CAPITULO 7.FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición Sean E y F dos conjuntos finitos o infinitos de cualquier naturaleza. Una aplicaron f del conjunto E en el conjunto F es una ley o proceso mediante el cual se hace corresponder a todo $P \in E$ un elemento y solo uno $P' \in F$, la cual simbolizamos por $P'=f(P)$. Hacemos hincapié en que $P' \in F$ puede ser imagen de varios elementos $P \in E$, pero la imagen de cada $P \in E$ debe ser única. En lo que sigue supondremos $E \equiv R^n$ y $F \equiv R$, dando ahora la siguiente definición

Definición. Se llama función real de n variables reales definida sobre $D \subset E \equiv R^n$,a toda aplicación de D en R , donde R^n , es el espacio vectorial euclidiano o , mejor aun , es espacio afín asociado , siendo la referencia ortonormada . De modo que a todo punto $P(x_1 , x_2 ....x_n) \in D$, la aplicación f asocia un numero real único $z=f(P) =P'$ llamado imagen de P

$$R^n \quad \rightarrow \quad R$$

$$P(x_1 ,x_2 ....x_n) \in D \rightarrow P' \in F$$

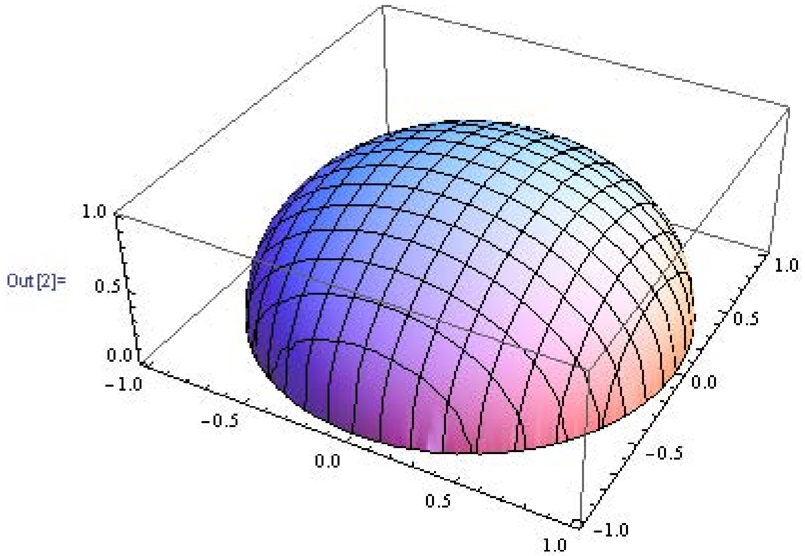
En lo sucesivo, nos referiremos a los casos en que $E \equiv R^{2,}$ es evidente que la generalización a R^n es inmediata

7.1. Campo de definición de una función de varias variables.

Definición . El campo de definición de una función se define como el conjunto de puntos que tienen imagen.

Ejercicios de aplicación

1. Calcular el dominio de definición de la función $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$



7.2. Operaciones con funciones de varias variables

Sean f(x, y) y g(x, y) dos funciones de dos variables. Definimos las siguientes operaciones

$$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$$

$$(f.g)(x, y) \;\; = f(x, y)\,.\,g(x, y)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x\,, y) \;\; = \left(\frac{f(x\,, y)}{g(x, y}\right)$$

Siempre que g(x, y) ≠0

7.3. Limite de una función de dos variables

La función z= f(x, y), se dice que tiene limite 1 cuando el punto P(x, y) → (a, b) y se escribe:

Lim f(x, y) = 1

(x ,y)→(a, b)

Si dado ϵ >0, se puede determinar un numero δ tal que si

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 1| < \varepsilon$$

Es decir, los valores de la función f(x, y) difieren del limite 1 en menos de una cantidad ϵ, siempre que se tome el punto (x, y) interior al circulo de centro (a, b) y radio δ . Sobre el valor de la función en el punto (a, b) nada suponemos. Esta manera de tender al limite cuando (x , y) -> (a , b) se llama limite doble o bidimensional , lo cual supone que el punto (x ,y) se aproxima al punto (a , b) por cualquier curva o conjunto de puntos con tal que este contenido en una sucesión de círculos de centro (a , b) cuyos radios tienden a cero . La existencia del limite es independiente de la forma de tender el punto (x, y) $\rightarrow$ (a, b)

Hasta ahora se ha supuesto que el punto (x ,y) $\rightarrow$ (a ,b) por cualquier subconjunto de puntos .Supongamos ahora que el punto (x , y)$\rightarrow$ (a , b) siguiendo la recta y - b =m (x - a) o con mas generalidad la curva y = η(x) , siempre que estas pertenezcan al campo de definición de la función z = f (x , y) .Se define el limite en una dirección por

$$\lim_{(x,y=\eta(x))\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x,\eta(x))$$

El límite anterior se reduce al cálculo del límite de funciones de una variable, Para que exista el límite doble en el punto (a, b), los límites en dicho punto según todas las direcciones y a lo largo de todas las curvas tienen que coincidir

7.3.1. Limites sucesivos o reiterados Se definen los limites sucesivos o reiterados por

$$\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right] = \lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$$

Lo cual supone que se calcula primero el límite con respecto a una de las variables, mientras la otra permanece con un valor fijo, a continuación se determina el límite de este límite con respecto a la segunda variable.

Si existe el límite radial, existe el límite reiterado ya que el límite reiterado consiste en seguir un camino particular formado por una

7.3.2. Resumen . Si existen los límites reiterados y son distintos, no existe

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

2. Aun existiendo los limites reiterados y ser estos iguales puede ocurrir que no exista

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

3. Puede existir el límite doble y no existir alguno o ninguno de los límites reiterados.

4. Si existe uno de los limites reiterados, el limite doble en caso de existir tiene que coincidir con el

5. La existencia del límite doble, implica que existen todos los direccionales y todos coinciden con el valor del límite doble.

7.3.3. Condiciones necesarias para que exista el límite

1. Si existen los límites reiterados estos coinciden

2. El límite radial no depende de m

3. El límite direccional no depende del ángulo θ

4. Si existen los límites anteriores estos coinciden

7.3.4. Calculo del limite de una función de dos variables: Para calcular el limite doble busquemos la ecuación de una curva que pasando por el punto (a , b) comprenda todos los caminos posibles . La ecuación de dicha curva en coordenadas paramétricas es:

$$x = a + t$$

$$|y = b + t\, h\,(t)$$

Si el punto $(x, y) \longrightarrow (a,b)$ y teniendo en cuenta las ecuaciones paramétricas anteriores , resulta que $t \to 0$, así como $th(t) \to 0$. De lo anterior resulta que h (t) es cualquier función de t con tal que: $t\, h\,(t) \to 0$. Supondremos en principio que h (t) es un polinomio, si para cualquier polinomio resulta la misma solución se supondrá seguidamente que h (t) tiende a infinito siendo $t\, h\,(t) \to 0$.

7.4. Continuidad de una función de dos variables

Sea la función

$$\begin{aligned} R^2 &\to R \\ (x, y) &\to z = f(x, y) \end{aligned}$$

Se dice continua en el punto (a, b) si se verifica:

1. La función esta definida en el punto (a , b)

2. Existe el limite doble : Lim f (x , y) = l , cuando (x , y) → (a , b)

El límite coincide con el valor de la función en el punto (a, b)

7.5. Derivadas parciales de funciones de dos variables

Sea la función $z = f(x, y)$, consideremos y=Cte, en estas condiciones la función depende de una sola variable independiente x. Se define la derivada parcial respecto a x en el punto P(a, b) como el límite si existe y es finito

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(a,b)} = f'_x(a,b) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a+h_1, b) - f(a,b)}{h_1}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(a,b)} = f'_y(a,b) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(a, b+h_2) - f(a,b)}{h_2}$$

Se dice que la función n f(x,y) es derivable en (a,b), si y solo si tiene derivadas parciales en dicho punto , sean o no iguales

7.6. Derivadas parciales segundas

Sea la función

$$\begin{aligned} R^2 &\to R \\ (x,y) &\to z = f(x,y) \end{aligned}$$

Se definen las derivadas segundas de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

7.7. Teorema de Schwarz

Se demuestra que si una función z=f(x, y) esta definida en un entorno del punto P(x, y) y exiten en dicho entorno las derivadas las derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Si estas derivadas son continuas en un entorno del punto P(x, y), entonces existe $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ y se verifica

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

7.8. Diferencial de una función de dos variables

Sea la función

$$\begin{array}{ll} R^2 & \rightarrow\ R \\ (x, y) & \rightarrow z = f(x, y) \end{array}$$

Que suponemos continua y que admite derivadas parciales continuas en una bola de centro P(x,y) y radio r . Si a partir del punto P(x,y) damos sendos incrementos Δx y Δy a las variables independientes de la función se verifica

$$\Delta z = f(x + \Delta x , y + \Delta y) - f(x, y)$$

Definición de función diferenciable. Se dice que la función z=f(x, y) es diferenciable en el punto P(x, y) si cualquier incremento Δz se puede expresar de la forma

$$\Delta z = f(x + \Delta x , y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2\ \Delta y$$

Donde $\varepsilon_1(\Delta x , \Delta y)$, $\varepsilon_2(\Delta x , \Delta y)$ son infinitemos que tienden a cero cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$

A la parte principal de este incremento Δz se le denomina diferencial de la función en el punto P(x,y) y se la designa por dz

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

7.9. Derivada según dirección

Sea z=f(x,y) una función de dos variables y u=(Cos θ , Sen θ) $0 \le \theta < 2\pi$ un vector unitario. Se llama derivada direccional de f en (a,b) en la dirección de u al siguiente limite (si existe)

$$D_u\, f(a,b) = D_\theta\, f(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\cos\theta, b + h\,\mathrm{sen}\,\theta) - f(a,b)}{h}$$

Cuando la función es diferenciable en el punto, la derivada direccional se puede expresar en función de las derivadas parciales

7.10. Diferenciales sucesivas

Sea la función

$$\begin{array}{ll} R^2 & \to R \\ (x,y) & \to z = f(x,y) \end{array}$$

Que supondremos diferenciable. Por tanto

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Si se verifica el teorema de Schwarz se obtiene

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^2$$

Generalizando se tiene

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^n$$

7.11. Vector gradiente

Sea f: $D \subset R^2 \longrightarrow R$ una función diferenciable en un punto (x,y) . Definimos en vector gradiente de f en (x, y) al vector

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}$$

En el punto P(x, y)

7.11.1. Propiedades del vector gradiente

1. Si f(x, y) es diferenciable en el punto P(a, b) la derivada direccional en la dirección del vector unitario u , viene dado por

$$D_u f(a,b) = \nabla f(a,b).\overline{u}$$

2. La derivada direccional es máxima en la dirección y sentido del gradiente, mínima en sentido contrario, y nula en la dirección perpendicular al gradiente, además, el valor máximo de esta derivada es el modulo del Gradiente.

Ejercicios resueltos

1. Calcular los límites reiterados, radiales y dobles en (0,0) de la función

$$z = f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

Limites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}\right] = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}\right] = 1$$

Limites radiales según rectas y= m x

$$\operatorname*{Lim}_{\substack{y = m\,x \\ x \to 0}} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \operatorname*{Lim}_{x \to 0} \frac{m^2}{1 + m^2}$$

No exite el límite doble o funcional ya que los limites reiterados son diferentes y también porque al variara m varia el limite radial

2. Estudiar el límite funcional en el origen de la función

$$z = \frac{x^2\, y}{x^5 + y^2}$$

Calculamos el limite radial en la dirección y= m x

$$\operatorname*{Lim}_{\substack{y = mx \\ x \to 0}} \frac{x^2\, y}{x^5 + y^2} = \operatorname*{Lim}_{x \to 0} \frac{m\,x}{m^2 + x^3} = 0$$

Veamos doble o funcional .Calculemos el límite a lo largo de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = t \\ y = t\,h(t) \quad \text{siendo} \quad h(t) = t \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\operatorname{Lim} \frac{x^2\, y}{x^5 + y^2} = \operatorname*{Lim}_{t \to 0} \frac{1}{1 + t} = 1$$

Vamos a calcular ahora el límite a lo largo de la curva de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = t \\ y = t\,h(t) \quad \text{siendo} \quad h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \ \text{de forma que} \ t\,h(t) = 0 \ \text{cuando}\ t \to 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Lim} \frac{x^2\, y}{x^5 + y^2} = \operatorname*{Lim}_{t \to 0} \frac{t\sqrt{t}}{1 + t^4} = 0$$

No existe límite funcional, ya que los límites a lo largo de curvas que pasan por el origen son distintos

3. Calcular la derivada del campo escalar f(x, y)=Arco Tang(x y) en el punto P(1,1) según la dirección de la parábola $y= x^2$, en el sentido del crecimiento positivo

El vector gradiente viene dado por

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,1)} = \frac{y}{1+x^2 y^2} = \frac{1}{2} \qquad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)} = \frac{x}{1+x^2 y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\nabla f = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

El vector tangente unitario a la parábola $y = x^2$ en el punto (1,1) con la primera componente positivo

Vector tangente= (1, 2 x) = (1, 2)⟹Vector tangente unitario = **u** = ($\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$)

Derivada direccional en la dirección del vector **u:** $\nabla f.\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$

4. Dada la función $f(x, y, z)= x^2+2 y^2+3 z^2 -2 x y +4 x z + 2 y z$

La función es de clase 2. Luego se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(d\,x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(d\,y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(d\,z)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy +$$

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dy\,dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + 4z \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y + 2z \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x + 2y + 6z \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2$$

$$d^2 f = 2(dx)^2 + 4\ (dy)^2 + 6(dz)^2 - 4\,dx\,dy + 8\,dx\,dz + 4\,dy\,dz$$

5. Dada la función f(x, y, z)= x y z .Calcular $d^2 f$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(dz)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dy\,dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$$d^2 f = 2\,z\,dx\,dx + 2\,y\,dx\,dz + 2\,x\,dy\,dz$$

6. Dada la función $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Calcular el valor de la expresión

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\ ,\ \frac{\partial f^2}{\partial x^2} = \frac{-y^2 - z^2 + 2x^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Por la simetría del problema se tiene

$$\frac{\partial f^2}{\partial y^2} = \frac{-z^2 - x^2 + 2y^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}\ ,\ \frac{\partial f^2}{\partial z^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Luego A=0

7. Estudiar la derivada de la función

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{x + y + z}$$

según la dirección (1,1,0) en el punto (1,0,1)

Las derivadas parciales en el punto (1, 0,1) son continuas como cociente de funciones continuas

$$\left(\frac{df}{\partial x}\right)_P = \frac{y^2+yz}{(x+y+z)^2} = 0 \quad , \quad \left(\frac{df}{\partial y}\right)_P = \frac{x^2+xz}{(x+y+z)^2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \left(\frac{df}{\partial z}\right)_P = \frac{-xy}{(x+y+z)^2} = 0$$

Sea

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + 0\vec{k}$$

El vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que el vector **u**

$$\left(\frac{df}{du}\right)_P = \nabla f . \vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

8. Dada la aplicación de $R^2 \longrightarrow R$

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

a) Calcular el gradiente de f en los puntos A (-1,0) , B(1,-1)

b) Determinar la derivada de z en los puntos A y B según la dirección x-y=0

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A = 3 \quad , \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_B = 3 \Rightarrow (\nabla f)_A = 3\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$(\nabla f)_B = 6\vec{i} + 0\vec{j}$$

El vector director de esta recta es

$$\vec{v} = \bar{i} + \bar{j} \Rightarrow |v| = \sqrt{2}$$

El vector unitario de la recta es

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\left(\frac{df}{du}\right)_A = \nabla f . \vec{u} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

9. Calcular d u en la función

$$u=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

$$u^2=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Rightarrow 2u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xy^2}{\sqrt{x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2yx^2}{\sqrt{x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$du=\frac{2xy^2}{\sqrt{x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx+\frac{-2yx^2}{\sqrt{x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy$$

10. Sea la función

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+2xy^2}{x^2+y^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Calcular los limites direccionales según rectas para (x,y)→(0,0)
b) Calcular los limites reiterados para (x, y)→(0,0)
c) Estudiar la continuidad de f en el punto (0,0)
d) Demostrar que f admite derivadas direccionales según cualquier dirección en (0,0)
e) Calcular la derivada en la dirección del vector (1,1) en el punto (0,0)
f) Calcular el gradiente de f en el punto (0,0)
g) Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto (0,0)
a) Limites direccionales

$$\lim_{\substack{y=mx\\x\to 0}}\frac{x^3+2xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2m^2x}{1+m^2}=0$$

b) Limites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^3+2xy^2}{x^2+y^2}\right]=\lim_{x\to 0}[x]=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2xy^2}{x^2+y^2}\right]=\lim_{y\to 0}[0]=0$$

c) Limite funcional. Calculamos el limite a lo largo de la curva de ecuaciones: x=t, y=t^2

$$\lim_{t\to 0}\frac{t+2t^3}{1+t^2}=0$$

Calculemos el límite a lo largo de la curva de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=t\,h(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{siendo } h(t)=\frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=\sqrt{t} \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{1+t}=0$$

d) Sea

$$\left.\begin{array}{l} x+\Delta x=0+\Delta s\cos\alpha \\ y+\Delta y=0+\Delta s\,\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow f_s'=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta s}=$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x^3+2\Delta x\,\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s^3\cos^3\alpha+2\Delta s^3\cos\alpha\,\operatorname{sen}^2\alpha}{\Delta s^3}=\cos^3\alpha+2\cos\alpha\,\operatorname{sen}^2\alpha$$

e) Derivada direccional en la dirección del vector (1 ,1)

$$v(\text{unitario})=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$f_s'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x^3 + 0}{\Delta x^2}}{\Delta x} = 1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

g)

$$\Delta z = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = \frac{h^3 + 2hk^2}{h^2+k^2} = 1h + 0k + \varepsilon\sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow \varepsilon(h,k) = \frac{hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculemos el límite doble o funcional de la expresión anterior. Limite radial

$$\lim \varepsilon(h,k) = \lim_{\substack{k = mh \\ h \to 0}} \frac{hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim \frac{m^2}{\left(1+m^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

El límite radial no exite ya que depende de m. No existe el límite funcional, la función no es diferenciable

11. Sea la función

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcular los limites direccionales según rectas y los limites reiterados cuando (x ,y)→(0 ,0)

b) ¿Que puede deducirse respecto de la continuidad de f(x,y) ¿

c) ¿Es f(x, y) es una función diferenciable ¿

a) Limite direccional según la recta y = m x

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+m\,x)^2}{x^2+m^2\,x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+m)^2}{1+m^2}$$

Este limite depende de m , luego no exite limite radial lo cual implica que no exite el limite funcional

Limites reiterados

$$L_1 = \lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \right] = \lim_{y \to 0} [1] = 1$$

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \right] = \lim_{x \to 0} [1] = 1$$

b) Al no tener limite funcional en el punto (0 ,0), la función no es continua en dicho punto

c) En (0 ,0) no es diferenciable por no ser la función continua en dicho punto. Veamos cualquier otro punto $(x, y) \neq (0\ ,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2(x+y)(y^2-x\,y)}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2(x+y)(x^2-x\,y)}{(x^2+y^2)^2}$$

Estas derivadas parciales son continuas en todos punto $(x, y) \neq (0\ ,0)$, como cociente de funciones continuas no anulándose el denominador , luego f(x,y) es diferenciable en todo punto $(x, y) \neq (0\ ,0)$

12. Calcular la diferencial de la función $z = f(x, y) = e^x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{tang} y$ en el punto (0,0)

Calculo de las derivadas parciales

$$f_x = e^x \cos y + \cos x \tan y \quad , \quad f_y = -e^x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \left(1+\tan^2 y\right)$$

$$(f_x)_{(0,0)} = 1 \quad , \quad (f_y)_{(0,0)} = 0$$

Las funciones f_x (x,y) , f_y(x,y) son continuas en el punto (0,0) por tanto la función f es diferenciable

$$d\,f = 1\,dx + 0\,dy = dx$$

13. Calcular la derivada direccional de $z = f(x, y) = L\sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto (1,1) según $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Calculemos las derivadas parciales en el punto (1,1)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,1)} = \frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{1}{2} \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)} = \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{1}{2}$$

Estas derivadas parciales son continuas, porque son cociente de funciones continuas en dicho punto, por tanto la función diferenciable en dicho punto, luego podemos formar la función gradiente

$$\left|\nabla f\right| \cos\alpha = \frac{\nabla f . v}{\left|v\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\nabla f . v = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \left|v\right| = 1$$

Calcular la derivada direccional de $z = f(x, y) = L\sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto (1,1) según $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Calculemos las derivadas parciales en el punto (1,1)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,1)} = \frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{1}{2} \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)} = \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{1}{2}$$

Estas derivadas parciales son continuas, porque son cociente de funciones continuas en dicho punto, por tanto la función diferenciable en dicho punto, luego podemos formar la función gradiente

$$\left|\nabla f\right| \cos\alpha = \frac{\nabla f . v}{\left|v\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\nabla f . v = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \left|v\right| = 1$$

14. Calcular la derivada direccional de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto (1,1) en el sentido del vector v que forma un ángulo de 60 grados en el sentido positivo del eje OX

Calculemos las derivadas parciales en el punto (1,1)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,1)} = 2x = 2 \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)} = 2y = 2$$

Estas derivadas parciales son continuas, por tanto la función diferenciable en dicho punto, luego podemos formar la función gradiente

$$|\nabla f| \cos\alpha = \frac{\nabla f . v}{|v|} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\nabla f . v = 1 + \sqrt{3} \quad , \quad |v| = 1$$

15. Si la temperatura de un depósito cilíndrico viene dada por la función $T(x, y, z) = 10\left(x e^{-y^2} + z e^{-x^2}\right)$ y nos situamos en un punto de coordenadas P(0,0,1) . Se pide

a) Determinar cual es la razón de cambio de la temperatura al desplazarnos hacia el punto de coordenadas Q(2, 3,1)

b) En que dirección debemos movernos para que la temperatura disminuya lo mas rápidamente posible ¿Para que aumente?

c)Si no quisiéramos apreciar cambio alguno de la temperatura ¿ que dirección debemos tomar ¿

d) Si nos movemos siguiendo el camino descrito por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2} t , 0 \ , -\frac{3\sqrt{2}}{2} t \right)$

a)

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(0,0,1)} = 10\,(e^{-y^2} - 2xze^{-x^2}) = 10 \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(0,0,1)} = 10\,(-2xye^{-y^2}) \qquad = 0 \\ \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{(0,0,1)} = 10\,(e^{-x^2}) \qquad = 10 \end{cases}$$

Vector PQ = **v** = (2, 3,0). Vector unitario en la dirección PQ $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j} + 0\vec{k}\right)$

Vector gradiente

$$\nabla f = 10\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 10\,\vec{k}$$

Calculemos la derivada direccional

$$|\nabla f|\cos\alpha = \frac{\nabla f \cdot v}{|v|} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

b) La dirección en la debemos movernos para que la temperatura disminuya lo mas rápidamente posible es la dirección de $-\nabla T(0,0,1) = (-10, 0, -10)$

La dirección en la debemos movernos para que la temperatura aumente lo mas rápidamente posible es la dirección de $\nabla T(0,0,1) = (10, 0, 10)$

c) Para que no haya cambio alguno de la temperatura, sea un vector de componentes (v_1, v_2, v_3) , entonces el producto escalar $\nabla f.v = 0 \Longrightarrow$

$$\nabla f.v = 10\,v_1 + 10\,v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_3$$

Luego el vector seria $(v_1, v_2, -v_1) = (0, 1, 0)$

d) Si nos movemos siguiendo el camino descrito por $T(t) = 10\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}t - \frac{3\sqrt{2}}{2}t\,e^{\frac{-9}{2}t^2}\right) = -15\sqrt{2}\,t[1 + e^{\frac{-9}{2}t^2}]$

$$\frac{dT}{dt} = -15\sqrt{2}\left[1 + e^{-\frac{9t^2}{2}}\right] + 15\sqrt{2}\,t\left(e^{-\frac{9t^2}{2}}\,9\,t\right)$$

16. Calcular $d^3 z$ en la función $z = x^3 - 3xy + y^3$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^3 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 x}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

$$d^3 z = 6\,dx^3 + 6\,dy^3$$

17. Dada la función $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ y el punto (2,3). Calcular la derivada según la dirección 3 x-2 y=0 sentido el de las x crecientes. Hallar también el valor máximo y mínimo de la derivada direccional

El vector director de la rectas es (2, 3). Luego $v=2\vec{i}+3\vec{j}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(2,3)}=-\frac{4}{169} \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(2,3)}=-\frac{6}{169}$$

Estas derivadas parciales son continuas en el punto P(2,3), por tanto la función diferenciable en dicho punto, luego podemos formar la función gradiente

$$\nabla f=\frac{-4}{169}i-\frac{6}{169}j$$

$$|\nabla f|\cos\alpha=\frac{\nabla f.v}{|v|}=\frac{-2}{13\sqrt{13}}$$

Máximo en la dirección de ∇f , el valor de la derivada será $|\nabla f|=\dfrac{2}{13\sqrt{13}}$

Mínimo en la dirección de - ∇f , el valor de la derivada será $-|\nabla f|=\dfrac{-2}{13\sqrt{13}}$

18. Calcular la diferencial total de $u=\dfrac{x+y}{z-2y}$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$du=\frac{1}{z-2y}dx+\frac{2x+z}{(z-2y)^2}dy-\frac{x+y}{(z-2y)^2}dz$$

19. Dada la función $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ .Calcular

a) f (1,2)

b) f (1.05, 2.1) y calcular Δz

c) Usar la diferencial total dz para obtener una aproximación de Δz

a) $$f(1,2)=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\approx 2.23607$$

$$f(1.05,2.1)=\sqrt{5.4504}\approx 2.33461$$

$$\Delta z = f(1.05,2.1)-f(1,2)=0.09854$$

b) Calculemos la diferencial total de la función en el punto (1 ,2)

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad , \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$d\,x=0.05 \ \ , \ \ dy=0.1$$

$$dz=\frac{1}{\sqrt{5}}0.05+\frac{2}{\sqrt{5}}0.1\approx 0.11180$$

20. Calcular el gradiente de la función $f(x,y,z)=x\,e^{yz}$ y el valor máximo de la derivada direccional en el punto (2, 0,-4)

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

En el punto (2, 0,-4) será $\nabla f=\vec{i}-8\,\vec{j}$. La derivada direccional máxima es $|\nabla f|=\sqrt{65}$

21. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $x\,y^2+3x-z^2=4$ en el punto (2, 1,-2)

Calculemos gradiente de f

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla f=4\,i+4\,j+4\,k$$

Este vector es normal a la superficie en el punto (2, 1,-2)

Luego la ecuación del plano tangente será

$$4(x-2)+4(y-2)+4(z+2)=0 \Longrightarrow x+y+z=1$$

22. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y) = \frac{y}{x}$ en el punto (1,2, 2)

Calculemos gradiente a la superficie $\frac{y}{x} - z = 0$ en el punto (1, 2,2)

$$\nabla f = -2\,i + j - k$$

Ecuación del plano tangente: 2 x – y + z - 2=0

23. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + 2\,y^2$, paralelo al plano x + 2 y –z =10

Un vector del plano tangente en punto (x, y, f(x, y)) será $(f_x\ , f_y\ ,-1)$ .Por tanto los vectores (1, 2,-1) y (2x, 4y,-1) deben ser proporciónales, por tanto

$$\frac{2\,x}{1} = \frac{4\,y}{2} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow\ z = \frac{3}{4}$$

Luego la ecuación del plano tangente en dicho punto será

$$z - \frac{3}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x + 2\,y - z - \frac{3}{4} = 0$$

CAPITULO 8. CURVAS Y SUPERFICIES

8.1. Curvas en el plano

Definición . Definimos curva en el plano

$$C \equiv \alpha : [a\, ,b] \;\; \subset R \;\; \to R^2$$
$$t \to \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

que nos lleva a la ecuación paramétrica de la curva C : t∈[a,b] ,curva que une el punto A con el punto B del plano

En este punto definimos las características más importantes de las curvas o caminos.

• Una curva C es continua si x(t) , y(t) son continuas.

• Una curva C es cerrada si A = B, es decir, si empieza y termina en el mismo punto.

• Una curva C es simple si no pasa dos veces por el mismo punto.

• Una curva C es regular si existen x'(t) y'(t) y son continuas. Cuando ocurre esto salvo en un número finito de puntos se dice que la curva es regular a trozos. Salvo que se indique lo contrario trabajaremos con curvas regulares a trozos.

• Una curva C es rectificable si tiene longitud finita.

• Una curva C es de Jordan si es cerrada y simple.

8.2. Superficies: primeros conceptos

El estudio de las superficies exige una representación analítica de ellas. Vamos a ver diversas representaciones comenzando por el caso de coordenadas cartesianas. Consideremos una referencia afín, $\{0, \bar{i}\, , \bar{j}, \bar{k}\}$ en R^3 donde los vectores $\{\bar{i}\, , \bar{j}, \bar{k}\}$ forman base ortonormal.

Definición . Una superficie es una aplicación $\bar{r} : D \subset R^2 \to R^3$, es decir

$$\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad , \ (u,v) \in D$$

La expresión $\bar{r}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k}$ recibe el nombre de ecuación vectorial de la superficie. Descomponiendo dicha expresión en sus funciones componentes se obtiene

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Denominadas ecuaciones paramétricas de la superficie. Los parámetros u y v reciben el nombre de coordenadas curvilíneas de la superficie. Se denomina ecuación explícita de la superficie aquella en que los parámetros son dos las variables por ejemplo (x, y) obteniéndose z = f (x, y) Una relación entre las variables x, y, z de la forma F(x, y, z) = 0 recibe el nombre de ecuación implícita de la superficie.

Una superficie se dice de clase C^k si la función $\bar{r}$ (u, v) es de clase C^k, o lo que es lo mismo, si las funciones x (u, v), y (u, v), z (u, v) son de clase C^k .Si no se dice otra cosa se supondrá que la superficie es de clase C^k

8.3. Algunas superficies importantes

Describiremos aquí las superficies más importantes que aparecen en la práctica. Empezaremos con las principales cuádricas canónicas: Esfera, elipsoide, hiperboloides, paraboloides, y algunos casos de cilindros y conos. A continuación analizaremos las superficies de revolución y traslación para acabar con una pincelada sobre las superficies regladas, que serán analizadas con más detenimiento posteriormente. Esta clasificación que hemos realizado no es excluyente. Por ejemplo un cilindro circular es una superficie de revolución y reglada.

La esfera de ecuación implícita $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, admite como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v & -\dfrac{\pi}{2} \le u \le \dfrac{\pi}{2} \\ y = a\cos u \operatorname{sen} v & 0 \le v < 2\pi \\ z = a \operatorname{sen} u \end{cases}$$

El elipsoide (Fig.1) de ecuación implícita $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, admite como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v & -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ y = b\cos u \operatorname{sen} v & 0 \le v < 2\pi \\ z = c \operatorname{sen} u & \end{cases}$$

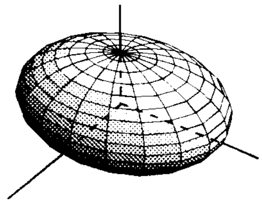


Fig. 1. Elipsoide

Paraboloide elíptico: Tiene por ecuación explicita: $z = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ .Las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\,u\cos v & 0 \le u < \infty \\ y = b\,u \operatorname{sen} v & 0 \le v < 2\pi \\ z = u^2 & \end{cases}$$

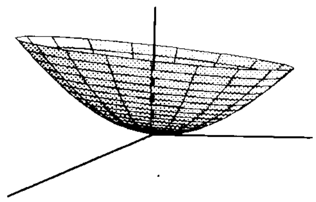


Fig. 2. Paraboloide elíptico

Si a = b el paraboloide se denomina circular.

Paraboloide Hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ es la ecuación del paraboloide hiperbólico (Fig.3). La intersección de esta superficie con planos z = Cte. son hipérbolas. Unas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\,u & -\infty < u < \infty \\ y = b\,v & -\infty < v < \infty \\ z = u^2 - v^2 & \end{cases}$$

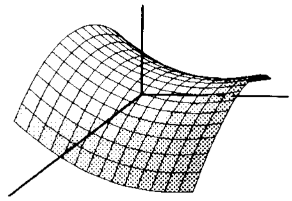


Fig.3.Paraboloide hiperbólico

Hiperboloide de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Fig. 4). Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\ \cosh u \cos v & -\infty < u < \infty \\ y = b\ \cos h\, u\, \mathrm{sen}\, v & 0 \le v < 2\pi \\ z = c\, \mathrm{sen}\, h\, u & \end{cases}$$

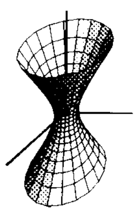


Fig. 4. Hiperboloide de una hoja

Hiperboloide de dos hojas: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ .Unas ecuaciones paramétricas de la primera hoja son

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{sen\,h}\,u\cos v & 0 \le u < \infty \\ y = b\,\mathrm{sen\,h}\,u\,\mathrm{sen}\,v & 0 \le v < 2\pi \\ z = c\cos h\,u \end{cases}$$

y unas ecuaciones paramétricas de la segunda hoja son

$$\begin{cases} x = a\ \mathrm{sen\,h}\,u\cos v & 0 \le u < \infty \\ y = b\,\mathrm{sen\,h}\,u\,\mathrm{sen}\,v & 0 \le v < 2\pi \\ z = .-c\cos u \end{cases}$$

Cilindro circular con generatrices paralelas al eje OZ, tiene por ecuación implícita $x^2 + y^2 = a^2$. Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\ \cos v & -\infty < u < \infty \\ y = a\ \mathrm{sen}\,v & 0 \le v < 2\pi \\ z = u \end{cases}$$

Cono circular de vértice el origen puede expresarse en forma $x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$

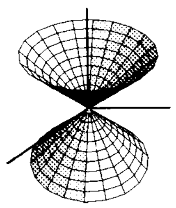


Fig. 5: Cono circular

Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\,u\cos v & -\infty < u < \infty \\ y = a\,u\,\mathrm{sen}\,v & 0 \le v < 2\pi \\ z = u \end{cases}$$

8.4. Primeros conceptos sobre superficies

Definición . Sea la superficie S definida en forma implícita por F(x, y, z) = 0, donde la función F es al menos de clase C^1. Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie S, esto es, verifica $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ .El punto P_0 se dice punto singular de S sí

$$|F_x(x_0, y_0, z_0)| + |F_y(x_0, y_0, z_0)| + |F_z(x_0, y_0, z_0)| = 0$$

En caso contrario el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ recibe el nombre de punto regular.

Sea la superficie S de ecuaciones paramétricas

$$\bar{r}(u, v) = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

donde **r** (u, v) es al menos de clase C^1 en un entorno de $(u, v) \in D$.

El punto $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ es un punto regular de S si se verifica $\left(\bar{r}_u \times \bar{r}_v\right)_{(u_0, v_0)} \neq 0$ que es equivalente a decir que la matriz tiene rango dos.

Un punto de la superficie S es punto singular de S si no es regular.

El que un punto sea singular para una superficie expresada en forma implícita es algo inherente a la superficie. Así por ejemplo, el punto (0, 0, 0) es un punto singular para el cono de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, que corresponde a su vértice.

Sin embargo, ser punto singular para una superficie expresada en forma paramétrica puede depender de la parametrización elegida, pudiendo un punto ser singular para una parametrización y regular para otra.

Los dos ejemplos anteriores muestran que hay dos tipos de puntos singulares: Esenciales, que son debidos a la "geometría" de la superficie y que son independientes de la parametrización de la superficie y artificiales, que se deben a la parametrización elegida para la superficie.

En todo lo que sigue supondremos que todos los puntos de una superficie son regulares. En caso de existencia de puntos singulares se pondrá de manifiesto de forma explícita.

8.5. Vectores normales a una superficie. Plano tangente

Un vector normal a la superficie $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ en un punto regular P, correspondiente a los valores (u_0, v_0) de los parámetros, es cualquier vector que tenga la dirección del vector

$$\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right)_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Si la superficie viene expresada en la forma implícita, F(x, y, z) = 0, un vector normal a la superficie, en un punto regular $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de ella, viene dado por el vector ($F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y(x_0, y_0, z_0)$, $F_z(x_0, y_0, z_0)$)

Un vector normal unitario será el vector $\nu_{(u_0, v_0)} = \dfrac{(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)_{(u_0, v_0)}}{\left|(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)_{(u_0, v_0)}\right|}$

El plano tangente a la superficie $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ en un punto regular P de coordenadas (x_0, y_0, z_0) correspondiente a los valores (u_0, v_0) de los parámetros, es el plano que pasa por P y tiene como vector característico un vector normal a la superficie en P. Siendo $\overline{r_*} = (x, y, z)$ una ecuación del plano tangente será

$$\left(\bar{r}^* - \bar{r}(u_0, v_0)\right) . \left(\bar{r}_u \times \bar{r}_v\right)_{(u_0, v_0)} = 0$$

que puede expresarse en la forma

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

El plano tangente contiene a los vectores $\bar{r}_u$, $\overline{r_v}$ lo que nos permitirá deducir, en el apartado siguiente, que dicho plano contiene a todas las rectas tangentes a curvas que estén contenidas en la superficie y pasen por el punto $\bar{r}(u_0, v_0)$

Se denomina recta normal a la superficie en un punto regular P, correspondiente a los valores (u_0, v_0) de los parámetros, a la recta que pasa por P y tiene como vector director un vector normal a la superficie en P. Una ecuación vectorial de la recta normal será

$$\overline{R} = \bar{r}(u_0, v_0) + \lambda\, \bar{r}(u_0, v_0)$$

8.6. Expresiones de una curva sobre una superficie

Sea la superficie $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$.Una curva sobre dicha superficie viene dada por una relación entre los parámetros u y v. Esta relación puede adoptar diversas formas:

1. Forma implícita: $\varphi(u, v)=0$ con $|\varphi_u| + |\varphi_v| =0$

2. Forma explícita: $u = \varphi(v)$

3. Forma paramétrica: $u=u(\lambda)$, $v=v(\lambda)$

4. Forma diferencial: $\dfrac{dv}{du} = f(u, v)$

La forma diferencial representa una familia de curvas, ya que su integración dará lugar a una expresión de la forma $\varphi(u, v, k)=0$, debiéndose fijar alguna condición para determinar la constante k.

5. Forma cuadrática diferencial: $A(u,v)du^2+2B(u,v)du\,dv+C(u,v)dv^2=0$. Vamos a suponer $C\neq 0$. Resolviendo $C\left(\frac{dv}{du}\right)^2+2B\frac{dv}{du}+A=0$ se obtienen dos familias de curvas en forma diferencial que son: $\frac{dv}{du}=f_1(u,v)\,,\frac{dv}{du}=f_2(u,v)$ para valores (u, v) tales que B^2 - AC > 0.Representa pues dos familias de curvas sobre la superficie.

8.7. Curvas coordenadas sobre una superficie

Las relaciones $u=C_1$ (Cte), $v=C_2$ determinan al variar v y u respectivamente, dos familias de curvas sobre la superficie que reciben el nombre de curvas coordenadas o paramétricas

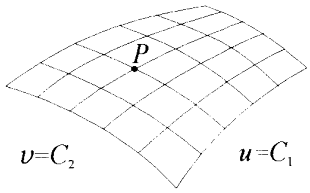


Fig. 8

Las curvas $u=C_1\,,v=C_2$ fibran la superficie

Si queremos prever el futuro de la matemática, el camino adecuado para conseguirlo es el de estudiar la historia y el estado actual de esta ciencia.

Henri Poincaré