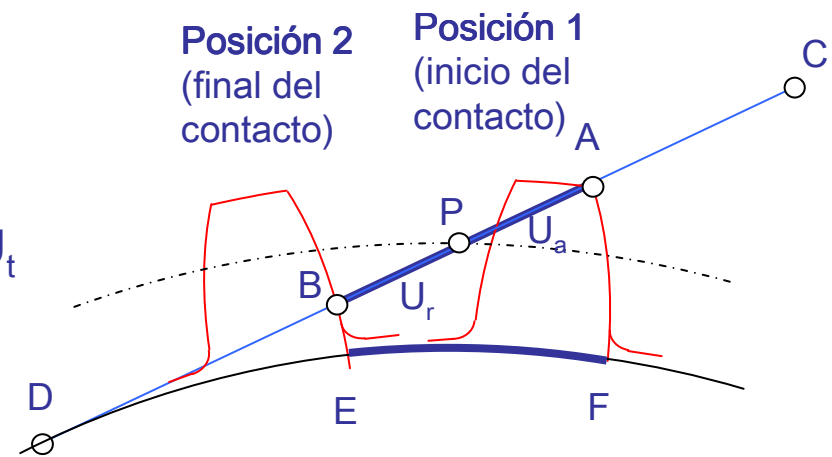
El segmento AB de longitud  $U_t$  debe ser igual al arco EF por la construcción de la evolvente (EF es el hilo enrollado y AB es el mismo hilo ya desenrollado).

Entonces, el ángulo girado para pasar de la posición 1 a la posición 2 será el arco  $U_t$  entre el radio de la circunferencia base.

$$\gamma_{t2} = \frac{U_t}{\rho_2} \quad \gamma_{t1} = \frac{U_t}{\rho_1}$$

$$q_t = \gamma_{t2} R_2$$

$$\rho_c = \frac{\gamma_{t2} R_2}{\pi m} = \frac{\gamma_{t1} R_1}{\pi m}$$





# Relación de contacto

La relación de contacto indica el número medio de dientes en contacto. Se recomienda que sea superior a 1,1, ya que si fuese inferior a 1 significaría que en algún momento no existiría contacto entre dientes.

Un relación de contacto alta conlleva un mejor reparto de esfuerzos entre los dientes y por tanto un mejor funcionamiento.

# Capítulo VI: Tema 2

## Engranajes cilíndricos

4. Generación.
  1. Útiles de forma.
  2. Generación con cremallera.
  3. Generación con piñón.

# Generación

Aunque la fabricación de engranajes no es objeto de esta asignatura es necesario comprender ciertos aspectos de este proceso por sus repercusiones en el comportamiento cinemático y dinámico de engranajes.

Existen diversas formas de fabricar los dientes de engranaje. Las principales son:

1. Fundición.
2. Extrusión.
3. Mecanizado:
  1. Empleando útiles de forma.
  2. Mediante generación.

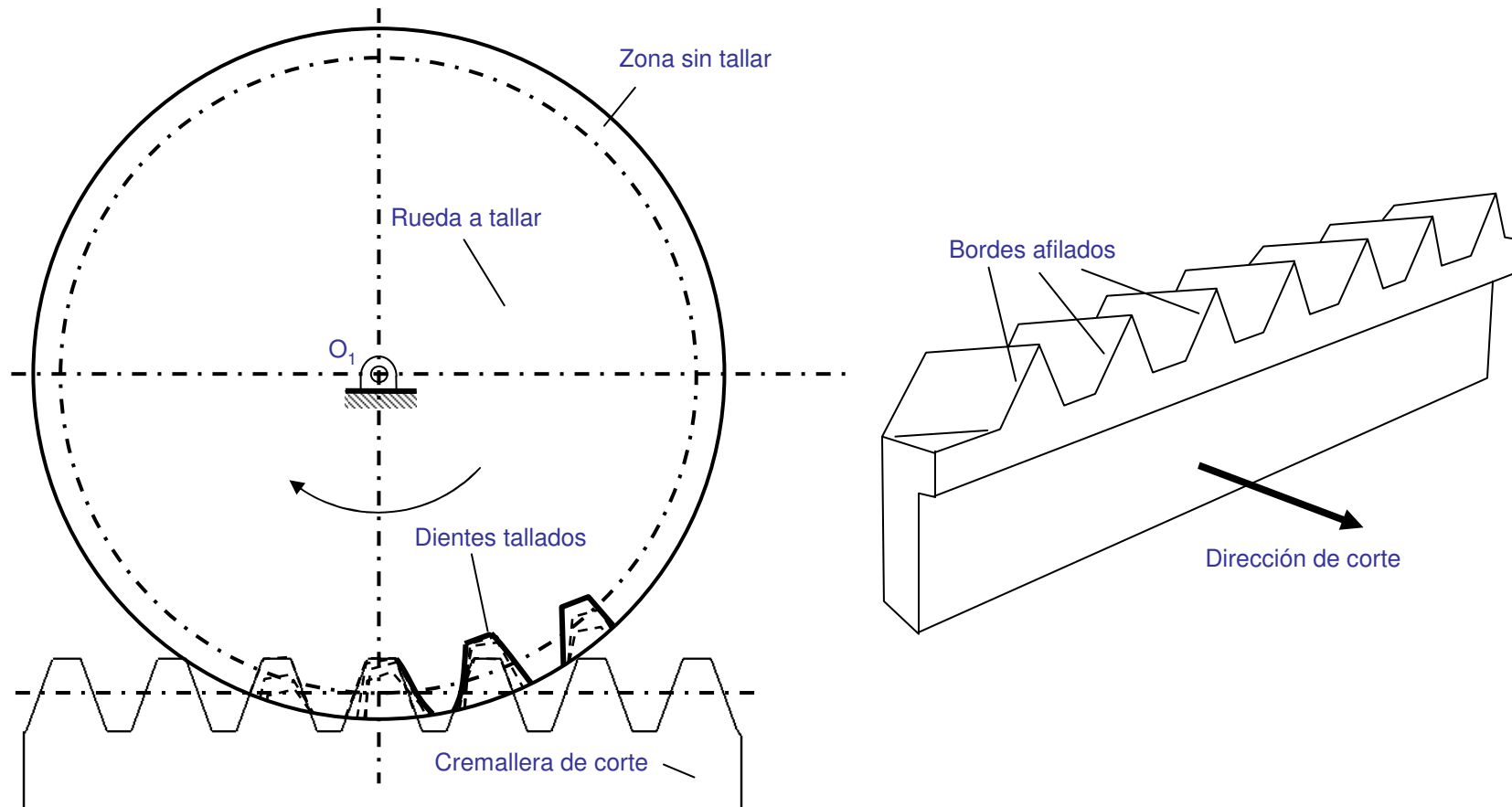
# Generación

Los engranajes fabricados en fundición tienen un bajo coste y son fáciles de mecanizar. La fundición tiene buenas características de corte en frío y estabilidad dimensional. Sin embargo, pueden tener defectos internos que reduzcan su vida a fatiga. Además tienen baja resistencia mecánica y no pueden soportar grandes cargas o pares.

El mecanizado del diente es el proceso que proporciona mayor calidad al diente de engranaje. Se realiza de dos formas:

- Con útiles de forma: el hueco de los dientes tiene la forma exacta del útil de tallado. Éste elimina el material de la rueda en bruto para dar forma a los dientes. Sin embargo, al no disponer de infinitos útiles de tallado en muchas ocasiones se talla de forma aproximada.
- Mediante generación: Se talla el diente de forma exacta mediante el movimiento relativo de la rueda a tallar con la herramienta de corte. Existen dos formas:
  - Tallado mediante generación con cremallera.
  - Tallado mediante generación con piñón.

# Generación



# Capítulo VI: Tema 2

## Engranajes cilíndricos

5. Interferencia.
  1. Interferencia de tallado con cremallera.
  2. Interferencia de tallado con piñón.
  3. Interferencia de funcionamiento en ruedas talladas con cremallera.
  4. Interferencia de funcionamiento en ruedas talladas con piñón.

# Interferencia

**Definición:** se denomina interferencia al contacto entre partes de perfiles que no son conjugados y a la interferencia de la propia materia.

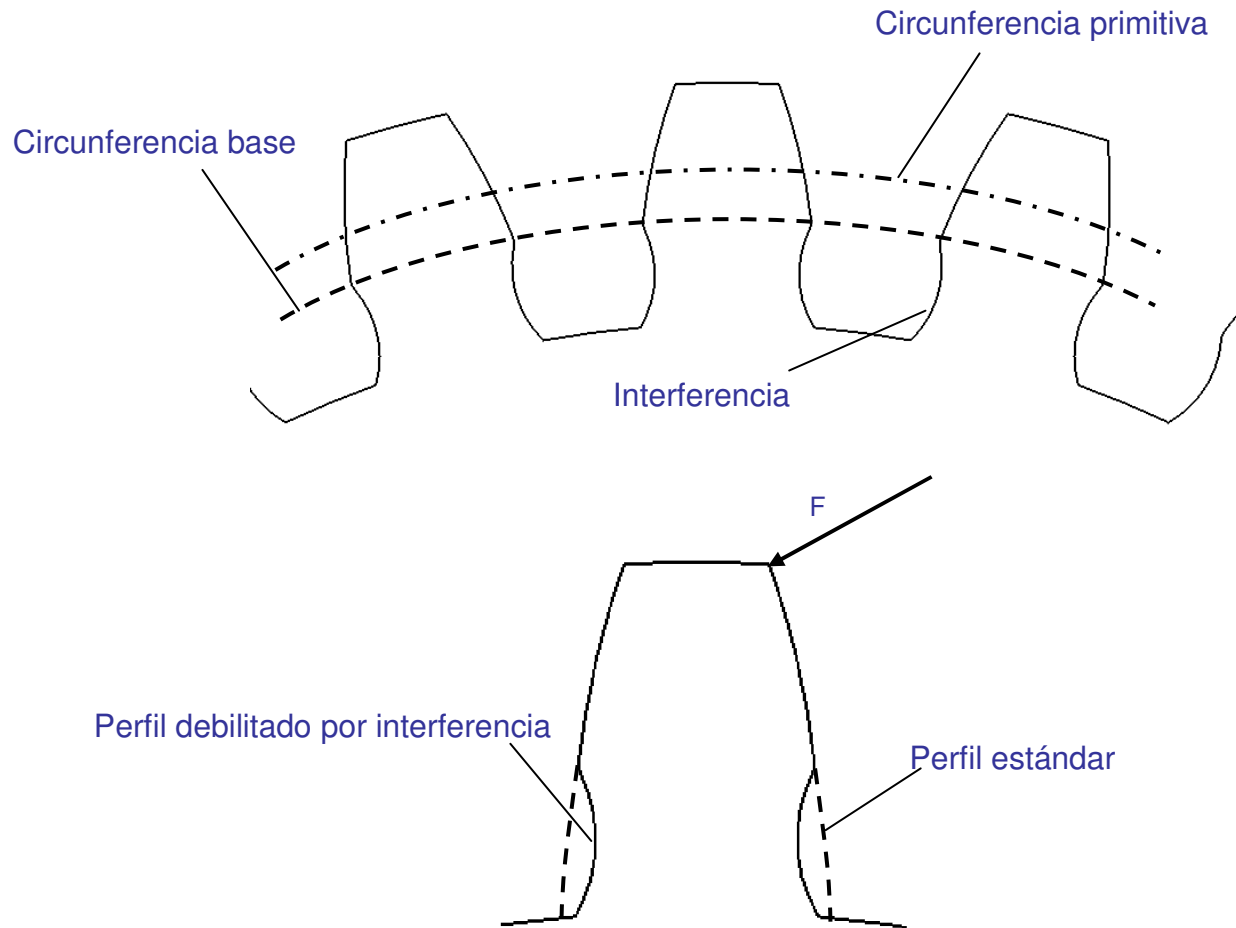
Existen dos tipos:

**Interferencia de tallado:** conocida también como penetración, se produce cuando la cremallera o piñón de generación corta al cilindro del engranaje en zonas situadas por debajo de la circunferencia base.

**Interferencia de funcionamiento:** se produce durante el funcionamiento en servicio de las ruedas de engranaje cuando los dientes entran en contacto en zonas no talladas como perfil de evolvente.

Se produce un debilitamiento en la base del diente.

# Interferencia de tallado





# Interferencia de tallado con cremallera

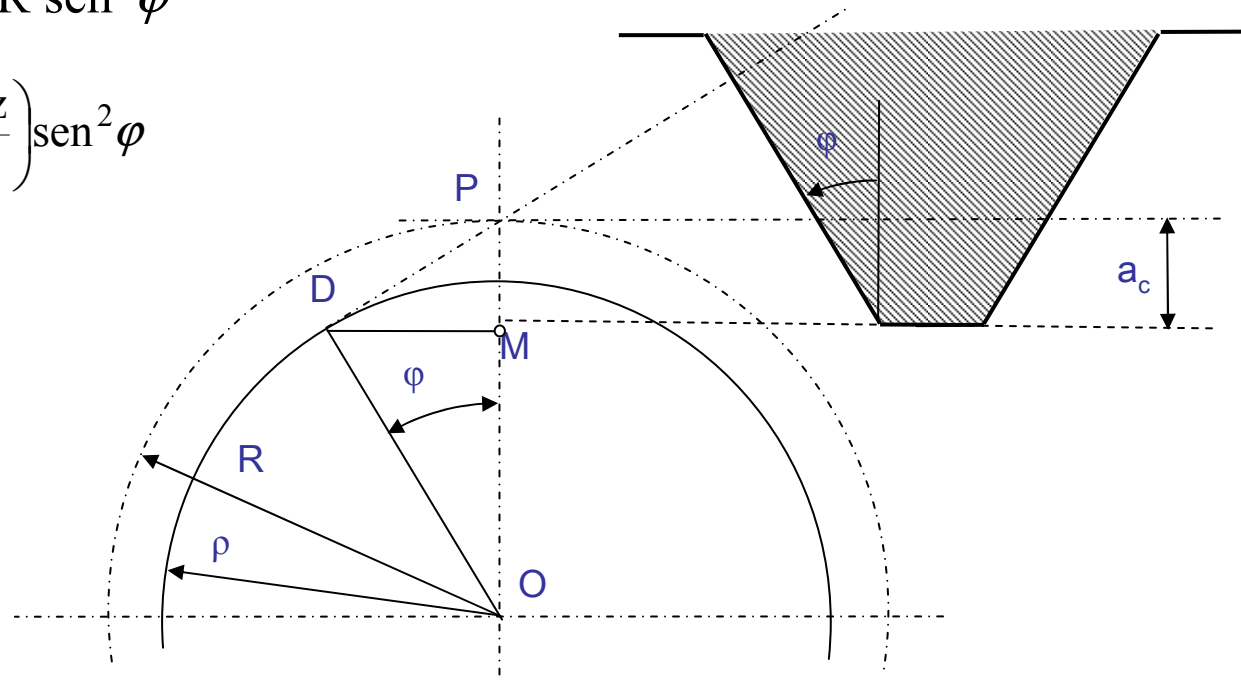
$$a_c \leq PM = DP \sin \varphi = R \sin^2 \varphi$$

$$R = \frac{mz}{2} \quad a_c \leq \left( \frac{mz}{2} \right) \sin^2 \varphi$$

$$a_c = m$$

$$z \geq \frac{2}{\sin^2 \varphi}$$

$$\varphi = 20^\circ; \quad z = 17,1$$



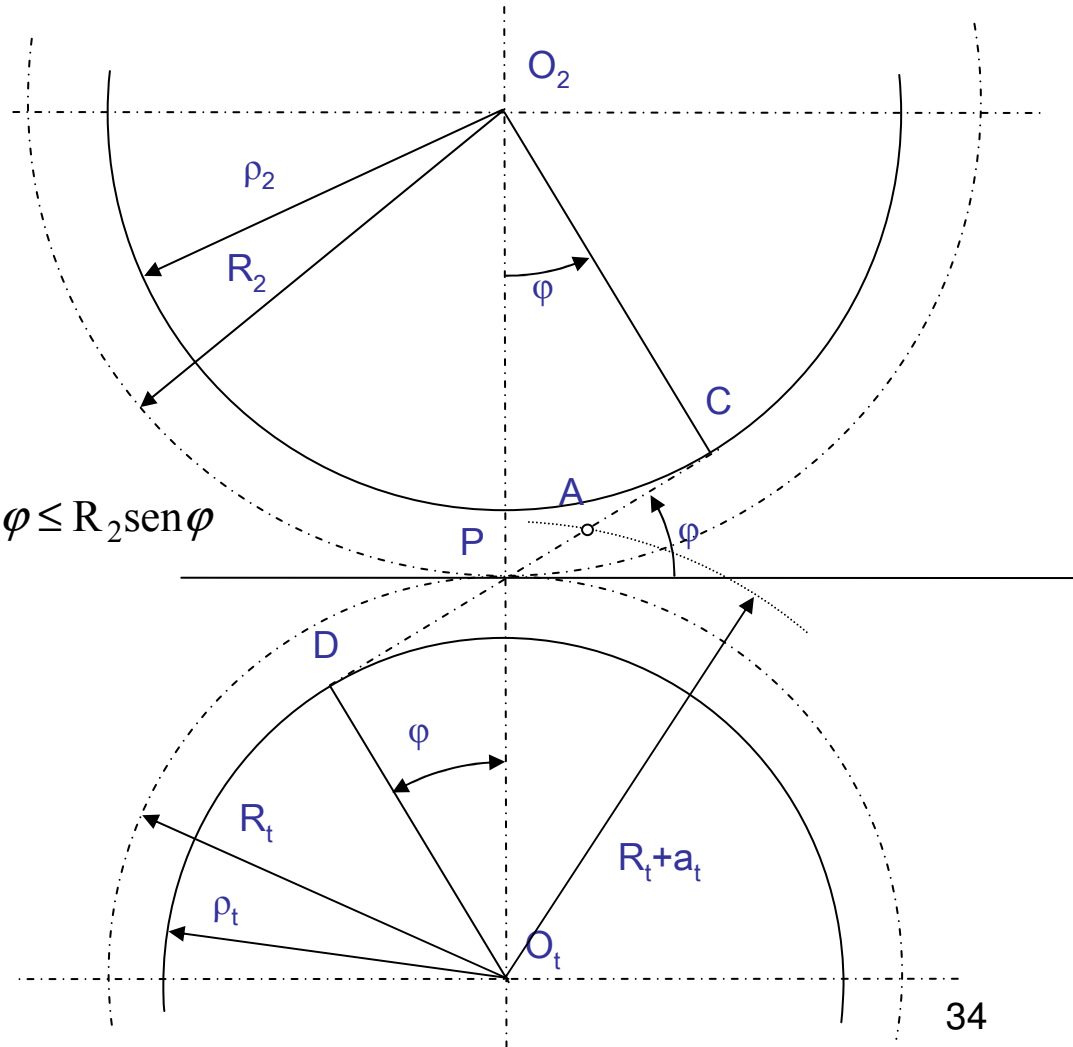
# Interferencia de tallado con piñón

$$PA \leq PC = R_2 \text{sen} \varphi$$

$$PA \leq R_2 \text{sen} \varphi$$

$$\left[ (R_t + a_t)^2 - R_t^2 \cos^2 \varphi \right]^{1/2} - R_t \text{sen} \varphi \leq R_2 \text{sen} \varphi$$

$$a_t \leq a_{t\text{max}}$$



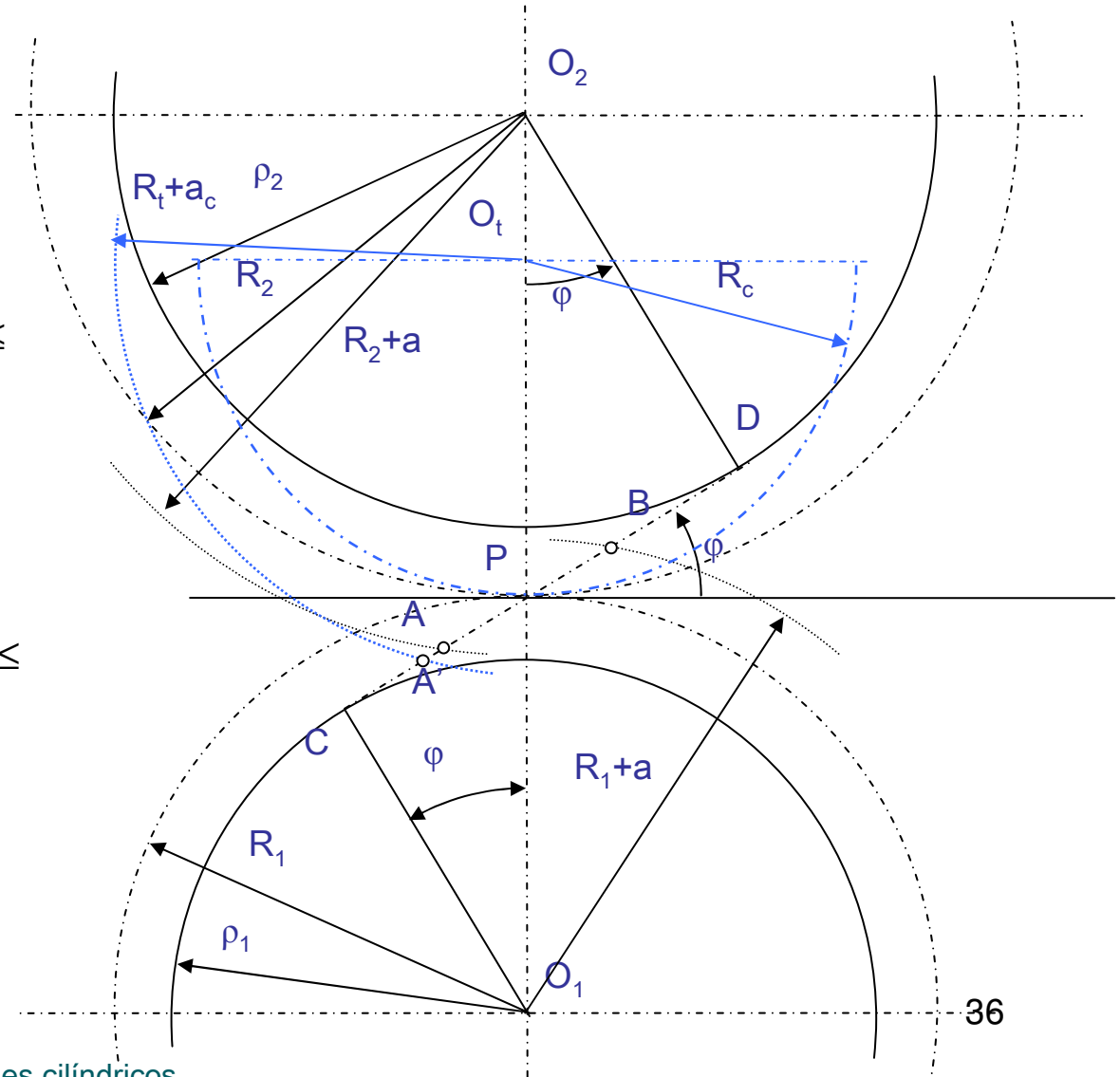


# Interferencia de funcionamiento en ruedas talladas con piñón

$$\left[ (R_2 + a_2)^2 - R_2^2 \cos^2 \varphi \right]^{1/2} - R_2 \operatorname{sen} \varphi \leq R_1 \operatorname{sen} \varphi$$

$$U_a \leq U_{at}$$

$$\left[ (R_2 + a_2)^2 - R_2^2 \cos^2 \varphi \right]^{1/2} - R_2 \operatorname{sen} \varphi \leq \left[ (R_t + a_t)^2 - R_t^2 \cos^2 \varphi \right]^{1/2} - R_t \operatorname{sen} \varphi$$



# Capítulo VI: Tema 2

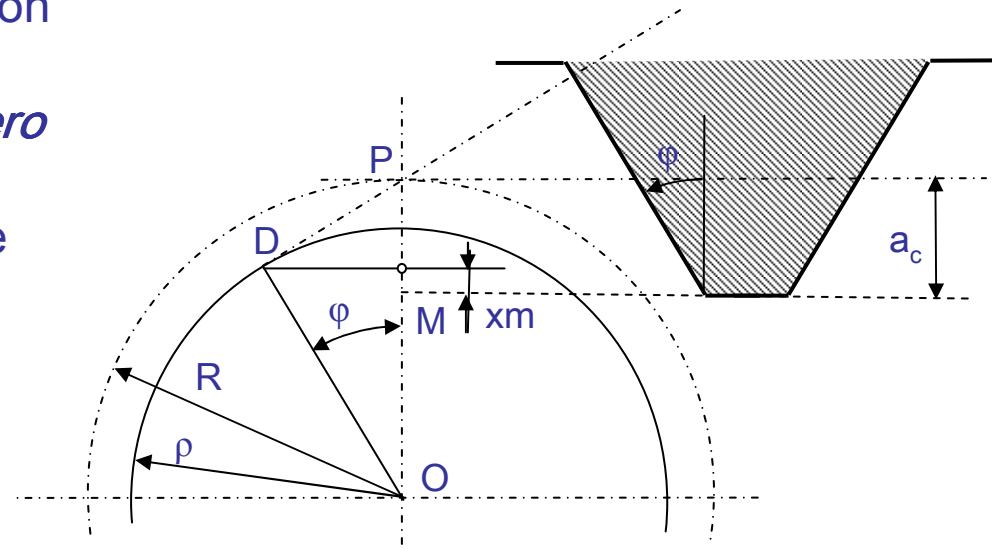
## Engranajes cilíndricos

### 6. Ruedas corregidas.

# Ruedas corregidas

Los engranajes vistos hasta ahora son los engranajes normales, se denominan engranajes *tallados a cero* o *engranajes cero*, es decir, tallados de manera que el espesor del diente es igual a la anchura de hueco en la circunferencia primitiva de la herramienta. Estos engranajes presentan dos limitaciones importantes:

- Existe un número mínimo de dientes admisible para evitar la interferencia de tallado.
- La distancia entre centros (entre ejes) no puede ser cualquiera.



$$z \geq \frac{2}{\text{sen}^2 \varphi}$$

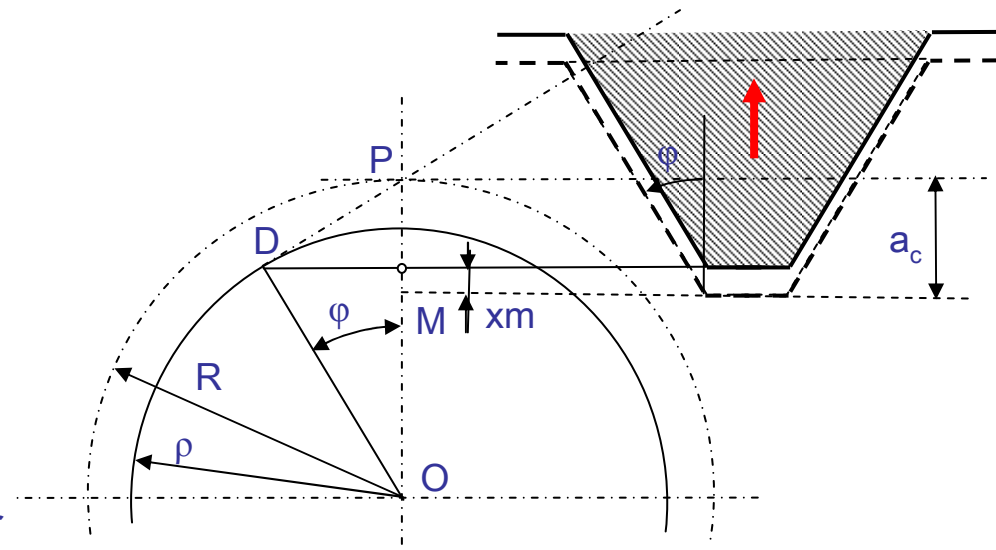
$$d = R_1 + R_2 = \frac{m}{2} (z_1 + z_2)$$

# Ruedas corregidas

Estas limitaciones son importantes porque en ocasiones es necesario reducir el número de dientes y la distancia entre centros viene impuesta por otras condiciones de diseño.

La solución es tallar *engranajes corregidos*. Consiste en tallar con la cremallera desplazada una cantidad  $xm$ , siendo  $m$  el *módulo* y  $x$  el *factor de corrección*.

Se observa que la nueva circunferencia primitiva tallada con la cremallera de tallado es una línea en la que la anchura del hueco distinta al espesor del diente.



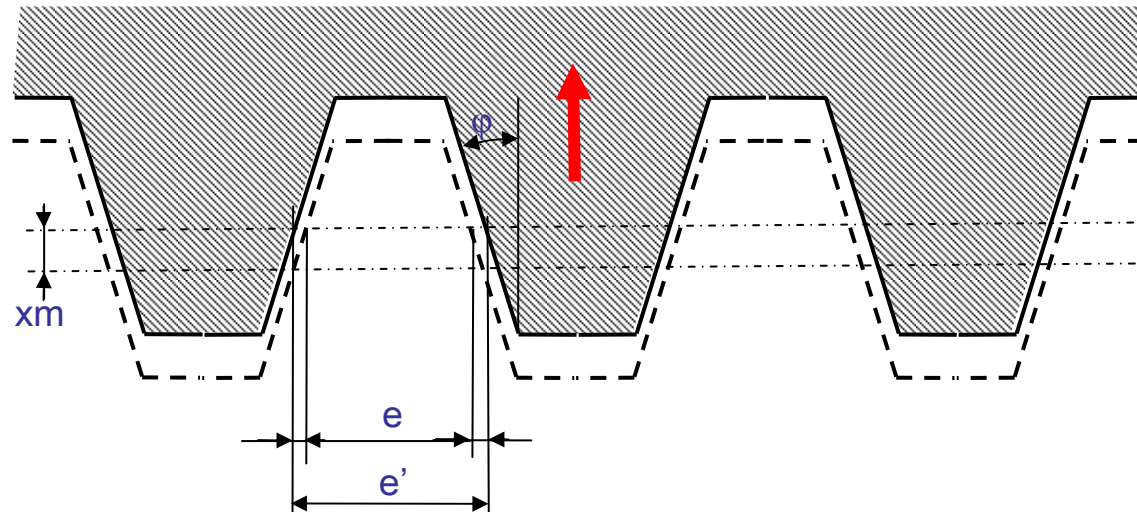
$$m - mx = R \text{sen}^2 \varphi$$

$$m(1 - x) = \frac{mz}{2} \text{sen}^2 \varphi$$

$$x \geq 1 - \frac{z}{2 / \text{sen}^2 \varphi} = 1 - \frac{z}{z_{\text{lim}}}$$

# Ruedas corregidas

$$e' = e + 2xm \tan \varphi$$



La corrección es positiva cuando el desplazamiento de la cremallera la aleja del eje del engranaje.

El espesor del diente del engranaje corregido, en la circunferencia primitiva, aumenta con correcciones positivas (coincidiendo con el espesor del hueco de la cremallera).



# Ruedas corregidas

Consideramos dos ruedas, de radios primitivos  $R_1$  y  $R_2$ , talladas con la misma cremallera, con correcciones  $x_1$  y  $x_2$  positivas. Con estas correcciones, las ruedas no engranaran a una distancia de centros  $d=R_1+R_2$  sino algo mayor. (Los perfiles de evolvente engranan a cualquier distancia de centros). Es decir, se tienen unos radios primitivos de funcionamiento mayores que los anteriores:  $R_{1v}$  y  $R_{2v}$ , con una distancia entre centros  $d_v=R_{1v}+R_{2v}$ .

Las circunferencias primitivas de funcionamiento para engranajes corregidos son distintas que las de tallado y el ángulo de presión también es distinto, ya que depende de la distancia entre centros. Luego tendremos también que el ángulo  $\varphi$  pasará a ser  $\varphi_v$ .

Las circunferencias base son las únicas que permanecen inalterables, ya que no han sido modificadas durante el tallado corregido.

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= R_1 \cos \varphi = R_{1v} \cos \varphi_v \\ \rho_2 &= R_2 \cos \varphi = R_{2v} \cos \varphi_v \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (R_1 + R_2) \cos \varphi &= (R_{1v} + R_{2v}) \cos \varphi_v \\ d \cos \varphi &= d_v \cos \varphi_v \end{aligned}$$

# Ruedas corregidas

$$\left. \begin{aligned} e_1' &= e_1 + 2x_1 m \tan \varphi \\ e_2' &= e_2 + 2x_2 m \tan \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$e_{1v} = R_{1v} \left[ \frac{e_1'}{R_1} + 2 \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] \right]$$

$$e_{2v} = R_{2v} \left[ \frac{e_2'}{R_2} + 2 \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] \right]$$

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{\pi m}{2} \\ R_v &= \frac{\pi m_v}{2} \end{aligned} \right\} m_v = m \frac{R_v}{R}$$

$$e_{1v} + e_{2v} = p_v = \pi m_v = \pi m \frac{R_{1v}}{R_1} = \pi m \frac{R_{2v}}{R_2}$$

$$\frac{R_{1v}}{R_1} \left[ e_1' + 2R_1 \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] \right] + \frac{R_{2v}}{R_2} \left[ e_2' + 2R_2 \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] \right] = \pi m \frac{R_{1v}}{R_1}$$

$$\frac{R_{1v}}{R_1} \left[ e_1 + 2x_1 m \tan \varphi + 2R_1 \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] \right] +$$

$$+ \frac{R_{2v}}{R_2} \left[ e_2 + 2x_2 m \tan \varphi + 2R_2 \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] \right] = \pi m \frac{R_{1v}}{R_1}$$

$$(e_1 + e_2) + 2x_1 m \tan \varphi + 2x_2 m \tan \varphi + 2 \frac{m}{2} (z_1 + z_2) \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] = \pi m$$

$$p + 2x_1 m \tan \varphi + 2x_2 m \tan \varphi + m(z_1 + z_2) \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] = \pi m$$

$$\pi m + 2x_1 m \tan \varphi + 2x_2 m \tan \varphi + m(z_1 + z_2) \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] = \pi m$$

$$2(x_1 + x_2) \tan \varphi + (z_1 + z_2) \left[ E_v(\psi) - E_v(\psi_v) \right] = 0$$

$$E_v(\psi_v) = E_v(\psi) + 2 \frac{(x_1 + x_2)}{(z_1 + z_2)} \tan \varphi$$

# Ruedas corregidas

