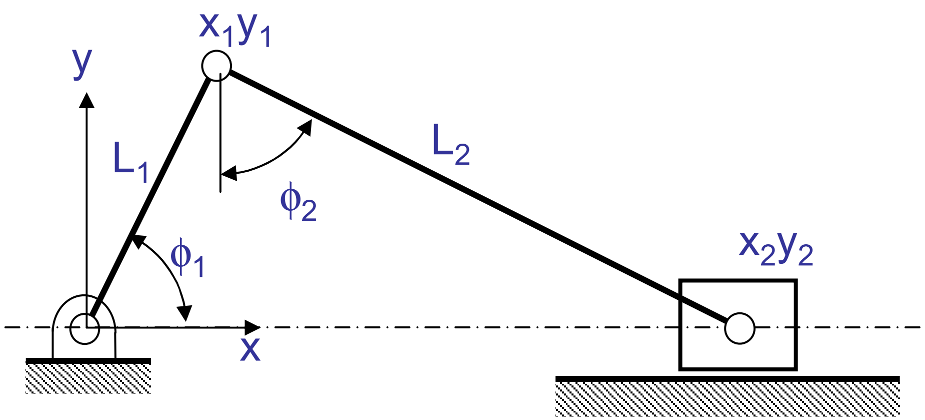
Universidad de Cantabria
Departamento de Ing. Estructural y Mecánica

Capitulo III

III.3 Métodos numéricos de análisis cinemático

Ejercicios prácticos

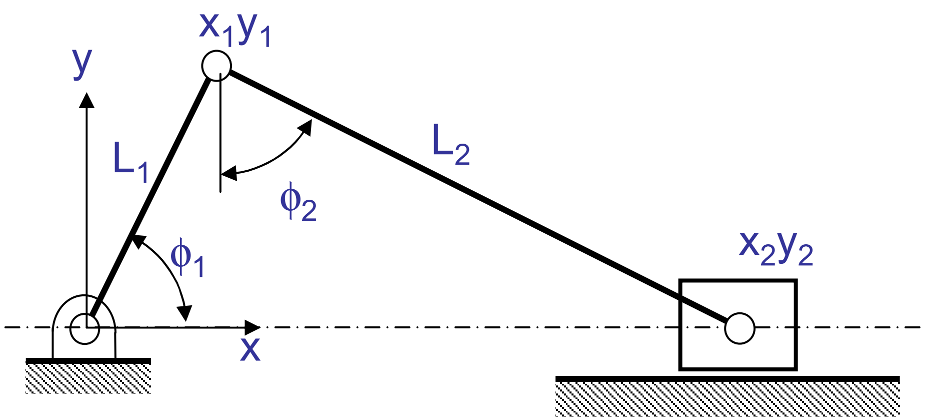
Problema 1



En el mecanismo biela-manivela se considera que el elemento de entrada es L1 y la coordenada que define su posición $\phi 1=\omega t$.

Se pide, plantear posición, velocidad y aceleración de las coordenadas marcadas en el mecanismo mediante métodos numéricos.

Problema 1



En el mecanismo biela-manivela se considera que el elemento de entrada es L1 y la coordenada que define su posición $\phi 1=\omega t$. Las coordenadas generalizadas son las siguie AJL1:

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \left[x_2 \ \phi_1 \ \phi_2 \right]$$

Dado que se emplean tres coordenadas generalizadas y el mecanismo tiene 1 g.d.l. el número de ecuaciones de restricción es dos. Este vector será pues,

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} -x_2 + L_1 \cos\phi_1 + L_2 \operatorname{sen}\phi_2 \\ L_1 \operatorname{sen}\phi_1 - L_2 \cos\phi_2 \end{Bmatrix} = 0$$

NOTA:Las coordenadas dependientes seleccionadas en los dos ejemplos pueden ser modificadas tanto en tipo como en número. Como consecuencia el tamaño del vector $\Phi(\mathbf{q})$ y su jacobiano Φq también será modificado.

Diapositiva 3

AJL1 Las coordenadas generalizadas son q.
Las variables dependientes son x2 y phi2
Ana, 5/3/2006

Problema 1

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_2 & \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} -x_2 + L_1 \cos\phi_1 + L_2 \operatorname{sen}\phi_2 \\ L_1 \operatorname{sen}\phi_1 - L_2 \cos\phi_2 \end{Bmatrix} = 0$$

y el jacobiano,

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\phi_m}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\phi_m}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \longrightarrow \Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} - & -\mathit{sen}\,\phi_1 & L_2 \cos\phi_2 \\ 0 & L_1 \cos\phi_1 & L_2 \sin\phi_2 \end{bmatrix}$$

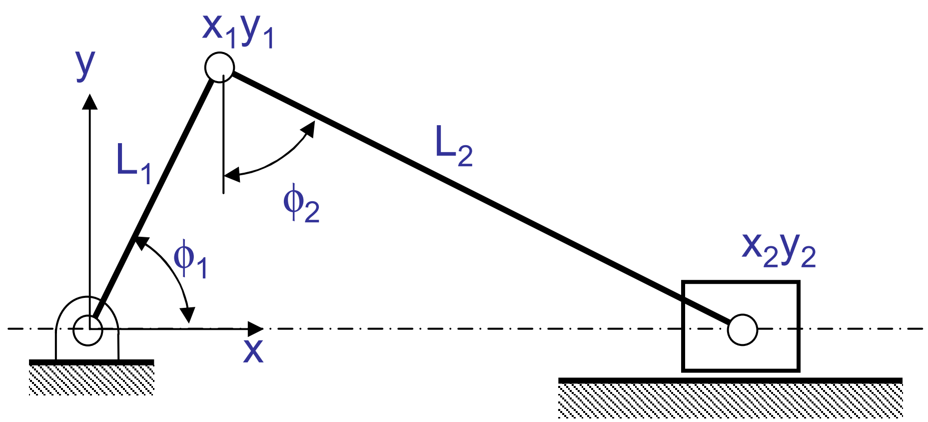
Problema 1

A ora ya podemos empezar a iterar aplicando la fórmula recursiva del método de Ne ton- ap son asta alcanzar la convergencia,

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_o + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o)^{-1}\Phi(\mathbf{q}_o)$$

Evidentemente es necesario suponer un valor q_o de partida. La adecuada selección de este valor es fundamental, ya que si está muy alejado de la solución puede que el método no alcance la convergencia.

Problema 1



i se considera el mismo ejemplo anterior de un mecanismo biela-manivela con las variables dependientes definidas como,

$$\mathbf{q}^{T} = [x_2 \ \phi_1 \ \phi_2]$$

A ora es necesario introducir una coordenada temporal en el elemento de entrada. Por ejemplo,

$$\phi_1 = \omega t$$

e introduce como restricción temporal de la forma:

$$\mathbf{\Phi}_1(\mathrm{t}) = \phi_1 - \omega\,\mathrm{t} = 0$$

Problema 1

Entonces, el vector de restricciones queda modificado como,

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} -x_2 + L_1\cos\phi_1 + L_2\mathrm{sen}\phi_2 \\ L_1\mathrm{sen}\phi_1 - L_2\cos\phi_2 \\ \phi_1 - \omega t \end{Bmatrix} = 0$$

y la matriz jacobiana queda modificada como,

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -1 & -L_1\mathrm{sen}\phi_1 & L_2\cos\phi_2 \\ 0 & L_1\cos\phi_1 & L_2\mathrm{sen}\phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_2 & \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}$$

Derivando el vector de restricciones respecto del tiempo,

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix}$$

Problema 1

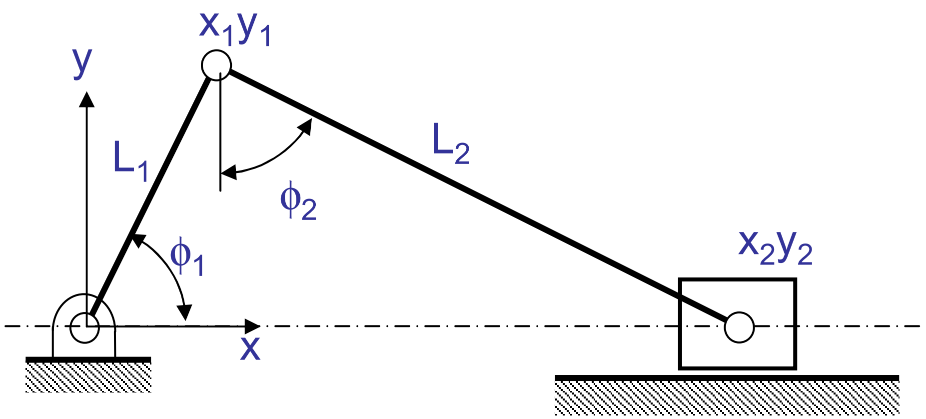
Matrices que introducidas en la ecuación,

$$\dot{\mathrm{q}} = -\Phi_{\mathrm{q}}^{-1}\Phi_{\mathrm{t}}$$

permiten determinar el vector de velocidades,

$$\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} = \left[\dot{x}_2\ \dot{\phi}_1\ \dot{\phi}_2\right]$$

Problema 1



El jacobiano a sido obtenido en el análisis de velocidades:

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -1 & -L_1 \operatorname{sen}\phi_1 & L_2 \cos\phi_2 \\ 0 & L_1 \cos\phi_1 & L_2 \operatorname{sen}\phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = -(\Phi_{\mathrm{q}}\dot{\mathrm{q}})_{\mathrm{q}}\dot{\mathrm{q}} - 2\Phi_{\mathrm{qt}}\dot{\mathrm{q}} - \Phi_{\mathrm{tt}}$$

$$\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -1 & -L_1 \operatorname{sen}\phi_1 & L_2 \cos\phi_2 \\ 0 & L_1 \cos\phi_1 & L_2 \operatorname{sen}\phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{x}_2 - \dot{\phi}_1 L_1 \operatorname{sen}\phi_1 + L_2\dot{\phi}_2\cos\phi_2 \\ \dot{\phi}_1 L_1 \cos\phi_1 + \dot{\phi}_2 L_2 \operatorname{sen}\phi_2 \\ \dot{\phi}_1 \end{Bmatrix}$$

Problema 1

El resultado obtenido se deriva respecto de las coordenadas generalizadas y se multiplica a continuación por el vector de velocidades,

$$(\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi}_1 L_1 cos\phi_1 & -\dot{\phi}_2 L_2 sen\phi_2 \\ 0 & -\dot{\phi}_1 L_1 sen\phi_1 & \dot{\phi}_2 L_2 cos\phi_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\phi}_1^2 L_1 cos\phi_1 - \dot{\phi}_2^2 L_2 sen\phi_2 \\ -\dot{\phi}_1^2 L_1 sen\phi_1 + \dot{\phi}_2^2 L_2 cos\phi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\gamma = -(\Phi_{q}\dot{q})_{q}\dot{q} - 2\Phi_{qt}\dot{q} - \Phi_{tt}$$

Además, el vector jacobiano se deriva respecto del tiempo obteniendo,

$$\Phi_{qt} = 0$$

$$\Phi_{tt} = 0$$

Problema 1

Por tanto, el sistema de ecuaciones queda,

$$\boxed{\Phi_q \ddot{q} = \gamma}$$

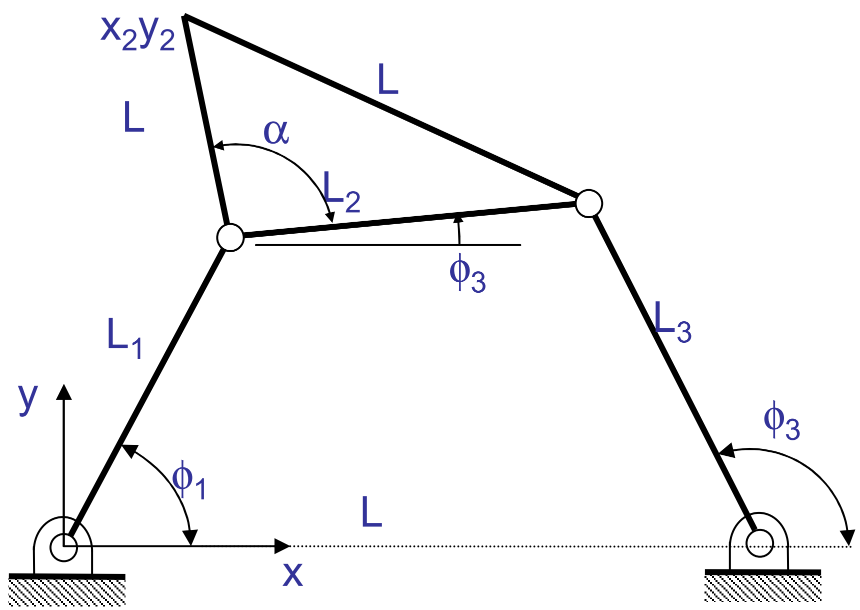
$$\begin{bmatrix} -1 & -L_1 sen\phi_1 & L_2 \cos\phi_2 \\ 0 & L_1 \cos\phi_1 & L_2 sen\phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} -\dot{\phi}_1^2 L_1 cos\phi_1 - \dot{\phi}_2^2 L_2 sen\phi_2 \\ -\dot{\phi}_1^2 L_1 sen\phi_1 + \dot{\phi}_2^2 L_2 cos\phi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Incógnitas

esolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene el vector de aceleraciones.

Problema 2

En el mecanismo cuadrilátero articulado se considera que el elemento de entrada es también L1 y, del mismo modo, la coordenada que define su posición $\phi_1=\omega t$.

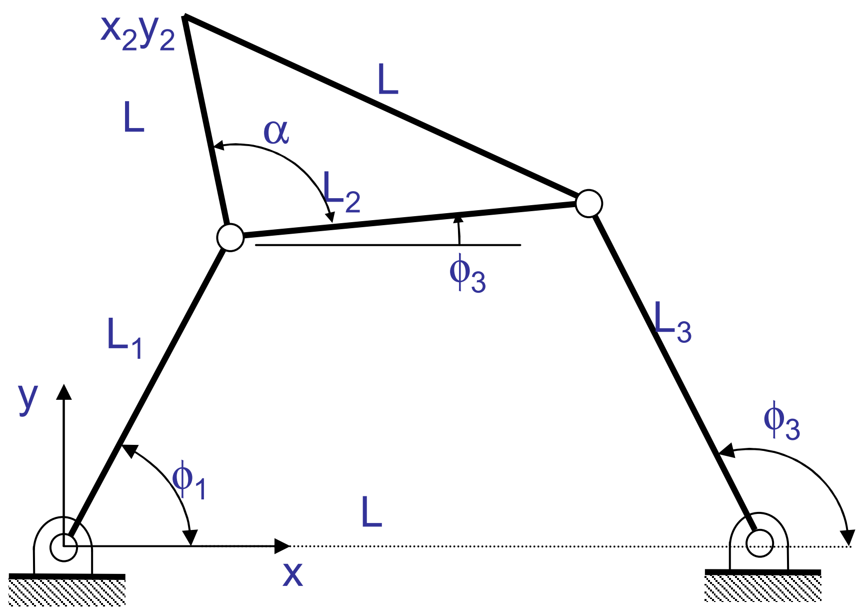


Se pide, plantear posición, velocidad y aceleración de las coordenadas marcadas en el mecanismo mediante métodos numéricos.

Problema 2

En el mecanismo cuadrilátero articulado se considera que el elemento de entrada es también L1 y, del mismo modo, la coordenada que define su posición $\phi_1=\omega t$. Las variables son las siguientes:

$$\mathbf{q}^T = [x_2 \; y_2 \; \phi_1 \; \phi_2 \; \phi_3]$$



Por tanto, el número de ecuaciones de restricción debe ser cuatro. Esto es,

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} x_2 - L_1\cos\phi_1 - L_5\cos(\alpha+\phi_2) \\ y_2 - L_1\mathrm{sen}\phi_1 - L_5\mathrm{sen}(\alpha+\phi_2) \\ -L_1\cos\phi_1 - L_2\cos\phi_2 - L_3\cos\phi_3 + L_4 \\ L_1\mathrm{sen}\phi_1 + L_2\mathrm{sen}\phi_2 - L_3\mathrm{sen}\phi_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Universidad de Cantabria
Departamento de Ing. Estructural y Mecánica

Problema 2

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \left[x_2 \;\; y_2 \;\; \phi_1 \;\; \phi_2 \;\; \phi_3\right]$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} x_2 - L_1 \cos\phi_1 - L_5 \cos(\alpha + \phi_2) \\ y_2 - L_1 \mathrm{sen}\phi_1 - L_5 \mathrm{sen}(\alpha + \phi_2) \\ -L_1 \cos\phi_1 - L_2 \cos\phi_2 - L_3 \cos\phi_3 + L_4 \\ L_1 \mathrm{sen}\phi_1 + L_2 \mathrm{sen}\phi_2 - L_3 \mathrm{sen}\phi_3 \end{Bmatrix} = 0$$

y la matriz jacobiano,

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\phi_m}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\phi_m}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \longrightarrow \Phi_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\,\phi_1 & L_5 \mathrm{sen}(\alpha + \phi_2) & 0 \\ 0 & 1 & -L_1 \cos\phi_1 & -L_5 \cos(\alpha + \phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\,\phi_1 & L_2 \mathrm{sen}\,\phi_2 & L_3 \mathrm{sen}\,\phi_3 \\ 0 & 0 & L_1 \cos\phi_1 & L_2 \cos\phi_2 & -L_3 \cos\phi_3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_o + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o)^{-1}\Phi(\mathbf{q}_o)$$

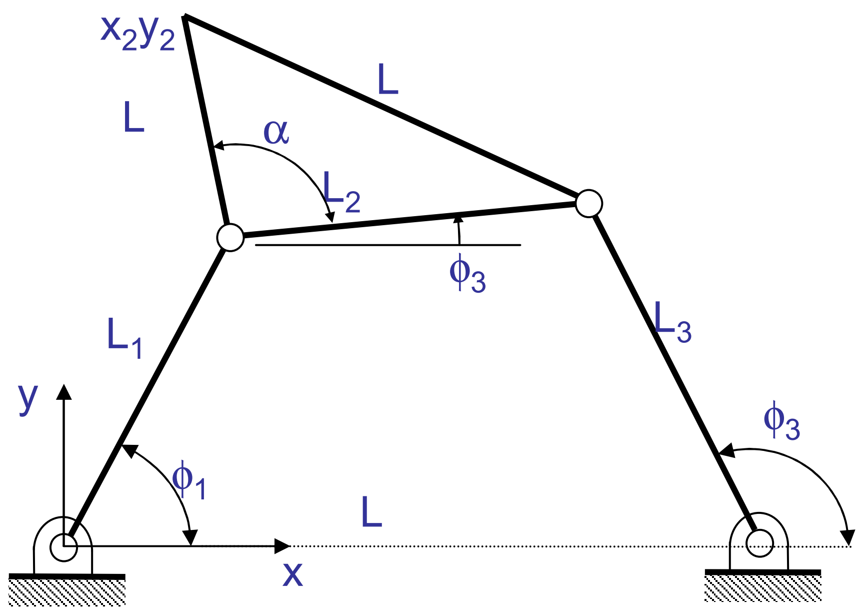
Problema 2

i se considera el mismo vector de coordenadas dependientes,

$$\mathbf{q}^{T} = \left[x_2 \; y_2 \; \phi_1 \; \phi_2 \; \phi_3 \right]$$

e introduciendo la coordenada temporal,

$$\phi_1 = \omega t$$



El vector de ecuaciones de restricción queda como,

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} x_2 - L_1\cos\phi_1 - L_5 cos(\alpha + \phi_2) \\ y_2 - L_1 \text{sen}\phi_1 - L_5 \text{sen}(\alpha + \phi_2) \\ -L_1\cos\phi_1 - L_2 cos\phi_2 + L_3\cos\phi_3 + L_4 \\ L_1\text{sen}\phi_1 + L_2\text{sen}\phi_2 - L_3\text{sen}\phi_3 \\ \phi_1 - \omega t \end{Bmatrix} = 0$$

Problema 2

La matriz jacobiano queda entonces,

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\phi_1 & L_5 \mathrm{sen}(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 1 & -L_1 \cos\phi_1 & -L_5 \cos(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\phi_1 & L_2 \mathrm{sen}\phi_2 & -L_3 \mathrm{sen}\phi_3 \\ 0 & 0 & L_1 \cos\phi_1 & L_2 \cos\phi_2 & -L_3 \cos\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la derivada respecto del tiempo del vector restricciones,

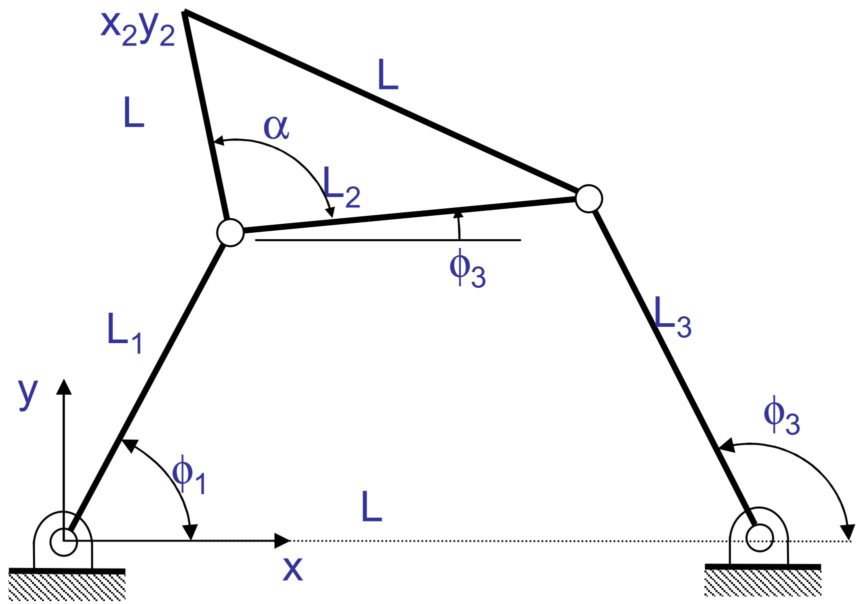
$$\Phi_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix}$$

Utilizando de nuevo la ecuación, $\dot{\mathrm{q}} = -\Phi_{\mathrm{q}}^{-1}\Phi_{\mathrm{t}}$

se obtiene el vector de velocidades, $\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} = \left[\dot{x}_2 \;\; \dot{y}_2 \;\; \dot{\phi}_1 \;\; \dot{\phi}_3 \;\; \dot{\phi}_3\right]$

Problema 2

El jacobiano a sido obtenido en el análisis de velocidades:



$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\phi_1 & L_5 \mathrm{sen}(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 1 & -L_1\cos\phi_1 & -L_5\cos(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\phi_1 & L_2 \mathrm{sen}\phi_2 & -L_3 \mathrm{sen}\phi_3 \\ 0 & 0 & L_1\cos\phi_1 & L_2\cos\phi_2 & -L_3\cos\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi_q \dot{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\phi_1 & L_5 \mathrm{sen}(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 1 & -L_1\cos\phi_1 & -L_5\cos(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\phi_1 & L_2 \mathrm{sen}\phi_2 & -L_3 \mathrm{sen}\phi_3 \\ 0 & 0 & L_1\cos\phi_1 & L_2\cos\phi_2 & -L_3\cos\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_2 + \dot{\phi}_1 L_1 \mathrm{sen}\phi_1 + \dot{\phi}_2 L_5 \mathrm{sen}(\alpha+\phi_2) \\ \dot{y}_2 - \dot{\phi}_1 L_1\cos\phi_1 - \dot{\phi}_2 L_5\cos(\alpha+\phi_2) \\ \dot{\phi}_1 L_1 \mathrm{sen}\phi_1 + \dot{\phi}_2 L_2 \mathrm{sen}\phi_2 - \dot{\phi}_3 L_3 \mathrm{sen}\phi_3 \\ \dot{\phi}_1 L_1\cos\phi_1 + \dot{\phi}_2 L_2\cos\phi_2 - \dot{\phi}_3 L_3\cos\phi_3 \\ \dot{\phi}_1 \end{Bmatrix}$$

$$\gamma = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt}\dot{q} - \Phi_{tt}$$

Problema 2

Derivando respecto de las coordenadas dependientes y multiplicando por el vector de velocidades,

$$(\mathbf{\Phi_q \dot{q}})_\mathbf{q}\mathbf{\dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\phi}_1 L_1 cos\phi_1 & \dot{\phi}_2 L_5 cos(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\phi}_1 L_1 sen\phi_1 & \dot{\phi}_2 L_5 sen(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\phi}_1 L_1 cos\phi_1 & \dot{\phi}_2 L_2 cos\phi_2 & -\dot{\phi}_3 L_3 cos\phi_3 \\ 0 & 0 & -\dot{\phi}_1 L_1 sen\phi_1 & -\dot{\phi}_2 L_2 sen\phi_2 & \dot{\phi}_3 L_3 sen\phi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1^2 L_1 cos\phi_1 + \dot{\phi}_2^2 L_5 cos(\alpha+\phi_2) \\ \dot{\phi}_1^2 L_1 sen\phi_1 + \dot{\phi}_2^2 L_5 sen(\alpha+\phi_2) \\ \dot{\phi}_1^2 L_1 cos\phi_1 + \dot{\phi}_2^2 L_2 cos\phi_2 - \dot{\phi}_3^2 L_3 cos\phi_3 \\ -\dot{\phi}_1^2 L_1 sen\phi_1 - \dot{\phi}_2^2 L_2 sen\phi_2 + \dot{\phi}_3^2 L_3 sen\phi_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_{qt} = 0$$

$$\gamma = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt}\dot{q} - \Phi_{tt}$$

$$\Phi_{tt} = 0$$

Problema 2

A ora se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\boxed{\Phi_q \ddot{q} = \gamma}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\,\phi_1 & L_5 \mathrm{sen}(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 1 & -L_1 \cos\phi_1 & -L_5 \cos(\alpha+\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \mathrm{sen}\,\phi_1 & L_2 \mathrm{sen}\,\phi_2 & -L_3 \mathrm{sen}\,\phi_3 \\ 0 & 0 & L_1 \cos\phi_1 & L_2 \cos\phi_2 & -L_3 \cos\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1^2 L_1 \cos\phi_1 + \dot{\phi}_2^2 L_5 \cos(\alpha+\phi_2) \\ \dot{\phi}_1^2 L_1 \mathrm{sen}\,\phi_1 + \dot{\phi}_2^2 L_5 \mathrm{sen}(\alpha+\phi_2) \\ \dot{\phi}_1^2 L_1 \cos\phi + \dot{\phi}_2^2 L_2 \cos\phi_2 - \dot{\phi}_3^2 L_3 \cos\phi_3 \\ -\dot{\phi}_1^2 L_1 \mathrm{sen}\,\phi_1 - \dot{\phi}_2^2 L_2 \mathrm{sen}\,\phi_2 + \dot{\phi}_3^2 L_3 \mathrm{sen}\,\phi_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Incógnitas

esolviendo este sistema se obtiene las aceleraciones del mecanismo.