CAPITULO 1.FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Definición 1.1 Se llama función numérica a una aplicación de un conjunto A en R, f: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$ .En lugar de función numérica se dice también función real. Se representa como y = f(x), siendo x la variable independiente e y la variable dependiente. El conjunto de las funciones que aplican **A** en **R** se designa por F(**A**, **R**). En lo que sigue supondremos $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}$ o bien $\mathbf{A} \equiv R$

Definición 1.2 (Campo de definición de una función) Se dice que una función esta definida en un punto x $\in$A si existe f (x) .El conjunto **A** de todos los valores para los que esta definida la función se llama campo de definición de la función

Definición 1.3 (Imagen de una función) Se llama recorrido o imagen de una función al conjunto de los valores de **R** que tienen por original al menos un elemento de **A**

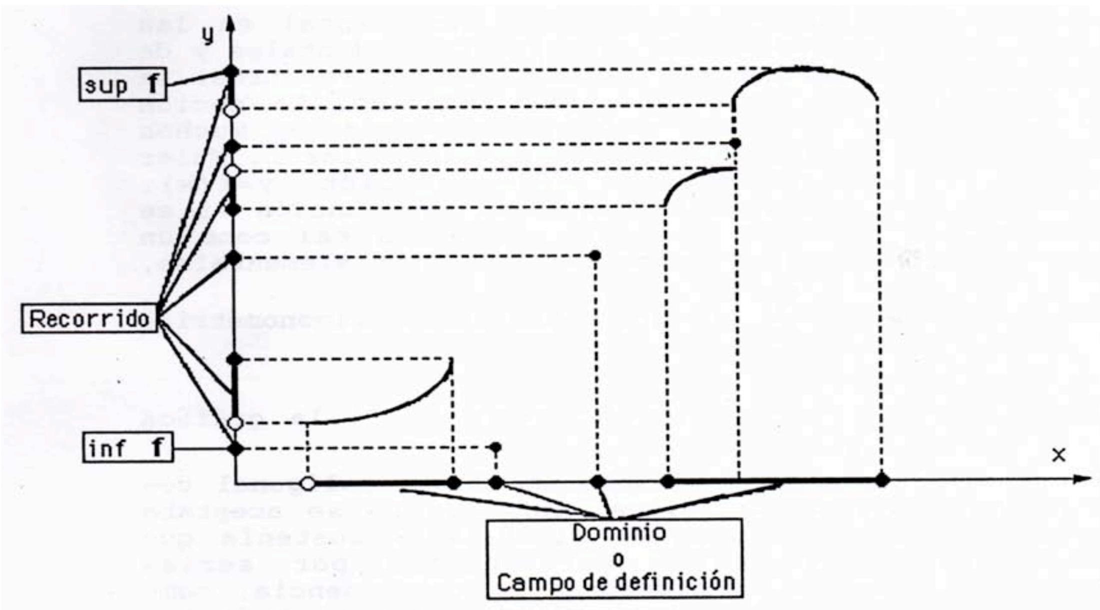


Fig.1. Representación grafica de una función cuyo dominio y recorrido son conjuntos de R , que pueden expresarse mediante la unión de intervalos con puntos aislados

Definición 1.4 (Igualdad de funciones) Sean: $f_1 : \mathbf{A}_1 \rightarrow R$, $f_2 : \mathbf{A}_2 \rightarrow R$ .Se dice que $f_1=f_2$ cuando se verifican las dos condiciones siguientes $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$, $f_1(x)=f_2(x)$, $\forall x\in \mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$

Definición 1.5 .Se llama grafo de f, y se designa por G_f , al subconjunto de A x R dado por
$G_f = \{ (x , f (x) / x \in A) \}$

Ejemplo 1 Recta: y = k x: Dominio R, Imagen R

Circunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$, Dominio = [-1,1], Imagen = [-1,1]

Exponencial: $y = e^x$. Dominio R, Imagen $= (0, \infty)$

Logarítmica: y = L x. Dominio = $(0, \infty)$, Imagen R

Sinusoide: y = sen x. Dominio R, Imagen [-1, 1]

1.2. Operaciones con funciones

Definición 1.6 (Suma de funciones) Sean f_1, f_2 dos funciones del conjunto F (**A**, **R**) definamos la aplicación $(f_1 + f_2)$ de la forma siguiente

$$\mathbf{A} \to \mathbf{R}$$

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

El conjunto de las funciones que aplican **A** en **R** respecto a la operación (+) tiene las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro (que es la función cero), elemento simétrico. Luego F (**A**, **R** +) tiene estructura de grupo abeliano.

Definición 1.7 (Multiplicación de funciones) Sean f_1, f_2 dos funciones del conjunto F (**A**, **R**) .Definamos la aplicación

$$\mathbf{A} \to \mathbf{R}$$

$$(f_1.f_2)(x)=f_1(x).f_2(x),\ \forall x\in \mathbf{A}$$

El conjunto de las funciones que aplican **A** en **R** respecto a la operación (.) tiene las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro así como la propiedad distributiva respecto la suma. Luego F (**A**, **R** +.) respecto a las operaciones (+.) tiene estructura de anillo conmutativo con elemento unidad.

Definición 1.8 (Producto de una función por un elemento del cuerpo R) Sea f una función del junto F(**A**, **R**) y λ un elemento del cuerpo R .Definamos una aplicación $(\lambda.\ f)$ tal que

$$R \times \mathbf{A} \to \mathbf{R}$$

$$(\lambda.\ f)(x)= \lambda\, f(x),\ \forall x\in \mathbf{A},\ \lambda\in R$$

El conjunto F (**A**, **R** +. R) tiene estructura de espacio vectorial sobre R

Definición 1.9 (Cociente de funciones) Dada una función f de **A** en **R**, no existe siempre otra función g de **A** en **R** tal que: f (x) g(x) =1. Si f (x) = 0 para algún elemento $x \in \mathbf{A}$, no existe la función g. Si $f(x) \neq 0$

$\forall$ x $\in$**A** existe la función g .Si f y g son dos funciones cuyo dominio es **A** siendo $g(x)\neq 0, \forall x \in \mathbf{A}$ .Sea llama cociente de estas dos funciones a la función: f(x) / g(x)

Definición 1.10 (Composición de funciones) Sean: f: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$ y g: $A_1 \rightarrow \mathbf{R}$ dos funciones con $f(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}_1$ .Se llama función compuesta ($g_o f$) a la función de **A** en **R** dada por : $(g \circ f)(x)=g[f(x)]$

La composición de funciones verifica las propiedades asociativa sin embargo es evidente que no se verifica la propiedad conmutativa ya que $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

1.3. Clasificación de las funciones

Una primera clasificación de las funciones las separa en analíticas y empíricas según que la relación que liga a la función con las variables sea perfectamente conocida y expresable en forma analítica o, por el contrario, solo se tenga un conocimiento incompleto de aquella relación.

Las funciones analíticas se dividen en explicitas e implícitas. Explicitas cuando aparece despejada en un miembro la variable dependiente en función de la independiente, y = f (x). Implícitas cuando la función y las variables están relacionadas por ecuaciones no resueltas $\psi(x, y)=0$. Las letras f y ψ se llaman característica: designa la ley de dependencia entre la función y sus variables.

Por la naturaleza de las funciones se dividen en algebraicas y transcendentes las algebraicas se dividen en racionales e irracionales, pudiendo ser las racionales enteras o fraccionarias.

Funciones algebraicas son las que pueden expresarse por las operaciones sencillas del álgebra, suma, resta, etc....repetidas un número finito de veces.

Funciones transcendentes es toda función que no sea algebraica, por ejemplo, las series, los productos infinitos, las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc.

Función racional Es la que no contiene variables debajo de radicales o afectada de exponentes fraccionarios. En caso contrario se llama irracional

Función entera Es aquella función racional en la que no entra ninguna variable como divisor o con exponente negativo. En caso contrario se llaman fraccionarias, siendo su forma más general el cociente de dos funciones enteras. Forma general de una función entera

$$y= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

Forma general de una función fraccionaria:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_m x^m}$$

$$
\text{FUNCIONES}\left\{\begin{array}{l}
\text{Algebraicas}\left\{\begin{array}{l}
\text{Explicitas}\left\{\begin{array}{l}
\text{Racionales}\left\{\begin{array}{l}\text{Enteras}\\ \text{Fraccionarias}\end{array}\right.\\
\text{Irracionales}
\end{array}\right.\\
\text{Implícitas}
\end{array}\right.\\
\text{Transcendentes}\left\{\begin{array}{l}\text{Explicitas}\\ \text{Implícitas}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\text{Exponenciales}\\ \text{Logarítmicas}\\ \text{Trigonométricas}\\ \text{Ciclometricas}\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

1.4. Clasificación de las funciones por su constitución

Tanto las funciones algebraicas como las transcendentes se dividen, atendiendo a su constitución, a la forma logarítmica y a la trabazón de las variables en simples y compuestas, directas e inversas, pares e impares, uniformes, multiformes e infinitiformes, funciones periódicas, etc.

Funciones simples Son las que no se pueden descomponer en otras de naturaleza más sencilla. Ejemplos: La potencial $y = x^n$, la exponencial $y = a^x$, las trigonométricas directas y =sen x , etc. Aun cuando el coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante no son simples, por derivarse del seno, sin embargo las incluimos entre las funciones simples

Funciones compuestas Son las que se pueden descomponer en dos o más funciones simples que dependen de una misma variable

Función uniforme Es la que recibe un solo valor para cada uno atribuido a la variable independiente

Función multiforme Si a un valor de la variable independiente corresponde dos o más de la función

Función infinitiforme A un valor de la variable corresponden infinitos valores de la función

Ejemplos: $y = x^2+1$ (Uniforme), $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ (Multiforme), y = arco sen x (Infinitiforme)

Función simétrica Cuando al permutar entre si las variables, la función no cambia de valor

Funciones homogéneas Son aquellas en las que al multiplicar cada una de las variables por una indeterminada k, la función queda multiplicada por una potencia de k igual al grado de homogeneidad

1.5. Funciones acotadas

Una función f∈F(**A**, R) esta acotada si la imagen f (**A**) es una parte acotada del espacio (**R**, d), siendo d un métrica de **R**, es decir la distancia entre dos puntos cualesquiera es finita

Se dice que f es una función acotada superiormente en **A** si existe un numero real K tal que ∀x∈**A** se verifica $f(x) \leq K$

Se dice que f es una función acotada inferiormente en **A** si existe un numero real K' tal que ∀x∈**A** se verifica $K' \leq f(x)$

Si una función esta acotada superior e inferiormente se dice que esta acotada. Sea la función acotada sobre **A**. El conjunto f(**A**) ⊂ R será un subconjunto acotado de **R**. Luego admitirá un extremo superior M y un extremo inferior m. Donde se cumple $m \leq f(x) \leq M$

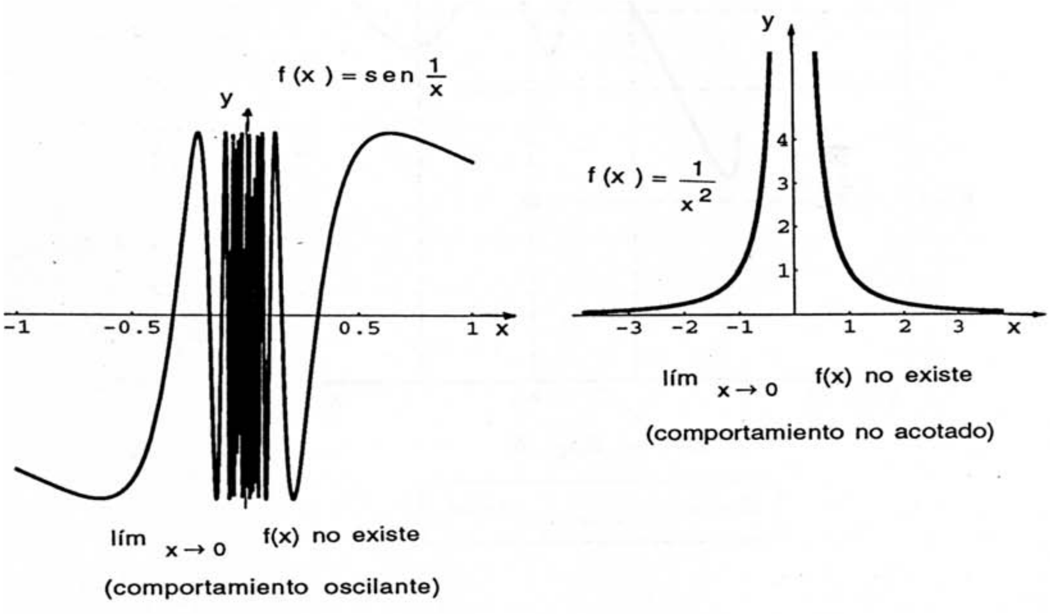


Fig.2.El comportamiento oscilante o no acotado de una función en un entorno de un punto impide la existencia del limite en dicho punto.

1.6. Funciones pares e impares

Función Par Es aquella que no cambia de valor ni de signo al sustituir x por (- x)

Ejemplo: $y = x^4 - x^3$

Función impar Es aquella que cambia de signo al sustituir x por (-x). Ejemplo: y = sen x

Funciones periódicas Es aquella que vuelve a tomar el mismo valor, cuando la variable aumenta o disminuye en una cantidad constante que se llama periodo

$$f(x+T) = f(x+2T) = \dots\dots\dots\dots = F(x+nT)$$

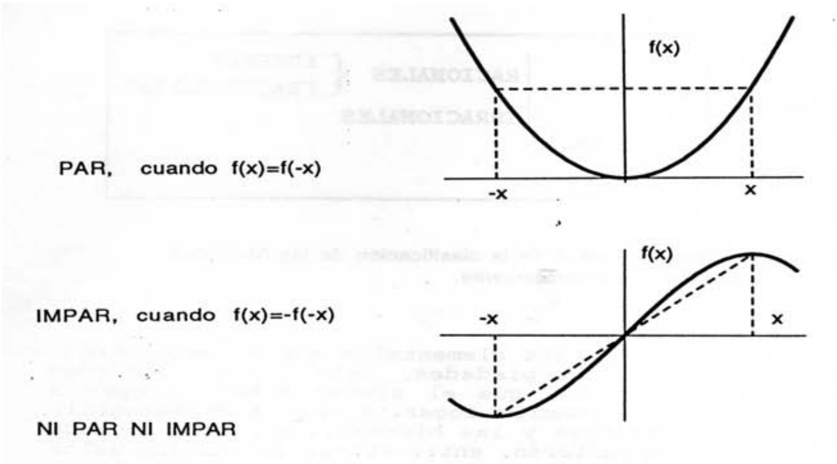


Fig. 3. Clasificación de las funciones según su paridad

1.7. Funciones monótonas

Sea $f\in F(\mathbf{A}, R)$. Esta función se dice creciente en **A** si: $x_1\leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Se dice decreciente en A si: $x_1\leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Se dice estrictamente creciente en A si: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Se dice estrictamente decreciente en A si: $x1<x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $(x_1, x_2)\in \mathbf{A}$

Si una función $f\in F(\mathbf{A}, R)$ es creciente o decreciente en **A** se dice monótona en **A** Se demuestra que una función estrictamente monótona es una biyección entre **A** y f(**A**)

1.8. Función reciproca

Sea una función: f: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$, si f es inyectiva existe la aplicación reciproca de f (**A**) en **A** que se representa por f^{-1} .Obtener la función reciproca exige

Demostrar que f es inyectiva

Calcular el dominio de f^{-1} que es f (**A**)

Calcular la expresión que relaciona las variables

Ejemplo 2. Calcular la función reciproca de y = 3 x +2

Como la función es inyectiva. La reciproca será: x = y - 2 / 3 Cambiando las variables se tiene: y = x -2 /3

1.9. Funciones herramienta

Funciones enteras como: y = x! = x (x - 1) (x - 2)....3. 2. 1

Función signo de x: $y = \text{signo}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Función valor absoluto de x: $y = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Función operacional: $y = \delta(x) \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \infty & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Función salto $y = h(x) \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Funciones paramétricas: Si x e y son funciones de otro numero t, o sea forma cada una grafica con t, se dice que son funciones paramétricas del parámetro t

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3t}{1+t^3} \\ y &= \frac{3t^2}{1+t^3} \end{aligned}\right\}$$

se llama el folio y se puede poner como : $x^3 + y^3 - 3 \; x\, y = 0$

Funciones polares: La grafica de una función relaciona dos números reales .Si los números reales recorren dos rectas perpendiculares la grafica se llama cartesiana. Pero si los números los consideramos situados sobre una recta uno, y sobre una circunferencia el otro la grafica se dice dibujada en polares

1.10. Funciones Hiperbólicas

Se definen el seno y el coseno hiperbólico de x de la forma siguiente

$$\text{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \text{Ch}\; x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{Th}\; x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad \text{Coth}\; x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

x	0		$+\infty$
sh x	1	$\nearrow$	$+\infty$

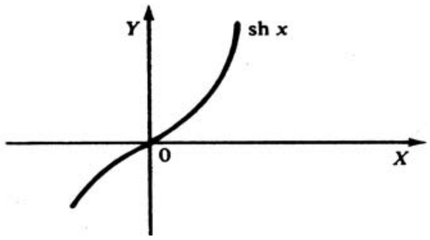


Fig.4.Grafica del S h x

x	0		$+\infty$
ch x	1	$\nearrow$	$+\infty$

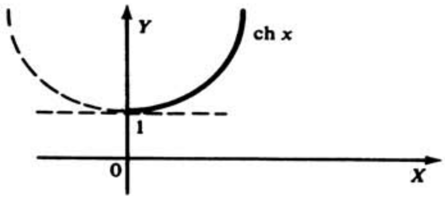


Fig. 5. Grafica del C h x

x	0		$+\infty$
th x	0	$\nearrow$	1

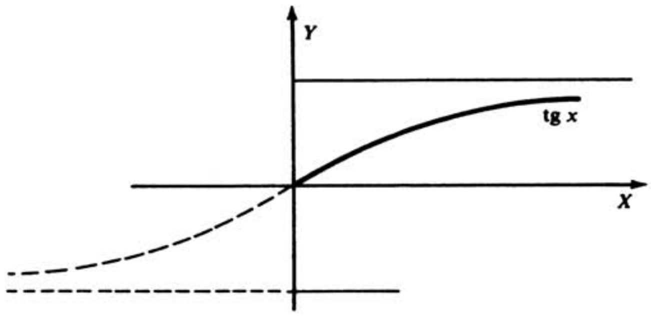


Fig. 6. Grafica Th x

1.10.1. Relaciones fundamentales De las expresiones anteriores se tiene

$$\mathrm{Ch}^2\, x - \mathrm{Sh}^2\, x = 1 \qquad , \quad 2\ \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Sh}\, x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{Sh}\, 2x$$

$$\mathrm{Sh}(x+y) = \mathrm{Sh}\, x\ \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Sh}\, y$$

$$\mathrm{Ch}(x+y) = \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Sh}\, x\ \mathrm{Sh}\, y$$

$$\mathrm{Th}(x+y) = \frac{\mathrm{Th}\, x + \mathrm{Th}\, y}{1 + \mathrm{Th}\, x\, \mathrm{Th}\, y}$$

1.10.2. Derivadas de estas expresiones

$$D\,(Sh\,x) = Ch\,x \quad , D\,(Ch\,x) = Sh\,x, \quad D(Th\,x) = 1 - Th^2\,x$$

1.10.3. Relación de estas expresiones con la hipérbola Sea la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se obtienen unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola mediante las ecuaciones $x = \pm\, a\, Ch\, t$, $y = b\, Sh\, t$

1.10.4. Funciones hiperbólicas inversas Sea $y = \text{Arg Sh } x = L\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{Arg sh } x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

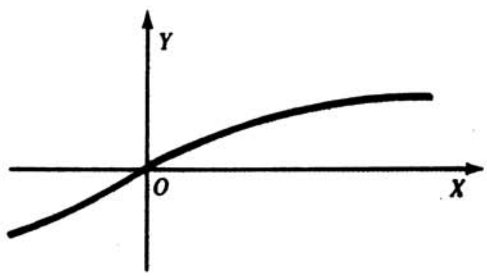


Fig. 7. Grafica y = Arg Sh x

$$y = \text{Arg}\,Ch\,x = L\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

x	1		$+\infty$
$\text{Arg ch } x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

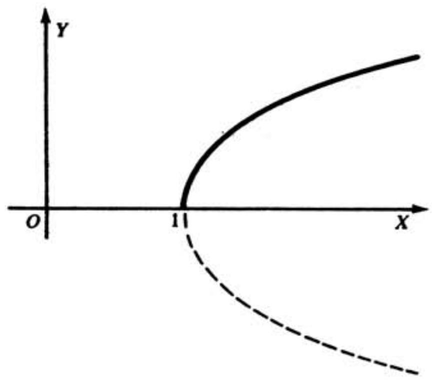


Fig.8.Grafica de Arg Ch x

$$y = \text{Arg } Th\,x = L\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad -1 < x < 1$$

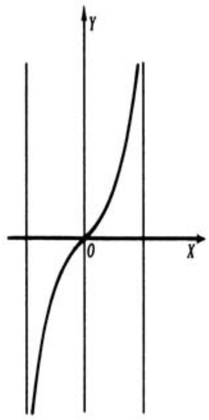


Fig.9.Grafica de Arg Th x

1.10.5. Derivadas de estas expresiones

$$D(\text{Arg Sh}\,x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad D(\text{Arg Ch}\,x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$D(\text{Arg Th}\,x)=\frac{1}{1-x^2} \qquad D(\text{Arg Coth}\,x)=\frac{1}{1-x^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representar la función

$$y=\frac{x}{|x|}$$

Solución: $y=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

2. Calcular las funciones inversas de

$$y=L\sqrt{x}\ ,\quad y=\sqrt{L\,x}\ ,\quad y=\sqrt{\frac{1}{L\,x}}\ ,\quad y=\sqrt{L\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Solución: $x=e^{2y}$; $x=e^{y^2}$; $x=e^{\frac{1}{y^2}}$; $x=e^{-y^2}$

3. Calcular la función explicita de: $x^2-2\,x\,y+y^2-25=0$

Solución: $y=x\pm 5$

4. Dadas $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=\sqrt{x+3}$, hallar $f\circ g$ y $g\circ f$ .Determinar los dominios respectivos

Solución: $(f \circ g)(x)=x+2$, Dominio **R**

$(g \circ f)(x)=\sqrt{x^2+2}$, Dominio **R**

5. Determinar si la función que se da es par, impar, o ninguna de las dos

a) $f(x)=5x^2-4$, b) $g(x)=x^3+1$, c) $h(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x>0 \end{cases}$ d) $i(x)=\dfrac{4x^2-5}{2x^3+x}$ e) $j(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$

Solución: a) Par, b) No es par ni impar, c) Impar, d) Impar, e) Par

6. Sea $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{1-x}{x}$. Mostrar que f y g son funciones inversas

7. Sea f(x)=2 x-3, defina las siguientes funciones y determinar el dominio de la función resultante

a) $f(x^2)$, b) $[f(x)]^2$, c) $(f \circ f)(x)$

Solución: a) $f(x^2)=2x^2-3$, Dominio **R**

b) $4x^2-12x+9$, Dominio R c) $4x-9$, Dominio **R**

8. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x^2}{3}$, g(x)= x+1.Calcular (fog)(x) , (gogof)(x)

Solución: $(f \circ g)(x)=f[x+1]=\dfrac{(x+1)^2}{2}$

$$(g \circ g \circ f)(x)=g\left[g\left(\frac{x^2}{3}\right)\right]=g\left[\frac{x^2}{3}+1\right]=\frac{x^2}{3}+1+1=\frac{x^2}{3}+2$$

9. Representar la función $f(x)=x|x|$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

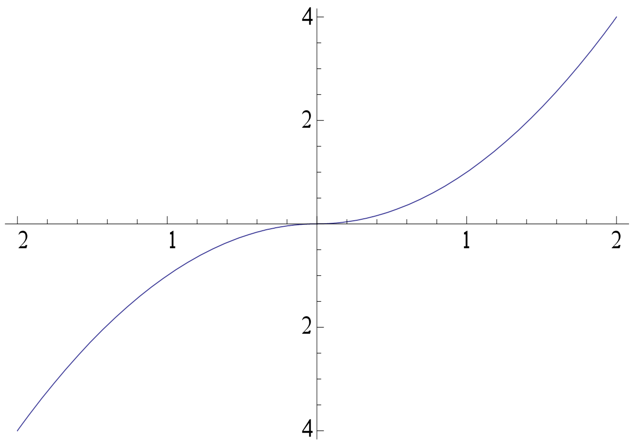


Fig.10. Representación de la función $f(x) = x\,|x|$

10. Representar la función $f(x)=|x-3|$

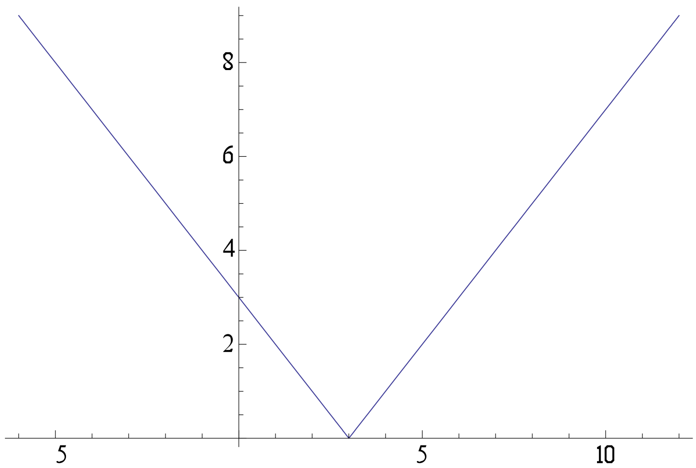


Fig.11. Representación de la función $f(x) = |x-3|$

11. Se considera en R^3 el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in R^3$ tales que $\|\mathbf{x}\| \leq r$, es decir, se trata de una bola de radio r (esfera maciza); expresar analíticamente el conjunto de puntos interiores, frontera y exteriores

$$\mathrm{Int}(E) = \{x, y, z\} / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < r\}$$

$$\mathrm{Fr}(E) = \{x, y, z\} / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r\}$$

$$\mathrm{Ext}(E) = \{x, y, z\} / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > r\}$$

CAPITULO 2.LIMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

2.1. Limite de una función en un punto

Definición métrica Sea f(x) una función $\in$ F(**A**, R). Se dice que f(x) tiende al límite cuando $x \rightarrow x_0 \in$ **A** y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Si fijado un $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, tal $\forall$ x, excluido x_0 que cumpla la condición $|x - x_0| < \delta$, se verifica $|f(x) - l| < \varepsilon$

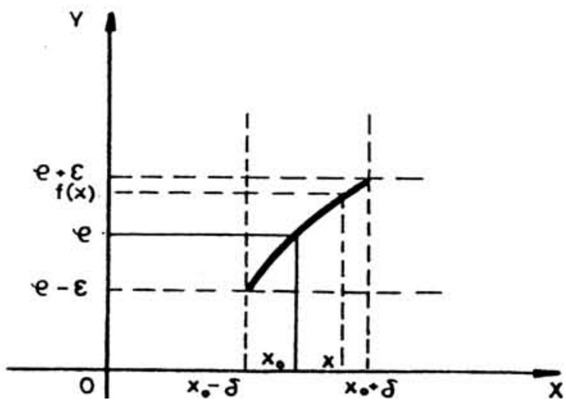


Fig.1

De la definición de limite se observa que el limite 1, no tiene nada ver con el valor de la función en x_0, es decir, 1 puede ser igual a $f(x_0)$ o no serlo y puede ocurrir que no exista: lim f (x) cuando $x \rightarrow x_0$

Limites laterales Sea f(x) $\in$ F(**A**, **R**) y x_0 un punto de acumulación de **A**. Se dice que f(x) tiende al límite 1 cuando $x \rightarrow x_0^-$ (por la izquierda) y se expresa

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

Si fijado un $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, tal $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$ resulta $|f(x) - l < \varepsilon$

Se dice que la función f(x) tiende al limite 1 cuando $x \to x_0^+$ (por la derecha) y se expresa

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 1$$

Si fijado un $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, tal $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ resulta $|f(x) - 1 < \varepsilon$

La condición necesaria y suficiente para que una función tenga límite en un punto x_0 es que existan los límites a la izquierda y a la derecha y ambos límites coincidan

Limite finito en el infinito Sea $f(x) \in F(\mathbf{A}, \mathbf{R})$. Se dice que f(x) tiende al limite 1 cuando $x \to \infty$ si fijado un $\varepsilon > 0$, $\exists$ un numero real H tal que $\forall x > H$ se verifica $|f(x) - 1| < \varepsilon$

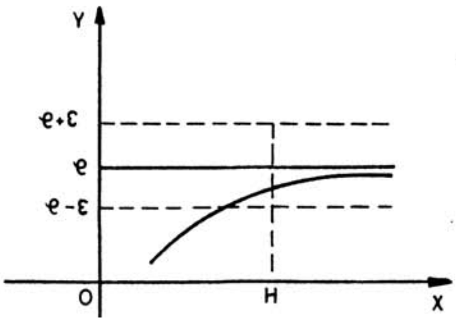


Fig. 2

Se dice que f(x) tiende al limite 1 cuando $x \to -\infty$ si fijado un $\varepsilon > 0$, existe un numero real negativo -H tal que $\forall\, x < -H$ se verifica que $|f(x) - 1| < \varepsilon$

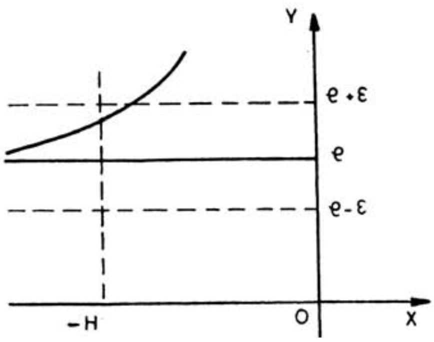


Fig.3

Limite infinito Sea f(x) $\in F(\mathbf{A},\mathbf{R})$.Se dice que f(x) tiende a ∞ cuando $x \rightarrow x_0 \in \mathbf{A}$, y se expresa lim f(x)=$\infty$ si fijado un numero real positivo K, tan grande como queramos, existe un entorno reducido del punto x_0 tal que $\forall$x de dicho entorno se verifica $|f(x)| > K$

2.2 Propiedades de los límites

1. Se demuestra que: Si dos funciones f(x) y g(x) toman valores iguales en todos los puntos de un entorno reducido del punto x_0, dichas funciones tienen el mismo limite, si este existe cuando $x \rightarrow x_0$

2. Se demuestra que: Si lim f (x) = 1 cuando $x \rightarrow x_0$ y l >c, $\exists$ un entorno reducido de x_0 en cuyos puntos se verifica f(x) > c

3. Se demuestra que: Si lim f (x) = 1 y lim g(x) = 1' cuando $x \rightarrow x_0$, si 1 < 1', $\exists$ existe un entorno reducido do x_0 en cuyos puntos se verifica f (x) < g(x)

2.3 Álgebra de límites

Limite de una suma de funciones Se demuestra que: si lim f (x) = 1 y lim g (x) = 1', cuando $x \rightarrow x_0$, se verifica

$$\lim (f(x) \pm g(x)) = 1 \pm 1'$$

Limite del producto de funciones Se demuestra que: si lim f (x) = 1 y lim g(x) = l', cuando $x \rightarrow x_0$, se verifica

$$\lim (f(x).\ g(x)) = \lim f(x).\ \lim g(x) = 1\ 1'$$

Limite del cociente de funciones Se demuestra que si: lim f (x) = 1 y lim g(x)= l'$\neq$0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1'}$$

Limite de la función exponencial Se demuestra que: si lim f (x) = 1, cuando $x \rightarrow x_0$ y (a> 0) se verifica

$$\lim a^{f(x)} = a^{1}$$

Limite del logaritmo de una función Se demuestra que: si lim f (x) = 1, cuando $x \to x_0$, y (a> 1) se verifica

$$\lim \log_a f(x) = \log_a 1$$

2.4. Infinitésimos e Infinitos

Definición Se dice que f (x) es un infinitésimo cuando $x \to x_0$, si lim f(x) = 0 cuando $x \to x_0$, por ejemplo: $y = (x - a)^2$, cuando $x \to a$, y = sen x, cuando $x \to 0$

Dos infinitésimos $\theta(x)$ y $\psi(x)$ se dicen equivalentes en un punto x_0, si se verifica

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\theta(x)}{\psi(x)} \right) = 1$$

y se dicen de ordenes diferentes en x_0 , si se verifica

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\theta(x)}{\psi(x)} \right) = 0$$

Se dicen del mismo orden en x_0 , si se verifica

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\theta(x)}{\psi(x)} \right) = k < \infty$$

En el caso de infinitésimos de ordenes diferentes, θ(x) es un infinitésimo es de orden superior a ψ(x), ya que tiende a cero mas rápidamente que ψ(x).

Sin embargo en el caso de que θ(x) y ψ(x) sean infinitos, ψ(x) es un infinito de orden superior a θ(x)

Si θ(x) y x^n son del mismo orden: $K x^n$ se dice parte principal de θ(x)

Veamos algunos infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$

$$\operatorname{sen} x \approx x \;;\; 1-\cos x \approx \frac{x^2}{2} \;;\; L(1+x) \approx x \,,\; e^x - 1 \approx x \;;\; a^x - 1 \approx x\,L\,a \,,\; \sqrt[n]{1+x} - 1 \approx \frac{x}{n},$$

$$1-\cos x \approx \frac{x^2}{2} \,,\; \tan x \approx x \;;\; \operatorname{arctang} x \approx x \;;\; \operatorname{arcsen} x \approx x \;;$$

2.5. Funciones continuas

Definiciones Sea $f \in F(\mathbf{A}, \mathbf{R})$, se dice que esta función es continua en un punto $x_0 \in \mathbf{A}$ si se verifica

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Es decir, si el limite 1 coincide con el valor de la función en el punto x_0. Esta condición exige

La función esta definida en el punto x_0

Que los límites por la derecha y por la izquierda coincidan

Que coincida $f(x_0)$ con cada uno de los límites por la derecha y por la izquierda.

Una función se dice continua en el segmento A = [a, b], si es continua a la derecha de a y a la izquierda de b, y en todos los puntos del segmento

Definición métrica de continuidad Sea $f \in F(\mathbf{A}, \mathbf{R})$, se dice que esta función es continua en un punto x_0, si para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$|x-x_0| < \delta \quad |f(x)-l| < \varepsilon$$

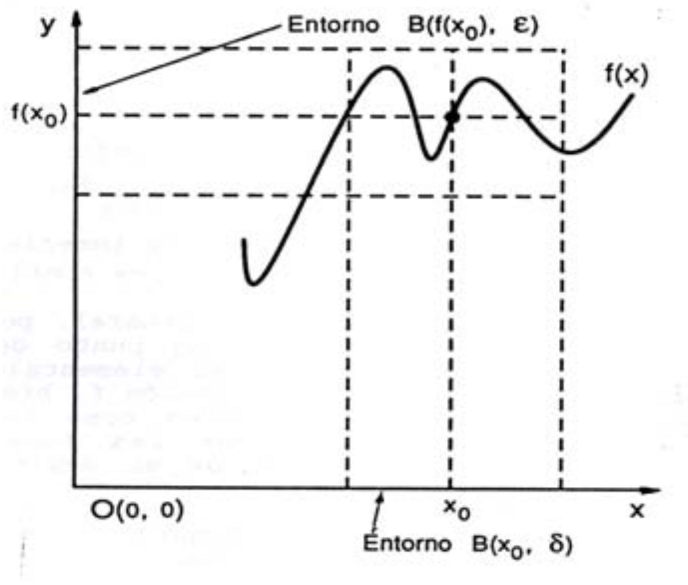


Fig.4.Representación grafica de la continuidad de f(x) en el punto x_0

2.6 Tipos de discontinuidades

Discontinuidad evitable Sea $f \in F(\mathbf{A}, \mathbf{R})$, se dice que f(x) presenta una discontinuidad evitable en un punto $x_0 \in \mathbf{A}$, cuando se verifica

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$$

Discontinuidad de primera especie Sea $f \in F(\mathbf{A}, \mathbf{R})$, se dice que f (x) presenta una discontinuidad de primera especie en un punto $x_0 \in \mathbf{A}$, cuando se verifica

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$$

Siendo $l_1 \neq l_2$. Si la función está acotada se dice que la discontinuidad es de primera especie finita, en caso contrario se dice que la función presenta una discontinuidad de primera especie infinita. Se llama salto de la función en el punto x_0 al valor

$$\left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right|$$

Discontinuidad de segunda especie Sea $f \in F(\mathbf{A}, \mathbf{R})$, se dice que f (x) presenta una discontinuidad de segunda especie en un punto $x_0 \in \mathbf{A}$, cuando no existe alguno de los limites laterales. Si f(x) esta acotada en

x_0 , la discontinuidad se dice de segunda especie finita, en caso contrario, se dice segunda especie infinita.

2.7. 0peraciones con funciones continuas

Suma de funciones continúas Se demuestra que si f, g $\in$ F(**A**, **R**) son continuas en el punto x_0 entonces la función (f +g) (x) es continua en x_0

Producto de funciones continúas Se demuestra que si f, g $\in$ F(**A**, **R)** son continuas en el punto x_0 entonces la función (f. g) (x) es continua en x_0

Continuidad del cociente de funciones Se demuestra que si f, g $\in$ F(**A**, **R)** son continuas en el punto x_0 siendo $g(x_0) \neq 0$ entonces la función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en x_0

Continuidad de la función compuesta Sea f: **A**$\rightarrow$ **R** una función y g: $\mathbf{A_1} \rightarrow$ **R** otra función siendo f(**A**)$\subset$ $\mathbf{A}_1$. Si la función f es continua en x_0 y la función g es continua en $f(x_0)$. Entonces la función (g $\circ$ f)(x) es continua en x_0

2.8. Continuidad y conjuntos cerrados y abiertos

1. La imagen de un abierto por una función continua no es necesariamente un intervalo abierto. La función f(x)= x^2, definida y continua en (-1,1) transforma el abierto (-1, 1) en el semiabierto [0,1)

2. La imagen de un cerrado por una función continua no es en general un cerrado Sea la función

$$R \xrightarrow{f} R$$

$$x \qquad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

R es cerrado, la imagen de R por esta función continua es el intervalo semiabierto (0,1]

Se demuestra

1. Sea f: **A** $\rightarrow$ **R**, la condición necesaria y suficiente para que esta función sea continua en **A**, es que

todo abierto de **R** se transforme por f^{-1} en un abierto de **A**

2. Sea f: **A** $\rightarrow$ **R,** la condición necesaria y suficiente para que esta función sea continua en **A** , es que todo cerrado **X** de **R** se transforme por f^{-1} en un cerrado de **A**

2.9. Continuidad y conjuntos compactos

Se demuestra: que si **A** es un conjunto compacto en **R** y f: **A** $\rightarrow$ **R** una función continua en **A**, entonces f (**A**) es un conjunto compacto.

2.10. Teoremas sobre funciones continuas

1. Toda función continua en un intervalo cerrado [a, b] está acotada

2. Teorema de Weierstrass Si f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b], el conjunto de valores f(x) correspondientes a los puntos de dicho intervalo tiene un máximo y un mínimo.

3. Teorema de Bolzano Si una función f(x) continua en un intervalo cerrado [a, b] toma valores de signos opuestos en los extremos de dicho intervalo, existe al menos un punto c interior al mismo en el que f(c) = 0

4. Teorema de los valores intermedios Si f(x) es continua en un intervalo [a, b] y k un numero real comprendido entre f(a) y f (b), existe al menos un punto c interior a dicho intervalo en el que f(c) = k, es decir, f(x) pasa de f(a) a f (b) tomando todos los valores intermedios entre f(a) y f (b)

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular los siguientes límites

$$\text{a)}\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{|x|}{x}\right) \qquad \text{b)}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$$

Solución: a) no tiene límite, ya que el límite a la derecha vale 0 y el límite a la izquierda vale 2

b) Calculamos el infinitésimo equivalente a $1-\sqrt[3]{x}$, cuando x $\rightarrow$1, $1-\sqrt[3]{x} \approx \frac{1}{3}(1-x)$

Por tanto el valor del límite es 3

2. Calcular los siguientes límites por infinitésimos:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} 2x} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1-\cos x}$$

Solución: a) $\frac{1}{2}$, b) 2

3. Calcular los siguientes límites por infinitésimos

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + x^2}$

c) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\ln x}$ d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+\cos x)(x^3 - 3)\operatorname{sen} x}{(x^2 - x)\cos x}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$

Solución. a) $\dfrac{-1}{\pi^2}$ b) 1, c) $+\infty$, d) 6, e) 3/2

4. Estudiar la continuidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x + 1} & x \le 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Solución: La función no es continua en el punto x = 0

5. Estudiar la continuidad en los puntos x = 2 y x = 3 de la función

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 2 \\ x + 2 & 2 \le x < 3 \\ 2x - 1 & 3 \le x < 4 \end{cases}$$

Solución: La función no es continua en el punto x = 2. La función es continua en el punto x =3

6. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} x & , x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & , -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & , x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Calcular a y b de modo que la función sea continua.

Solución: a = -1, b =1

7. Estudiar la continuidad en el origen de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \end{cases}$$

Solución: La función es continua en x = 0

8. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{L(x^2 - 3x + 2)}{L(x^2 - 7x + 12)}$$

Dominio: Todos los puntos de la recta real excepto los puntos pertenecientes a los intervalos $[1, 2] \cup [3, 4]$, además de los puntos que verifican la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 1$

9 . Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución: La función no es continua en el punto x = 0. En los restantes puntos la función es continua por ser el cociente de funciones continuas .

10. Estudiar la continuidad en el origen de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \left| x \cos \dfrac{1}{x} \right| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución: La función es continua en el origen

11. Estudiar la continuidad en el origen de la función

$$f(x)=\begin{cases} x\ \text{arco tang}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución: La función es continua en el origen

12. Estudiar si tiene límite la función en el punto $x = 2$, $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x \le 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases}$

Solución: La función no tiene limite en el punto x = 2

13. Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ x ≠1 , x ≠0 . Estudiar la existencia de limite de la función en los puntos x = 0, x =1

Solución: No tiene limite ni finito ni infinito en x = 0. Tampoco tiene limite en x =1

14. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} x\left[\dfrac{1}{x}\right] & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución: El único punto donde la función no es continua es el punto x = 0

15. Estudiar la continuidad de la función según los valores de a

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-3 & x \neq 2 \\ 2a-3 & x = 2 \end{cases}$$

Solución: La función es continua para a = 4

16. Sean $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

a) Estudiar su continuidad

b) Si se consideran definidas sobre [-1, 2] ¿están acotadas

c) ¿alcanzan su máximo y su mínimo

d) Hallar f [-1, 2]

Solución:

a) f(x) es continua en todo el campo real, g(x) es discontinua en x =0

b) f (x) y g(x) están acotadas

c) El mínimo de f es el valor 1 que lo alcanza para x = 0, el máximo el valor 5 que lo alcanza para x = 2

El máximo de g es el valor 5 que lo alcanza para x = 2, el valor mínimo no lo alcanza

d) f [-1, 2] =[2 ,5]

17. Estudiar y clasificar los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Solución:

Se procede a ver si la discontinuidad en el punto x=2 es evitable o no

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

Asignando a f(2) el valor 4, la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$$

es continua en todos los puntos.

18. Calcular la parte principal, cuando $x\to 0$ del infinitésimo

$$f(x)=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\ldots\ldots\left(\sqrt[p]{(1+x)}-1\right)\quad (p\in N \text{ fijo})$$

Solución: $f(x)\approx\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}x\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{p}x\right)\approx\frac{1}{p!}x^{p-1}$

19. Sea f: [0,1] → R, definida así

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[4]{x}\,Lx}{1-\sqrt{x}} & x\neq 0,1\\ f(0)=a\ ,f(1)=b\end{cases}$$

Calcular a y b si existen para que f(x) sea continua en $x = 0^{+}$, $x = 1^{-}$

Solución: a =0, b = -2

Observación $L\,x$ es infinito de orden inferior que $x^{\frac{-1}{4}}$

20. Calcular

$$A = \lim_{x \to 1}\left(\frac{p}{1-x^{p}} - \frac{q}{1-x^{q}}\right) \quad (p,q \in N)$$

Solución: Vamos a hacer el cambio de variable x = 1+t t→0, y tengamos en cuenta que ∀ n ∈ N

$$x^{n} = (1+t)^{n} = 1 + n\,t + \frac{1}{2}n(n-1)\,t^{2} + \ldots\ldots$$

Con lo cual tenemos

$$A = \lim_{x \to 1}\frac{\left(p(1-x^{q})\right) - q\left(1-x^{p}\right)}{\left(1-x^{p}\right)\left(1-x^{q}\right)} = \lim_{t \to 0}\frac{-p\left[qt + \frac{1}{2}q(q-1)t^{2} + \ldots\ldots\right] + q\left[p\,t + \frac{1}{2}p(p-1)t^{2} + \ldots\ldots\right]}{(-pt + \ldots..)(-q\,t + \ldots..)}$$

$$A = \frac{1}{2}(p-q)$$

21. Demostrar que la función $f(x) = e^{x} - x - 3$ tiene un cero en el eje real positivo. Estudiar si es único

Como f(x) es una función continua, veremos si se puede aplicar el teorema del valor intermedio de Bolzano.

Para ver que el punto de corte es único intentaremos probar que la curva es monótona creciente o decreciente pata x > 0. Veamos el signo de f’ (x)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\text{continua} \\ f(0) = -2 < 0 \\ f(2) = 2.39 > 0 \end{array}\right\}$$

Por el teorema de Bolzano podemos asegurar que la curva corta al eje X al menos una vez entere 0 y 2

Para ver que sola corta una vez , probaremos que la curva es monótona creciente viendo que f'(x)> 0 para x>0

$f'(x) = e^x - 1$, que se anula para x=0 y es positiva para x>0 . Por tanto podemos asegurar que la función f(x) solo posee un cero entre 0 y 2

22. Estudiar la continuidad de f: R→R definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

Puesto que $1+|x| \neq 0$ $\forall x \in R$, f es una función continúa en todos los puntos de R

23. Sea f: [a, b] R una función continua tal que $\forall x \in$ [a ,b] f(x) es un numero racional ¿ Que función es ¿

La función f debe ser una función constante , ya que en caso contrario tomaría dos valores diferentes y por ser una función continua alcanzaría al menos una vez todos los valores comprendidos entre ambos , incluyendo números irracionales , lo cual es una contradicción .

CAPITULO 3.FUNCIONES DERIVABLES

3.1. Concepto de derivada

Sea una función y = f (x) continua en un intervalo [a, b] y un punto x_0 de dicho intervalo y un incremento h positivo o negativo que nos conduce al valor $x_0 + h$ del mismo intervalo. El cociente incremental

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

esta unívocamente definido para cada valor de h y mide la variación media de la función en el intervalo (x_0 , $x_0 + h$)

Definición 1 Se llama derivada de la función y=f(x) en el punto x_0 al límite (si existe) del cociente incremental anterior cuando $h \to 0$ .Luego la derivada si existe es única

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Si f(x) tiene derivada en cada uno de los puntos de un cierto intervalo, esta derivada es una función de x, que se llama función derivada $f'(x)$

Interpretación geométrica de la derivada Sea la función y =f(x). El cociente incremental

$$\frac{PM}{P_0M} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Representa la tangente trigonométrica del ángulo α' que forma la dirección positiva de la cuerda P_0P con la dirección positiva del eje x, es decir:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\Delta f}{h}$$

Si α' esta comprendido entre $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se puede poner $\alpha' = \text{arcotang}\left(\frac{\Delta f}{h}\right)$

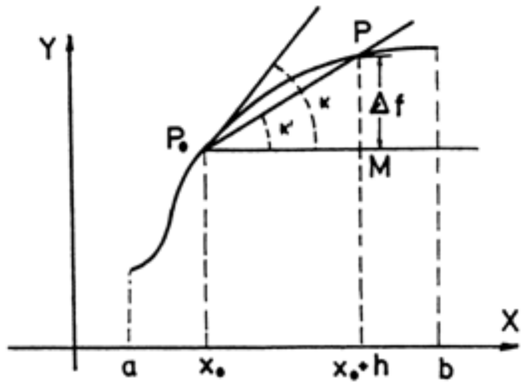


Fig. 1

Si suponemos que $y = f(x)$ tiene derivada en x_0, se tiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = f'(x_0)$$

En virtud de la continuidad de la función arco tang, se verifica

$$\lim \alpha' = \text{arco tan } f'(x_0) = \alpha \text{ , } h \to 0$$

Es decir tang $\alpha = f'(x_0)$. Luego si existe derivada en x_0, las cuerdas que unen P_0 con los puntos próximos tienen una posición límite cuando estos puntos tienden a P_0 llamada tangente a la curva en P_0 y se prueba de esta forma que si en x_0 existe derivada, existe tangente a la curva en dicho punto y la pendiente de la recta tangente es la derivada.

Recíprocamente, si existe recta tangente en P_0, esto significa que: $\lim \alpha' = \alpha$ cuando $h \to 0$ y como la función es continua en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ resulta

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Es decir tang $\alpha = f'(x_0)$ .Luego si la curva tiene tangente en un punto P_0, la función $f(x)$ posee derivada en x_0.

Generalización del concepto de derivada Admitiremos en la definición de derivada, que cuando el límite del cociente incremental sea $(\infty, -\infty)$ se dice que la derivada es infinita. Sea por ejemplo, la derivada de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

en el punto x = 0, es $+\infty$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$$

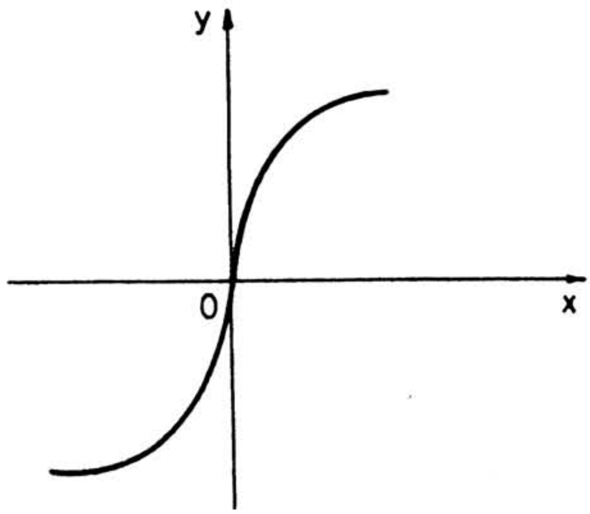


Fig.2

Geométricamente significa que la dirección positiva de la tangente es el semieje + OY

Derivadas laterales Se define la derivada lateral a la derecha de la función f(x) en el punto x_0, y se designa por $f'(x_0^+)$ al límite, si existe

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to o^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se define la derivada por la izquierda de la función f(x) en el punto x_0, y se designa por: $f'(x_0^-)$ al limite, si existe

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La condición necesaria y suficiente para que una función f(x) sea derivable en un punto x_0 es que existan las derivadas laterales en ese punto y sean iguales

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$$

Interpretación geométrica Se llama semirrecta tangente a la derecha en el punto x_0 a la semirrecta de ecuación

$$y - f(x_0) = f'(x_0^+)(x - x_0), \quad x \geq x_0$$

Se llama semirrecta tangente a la izquierda en el punto x_0 a la semirrecta de ecuación

$$y - f(x_0) = f'(x_0^-)(x - x_0), \quad x \leq x_0$$

Sea la función $f(x)=|x|$ .Veamos que esta función no es derivable en el punto $x = 0$. Vamos a calcular la derivada lateral a la derecha en el punto $x =0$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

Calculemos ahora la derivada lateral a la izquierda

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = -1$$

Por no ser las derivadas laterales iguales, la función no es derivable.

3.2. Continuidad y derivabilidad

Si una función f(x) tiene derivada finita en un punto x_0, es continua en dicho punto .En efecto, sabemos que

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

De donde, se deduce

$$\lim_{h\to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h\right] = f'(x_0) \cdot \lim h = 0$$

Luego la función es continua. El teorema recíproco no es cierto. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Esta función, es continua en el punto $x_0 = 0$, pero no es derivable, pues

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\ \operatorname{sen}\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{h}$$

Este limite, no existe cuando h →0, aunque la función esta acotada en el intervalo [-1, 1]

3.3. Estructura de las funciones derivables

3.3.1. Derivada de la suma de funciones Se demuestra aplicando la definición de derivada que si, f(x) y g(x) son funciones derivables en x_0 , la función (f + g) es derivable en dicho punto, y su derivada es

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

3.3.2. Derivada del producto de funciones Se demuestra aplicando la definición de derivada que si, f(x) y g(x) son funciones derivables en x_0, la función (f. g) ( ) es derivable en dicho punto, y su derivada es

$$(f.\,g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0)$$

3.3.3. Derivada de la función inversa 1 / f Se demuestra aplicando la definición de derivada que si f es derivable en el punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces la función: 1 / f es derivable en x_0 y su derivada es

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x_0)=\frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

3.3.4. Derivada del cociente de dos funciones Se demuestra que si, f(x) y g(x) son funciones derivables en x_0 y $g(x_0) \neq 0$, la función (f / g) es derivable en el punto x_0, y su derivada es

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

3.3.5. Producto de un número real por una función derivable Si f es una función derivable en el punto x_0, y a es un numero real, la función (a f) es derivable en x_0, y su derivada es

$$(a\,.\,f)'(x_0) = a\, f'(x_0)$$

3.3.6. Derivada de la función compuesta (Regla de la cadena) Sea f: **A** → **R** una función y g: $\mathbf{A}_1$ → **R** otra función siendo f(**A**) ⊂ $\mathbf{A}_1$. Se define la función compuesta

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & R \\ (g \circ f)(x) & & g[f(x)] \end{array}$$

Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f)$ es derivable en x_0, y su derivada es

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

3.3.7. Derivada de la función recíproca Si f es una función derivable en x_0, siendo $f'(x_0) \neq 0$ y f^{-1} es continua en $y_0 = f(x_0)$, entonces f^{-1} es derivable en y_0, y su derivada es

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

3.4. Derivadas de funciones elementales

$$D[L\,x] = \frac{1}{x}$$

$$D[\log_a x] = \frac{1}{x}\log_a e, \quad a > 0\ , a \neq 1, x > 0$$

$$D[e^x] = e^x$$

$$D[a^x] = a^x La, a > 0, a \neq 1$$

$$D[x^k] = k \cdot x^{k-1}, k \in R$$

$$D[\operatorname{sen} x] = \cos x$$

$$D[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$

$$D[\operatorname{tang} x] = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D[\operatorname{Sh} x] = \operatorname{Ch} x$$

$$D[\operatorname{Ch} x] = \operatorname{Sh} x$$

$$D[\operatorname{Th} x] = \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$$

$$D[\operatorname{arco sen} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\operatorname{arcocos} x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\operatorname{arcotang} x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D[\operatorname{ArgSh} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$D[\operatorname{ArgCh} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$D[\operatorname{ArgTh} x] = \frac{1}{1-x^2}$$

3.5. Funciones diferenciables

Una función $f \in F(\mathbf{A}, \mathbf{R})$ se dice que es diferenciable en un punto x_0 si la expresión

$$f(x_0+h)-f(x_0) = h(M+\varepsilon(h))$$

puede ponerse en la forma anterior : donde M es un valor fijo, independiente de h, y $\varepsilon(h)$ una función tal que

$$\lim \varepsilon(h)=0 , h\to 0$$

Toda función derivable en un punto es diferenciable en dicho punto: En efecto sabemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h\cdot f'(x_0)}{h}\right] = 0$$

Luego podemos definir una función de la forma

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h\cdot f'(x_0)}{h}$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)= h\,[f'(x_0)+\varepsilon(h)]$$

Siendo $\varepsilon(h)$ una función que tiende a cero cuando $h\to 0$, $f'(x_0) = M$, luego la función es diferenciable.

Recíprocamente toda función diferenciable en un punto es derivable en dicho punto Sea f una función diferenciable en un punto x_0, veamos que es derivable en dicho punto: Si f es diferenciable sabemos que

$$f(x_0+h)-f(x_0) = h(M + \varepsilon(h))$$

siendo M independiente de h, y $\lim \varepsilon(h)=0$ cuando $h\to 0$. Luego podemos poner

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = M + \varepsilon(h)$$

Pasando al límite se tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = M = f'(x_0)$$

Siendo lim $\varepsilon(h)=0$, cuando $h \to 0$.Se llama diferencial de una función en un punto x_0 a la expresión $d\,f = f'(x_0)\,h$. Podemos homogeneizar esta función, considerando la función y = x, con lo cual se verifica

$$\left.\begin{array}{l} df = dx \\ df = 1.h \end{array}\right\} \Rightarrow h = dx$$

Luego se tiene: $d\,f = f'(x)\,d\,x$

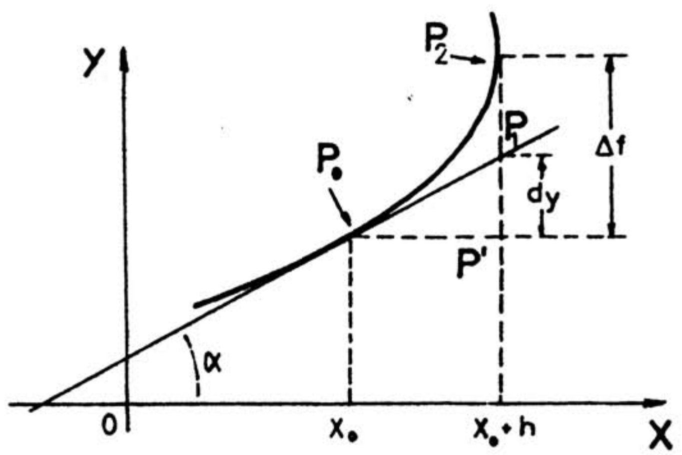


Fig. 3

De la figura se tiene: $\Delta f = P'P_1 + P_1 P_2$. Ahora bien: $P'P_1 = f'(x)\,d\,x = d\,f$ es la diferencial de la función en el punto P_0, siendo $P_1P_2 = \varepsilon(h)$ que tiende a cero cuando $h \to 0$

3.6. Diferenciales sucesivas

Si la función $d\,f$ es diferenciable, su diferencial se llama diferencial segunda y se designa: $d^2 f$

$$d^2 f = d[\,f'(x)\,d\,x] = f''(x)\,d\,x^2$$

Análogamente la diferencial tercera $d^3\, f = f'''(x)\,d\,x^3$

En general la diferencial n-exima $d^n f = f^n(x)\,d\,x^n$

3.7. Crecimiento y decrecimiento

Sea una función: f: **A** → R .Si la función f es

$$\begin{cases} \text{creciente} \\ \text{estrictamente creciente} \\ \text{decreciente} \\ \text{estrictamente decreciente} \end{cases}$$

en un punto x_0 interior al dominio **A** y f(x) es derivable en dicho punto, entonces

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{cases}$$

Demostremos el primer caso (análogamente se demuestran los demás): Por ser f(x) creciente en x_0 se tiene

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Tomando límites y teniendo en cuenta que f es derivable en x_0, se tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \geq 0$$

3.8. Teorema de Rolle

Sea f: [a, b]∈ R, una función que verifica las siguientes condiciones

1.f es continua en [a ,b]

2. f es derivable en (a , b)

3. f(a)= f(b) .En estas condiciones $\exists\ c \in (a, b) \,/\, f'(c)=0$

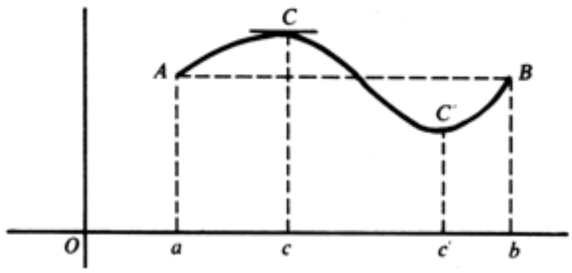


Fig.1

3.9. Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado

Sean: f: [a, b]∈R y g: [a, b]∈R dos funciones que verifican las siguientes condiciones

1. f y g son continuas en [a ,b]

2. f y g son derivables en (a ,b)

3. g(a)≠ g(b) y g' (x) ≠0 en (a , b) .Entonces ∃ c∈ [a ,b] tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3.10. Consecuencias del teorema de Cauchy

3.10.1. Teorema de los incrementos finitos o de Lagrange Sea f: [a, b]∈R una función que verifica las siguientes condiciones

1. f es continua en [a, b]

2. f es derivable en (a, b). Entonces ∃ al menos un punto c ∈ (a, b) tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

En efecto, apliquemos el teorema de Cauchy a las funciones f(x) y g(x)= x, esta ultima función también verifica el teorema de Cauchy en [a, b] .Luego se verifica

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Geométricamente esta formula significa: En todo arco de curva con tangente en todos sus puntos, hay un punto, al menos en que la tangente en dicho punto es paralela a la cuerda de coordenadas [(a, f(a)), (b, f (b))]

3.10.2. Regla de L' Hôpital Si f(x) y g(x) son dos funciones derivables en un entorno del punto a, siendo f(a)=g(a)=0, verificándose en dicho entorno g'(x) $\neq 0$, si el cociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tiene límite finito o infinito cuando x $\rightarrow$ a, se verifica

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.10.3. Formas indeterminadas $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};\ 0.\infty\ ;\infty-\infty\ ;1^{\infty};0^{0}\ ;\infty^{0}$

Las reglas de L'Hôpital sólo se pueden aplicar directamente a los dos casos $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, para resolver los demás casos habrá que transformarlos en uno de los dos tipos anteriores.

Indeterminaciones tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$: $\quad \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Indeterminaciones tipo 0. ∞ Se transforman en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, mediante operaciones algebraicas, o bien, mediante las siguientes transformaciones:

$$f(x).g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)} \qquad f(x).g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}$$

Indeterminaciones tipo ∞ - ∞. Se transforman en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, mediante operaciones algebraicas como pueden ser: buscando un común denominador, multiplicando y dividiendo por el conjugado; o bien, mediante las siguientes transformaciones:

$$A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right) = \frac{1 - \frac{B}{A}}{\frac{1}{A}} \qquad\qquad A - B = AB\left(\frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{AB}}\right)$$

Indeterminaciones tipo 0^0, ∞^0, 1^∞ Se transforman en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, tomando logaritmos neperianos. Llamando *y* al límite en cuestión: $y = \lim f(x)^{g(x)}$

Se resolvería: $y = e^{\lim g(x)\, L\, f(x)}$

El caso 1^∞ admite una forma simplificada de resolución: $y = \lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\,[f(x)-1]}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular los siguientes límites por infinitésimos

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\cos x} = \frac{2}{2} = 1$$

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+x-1)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{1-x} = \lim_{x\to 1} -\frac{1-x}{1-x} = -1$$

c) $$\lim_{x\to\infty} x\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = [\infty.0] = \lim_{x\to\infty} -x\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} - 1\right] = \lim_{x\to\infty} -x\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{5}\right) = -\ln\frac{1}{5} =$$
$$= -(\ln 1 - \ln 5) = -(0 - \ln 5) = \ln 5$$

d) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left[1 + \left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\right]}{\ln\left[1 + \left(\sqrt[m]{x} - 1\right)\right]} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\sqrt[n]{x}}{\ln\sqrt[m]{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{n}\ln x}{\frac{1}{m}\ln x} = \frac{m}{n}$$

2. Calcular los siguientes límites

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\mathrm{sen}2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2 + x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{x-1}{x+1} = [\infty.0] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x-1}\,\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{(x-1)(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2x} = \frac{-4}{2} = -2$$

d) $$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen}x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

e) $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos x-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

f) $\lim_{x\to 0^+} x^{\tan x} = [0^0]$, tomando logaritmos neperianos:

$$\ln y = \ln\lim_{x\to 0^+} x^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+}\tan x\ln x = [0.\infty] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

De donde, $y = e^0 = 1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dada la función $y = 1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Contestar adecuadamente a las siguientes preguntas

a) Hallar y (0) e y (2).

b) ¿Es continua en [0 ,2]?

c) ¿Es derivable en (0 ,2)?

d) ¿Cumple el teorema de Rolle? Explicar

Solución: a) y (0) = y (2)=0, b) La función es continua, c) La función no es derivable en x =1 d) No se puede aplicar el teorema de Rolle ya que no es derivable en x =1

2. Estudiar si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $y = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$ en el intervalo [0,4]

Solución = La función es continua en dicho intervalo por ser el cociente de funciones continuas, el único punto donde no es continua, es para x = -2, ya que anula el denominador, pero esta fuera del intervalo [0, 4]

La función es derivable en el intervalo (0, 4)

y(0) = y(4)=0 . Se verifica el teorema de Rolle para x= 2(√3 -1)

3. Estudiar si se puede aplicar el teorema de Rolle en las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1 + |x|}{1 - |x|}$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b) $y = (x - 2)\operatorname{arctg} \frac{1}{x - 2}$ en el intervalo [1 ,3]

Solución a) y(-1/2) = y(1/2)=3 . La función es continua, pues su valor en todo punto esta perfectamente definido, excepto para $|x|=1$ que cae fuera del intervalo considerado. La función en x =0 no es derivable. Así pues, no se puede aplicar el teorema de Rolle.

b) y(1)=y(3)= arco Tang 1 .La función no es derivable en x=2 , por lo que no se puede aplicar el teorema de Rolle.

4. Estudiar la derivabilidad, en su campo de definición, de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$ si x > -1

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[5]{x}\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Solución: a) La función esta definida en el intervalo (-1, ∞) y es derivable en cada punto de ese intervalo excepto en x = 0

b) La función es derivable en $(-\infty, 0) \cap (0, \infty)$, en $x = 0$ no es derivable

c) La función es derivable en cada punto de la recta real distinto de 1 y - 1. En esos puntos la función también es derivable y su valor es $f'(1) = 0$, $f'(-1) = 0$

5. Calcular la derivada de las funciones definidas por las expresiones siguientes, en sus dominios de definición:

a) $y = (x^3+1)^{\text{sen } x}$

b) $y = \exp\left(\sqrt{\log\left(5x^2 + 7x + 10\right)}\right)$

c) y = x arco sen (L x)

6. Calcular la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Solución: a) $(-1)^n\, n!\left(\dfrac{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{\left(x^2-1\right)^{n+1}}\right)$ b) $\dfrac{(-1)^n\, n!}{2}\left(\dfrac{(x+1)^{n+1} + (x-1)^{n+1}}{\left(x^2-1\right)^{n+1}}\right)$

7. Calcular, haciendo uso de la regla de L`Hôpital, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\text{arctg}(x)\right)^x$

Solución: a) $-\infty$ b) $e^{-\frac{2}{\pi}}$

8. **Calcular utilizando infinitésimos equivalentes:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

Solución: 3/2

9. Probar que α es un infinitésimo cuando $x \to 3$

a) $\alpha = (x-3)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)$

b) Hallar para $x = \frac{\pi}{2}$ el orden y la parte principal de los infinitésimos: α_1 =cos (x), α_2 =1-sen (x) .

c) obtener para $x \to 0$ el orden y la parte principal de α_3 =L cos (x) .

Solución: a) Límite 0

b) cos x = - (x- π/2), (1 – sen x) =1/2 (x- π/2) ^{2} , L cos x = -1/2 x^2

10. **Calcular el orden y la parte principal del infinitésimo: y= L (1+x)-sen (x), x →0**

Solución: -1/2 x^2

11. **Orden y parte principal del infinitésimo f(x)=1 – cos ^{3}(x) , cuando x →0**

Solución: 1-$\cos^3 x$ = 3/2 x^2

12. **Calcular los límites:**

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(x + e^x + e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad , \quad b = \lim_{x\to 0}\frac{L\,\mathrm{tang}(2x)}{L\,\mathrm{tang}(x)} \quad , \quad c = \lim_{x\to\infty} x\left(5^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

Solución: A = $e^{2,}$ b=1, c= L5

13. Calcular el valor de **θ** de la fórmula de Cauchy aplicándolo a las funciones: f(x)= cos (x), g(x)=sen x

Solución: θ= 1/2

14. Sean las funciones f(x)= x^2, g(x)=x^3; definidas en [-1 ,1], demostrar que no se puede aplicar el teorema de Cauchy.

Solución: Sabemos que el teorema de Cauchy exige:

a) Que las funciones f(x) y g(x) sean continuas en [-1, 1], cosa que ocurre

b) Derivables en (-1, 1), cosa que también ocurre.

c) g (b) ≠ g(a) y f '(x) ≠0 para todo x∈ (-1 ,1), cosa que no ocurre ya que para el punto 0 ∈(-1 ,1) la función g' (x) se anula, luego no se puede aplicar el teorema de Cauchy.

15. Dada la función f(x)= $x^2 - 2x$ definida en el intervalo [0 ,1]. Aplicar el teorema de los incrementos finitos.

Solución: θ= 1/2

16. Aplicando el teorema de los incrementos finitos, calcular aproximadamente $\sqrt[3]{9}$

Solución: Aplicar el teorema de los incrementos finitos a la función f(x)= $x^{1/3}$ en el intervalo cerrado [8, 9]. Se obtiene una valor aproximado de 2.08

17. Demostrar que $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{13}}{15}<\operatorname{arcosen}(0,6)<\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$

Solución: Aplicar el teorema de los incrementos finitos a la función f(x)=arco sen x en el intervalo [0.5 ,0.6]

18. Demostrar la desigualdad $\operatorname{arco sen}(x)<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad 0<x<1$

Solución: Aplicar el teorema de los incrementos finitos a la función f(x)=arco sen x en el intervalo [0, x]

19. Sea la función $f(x)=4+\sqrt[3]{x^8}$ en el intervalo [-1, 1] .Comprobar si es aplicable el teorema de Rolle a f(x) en dicho intervalo

Solución:

1) $f(-1)=f(1)=5$.

2) La función $g(x)=\sqrt[3]{x^8}$ es continua y derivable en todo R y lo sigue siendo al sumarle 4

3) Cumple las hipótesis del teorema de Rolle en [-1 ,1]. Por tanto, hay un número c∈(-1 ,1) , para el cual

f'(c)=0 □ $\frac{8}{3}\sqrt[3]{c^5}=0 \Rightarrow c=0$

20. Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}-x-1}{2x^2-x^3}$$

SOLUCION: $\frac{1}{4}$

21. Estudiar la continuidad y derivabilidad en el punto x=0 de la función definida en todo R por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

SOLUCION: a) La función es continua en x=0, f es derivable en el punto x=0 por la derecha, la funcion no es derivable en x=0 por la izquierda. Luego no es derivable en x=0

CAPITULO 4. FORMULAS DE TAYLOR Y MAC –LAURIN. APLICACIONES.

4.1. Fórmulas de Taylor y Mac-Laurin

El problema es el siguiente: Conocido el valor de una función f(x) en un punto así como el valor de sus derivadas sucesivas, se trata de hallar el valor de f(x) en cualquier otro punto x = a + h , expresando f(a+h) mediante un polinomio entero en h de grado n , mas un termino complementario que mide el error cometido, cuando se toma el polinomio en lugar del valor exacto f(a+h)

4.1.1. Fórmula de Taylor para polinomios Sea f(x) un polinomio entero de grado n

$$f(x)=a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n x^n$$

queremos expresarlo de la forma : $f(x)=b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_n(x-a)^n$

Siendo $a \in R$ y los b_i (i = 0 ,1,2…..n) coeficientes a determinar. Estos coeficientes se determinan de la forma siguiente

$$f(a)=b_0$$

Derivando f(x) se tiene

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + \ldots\ldots. + n\,b_n(x-a)^{n-1}$$

para x = a , se obtiene

$$f'(a)= b_1$$

Derivando nuevamente f(x)

$$f''(x) = 2b_2 + 3\cdot 2\,b_3(x-a) + \ldots\ldots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2}$$

para x = a , se obtiene

$$f''(a) = 2\,b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

Análogamente se obtiene

$$b_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ldots\ldots\ldots.., b_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Se llama polinomio de Taylor de grado n para la función f(x) en el punto x = a suponiendo que f(x) es derivable, al menos n veces al polinomio

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+.......+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ejemplo 1 Sea el polinomio :f(x)= x^3+2x^2+3x+4 , expresarlo en potencias de (x-2)

$$\begin{aligned}
&f(x)=x^3+2x^2+3x+4\Rightarrow f(2)=26\\
&f'(x)=3x^2+4x+3\Rightarrow f'(2)=24\\
&f''(x)=6x+4\Rightarrow f''(2)=16\\
&f'''(x)=6\Rightarrow f'''(2)=6
\end{aligned}$$

$$f(x)=26+\frac{24}{1!}(x-2)+\frac{16}{2!}(x-2)^2+\frac{6}{3!}(x-2)^3$$

4.2. Fórmulas de Taylor –Lagrange

Sea f :[a,b]→R una función que verifica las siguientes condiciones

1.f esta definida y es continua sobre [a ,b]

2. Es derivable hasta el orden n en [a , b]

3.Existe la derivada de orden (n +1) en (a , b)

Si queremos expresar el valor de f(b) mediante un desarrollo análogo al obtenido anteriormente en la formula de Taylor para polinomios , tendremos que agregar a dicho desarrollo

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+.....+\frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n$$

un termino complementario que representaremos por T_n , luego se tiene

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+.....+\frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n+T_n$$

La anterior expresión de f(b) recibe el nombre de formula de Taylor. El sumando T_n es el error que se comete al tomar para el valor f(b) la suma

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+.....+\frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n$$

Se suelen dar distintas expresiones para el término complementario con el objeto de hacer la formula de Taylor más apropiada a las aplicaciones.Veamos la formula de Taylor con termino complementario de Lagrange. Si en la expresión

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+.....+\frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n+T_n$$

escribimos: b=a + h , se obtiene

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+.....+\frac{f^n(a)}{n!}h^n+T_n$$

Vamos a ver que el término complementario puede adoptar la forma

$$T_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(c) \qquad , \ c=a+\theta h \quad , \ 0<\theta<1$$

4.3. Fórmula de Mac – Laurin

Si en la formula de Taylor - Lagrange hacemos a = 0, h = x , se obtiene la formula de Mac - Laurin.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+.....+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

El término complementario de Lagrange adopta la forma

$$T_n=\frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad , \qquad 0<\theta<1$$

Si se toma como valor de la función en un punto x el valor del polinomio

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+.....+\frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

El error que se comete viene dado por

$$\text{Error}=T_n=\frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}<\frac{M}{(n+1)!}x^{n+1}$$

siendo M una cota superior de $f^{n+1}(x)$ en un entorno del 0 que contenga a x

Ejemplo 2 Desarrollar por Mac - Laurin la función f(x) =L(1+x) escribiendo el termino complementario correspondiente a la cuarta derivada .

$$f(x)=L(1+x) \;;\; f'(x)=\frac{1}{(1+x)} \;;\; f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \;;\; f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} \;;\; f''''(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$$

$$f(0)=0 \;;\; f'(0)=1 \;;\; f''(0)=-1 \;;\; f'''(0)=2 \;;\; f''''(\theta x)=-\frac{6}{(1+\theta x)^4}$$

Es decir: $L(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\theta x)^4}$

Para x = 1 , se obtiene : $L2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}=0.83$

El error es : $\text{Error}=\frac{1}{4(1+\theta)^4}<\frac{1}{4}$

Ejemplo 3 .Desarrollar la función : $f(x)=e^x$ .Calcular el valor del numero e con cuatro cifras decimales

$$f(x)=e^x \;;\; f'(x)=e^x ,\; f''(x)=e^x \;\ldots\ldots\ldots f^n(x)=e^x ,\; f^{n+1}=e^{\theta x}$$

$$f(0)=1; \quad f'(0)=1; \quad f''(0)=1; \quad f'''(0)=1;\ldots\ldots\ldots f^n(0)=1 \;;\; f^{n+1}(\theta x)=e^{\theta x}$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)}x^{n+1}$$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)}$$

$$\frac{e^{\theta}}{(n+1)}<\frac{e}{(n+1)}<\frac{3}{(n+1)}\leq\frac{1}{10^4}\Rightarrow 30.000\leq(n+1)\Rightarrow n=7$$

Luego los ocho primeros términos del desarrollo de e^x nos dan el valor de e = 2.7182 ......con cuatro cifras decimales exactas.

4.4. Desarrollo en serie con resto de Cauchy

En las mismas condiciones del desarrollo de Taylor con resto de Lagrange, es posible el desarrollo en serie potencial con resto de Cauchy , de una función en un punto. En x = a : ∃ m∈(a , b) tal que

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+.........+\frac{f^n(a)}{n!}h^n+\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{n!p}h^{n+1}(1-\theta)^n$$

donde $p = n + 1$, $m = a + \theta h$

4.5. Extremos relativos y absolutos

Sea $f: \mathbf{A} \to R$ una función y $x_0 \in \mathbf{A}$. Se dice que f tiene en x_0 un máximo relativo, mínimo relativo si existe un entono de centro x_0 y radio h : $E(x_0,h)$ tal que $\forall x \in E(x_0,h)$, se verifica

$$\begin{cases} f(x) \le f(x_0), & \text{Máximo relativo en } x_0 \\ f(x) \ge f(x_0), & \text{Minimo relativo en } x_0 \end{cases}$$

Sea $f: \mathbf{A} \to R$ una función y $x_0 \in \mathbf{A}$. Se dice que f tiene en x_0 un máximo absoluto, mínimo absoluto, si $\forall x \in \mathbf{A}$ se verifica

$$\begin{cases} f(x) \le f(x_0), & \text{Máximo absoluto en } x_0 \\ f(x) \ge f(x_0), & \text{Mínimo absoluto en } x_0 \end{cases}$$

Condición necesaria de extremo Sea $f: \mathbf{A} \to R$. Si $x_0 \in \mathbf{A}$ es un extremo y f es derivable en dicho punto, entonces $f'(x_0)=0$. En efecto, si $f'(x_0) \neq 0$ entonces la función es estrictamente creciente o decreciente, que esta en contradicción con el hecho de que x_0 es un extremo. La condición $f'(x_0)=0$, expresa geométricamente que la tangente en el punto $[x_0 , f(x_0)]$ es paralela al eje de abcisas.

La condición anterior es una condición necesaria pero no suficiente : puede ocurrir que una función tenga $f'(x_0)=0$ y sin embargo ese punto no sea extremo. Así la función $f(x)=x^3$, la derivada $f'(0)=0$, y sin embargo en ese punto la función es creciente.

4.6. Cálculo de máximos y mínimos relativos de funciones derivables

Los extremos relativos se pueden alcanzar en:

1. Puntos en los que la función no es continua

2. Puntos en los que la función es continua

3. Puntos en los que la función es derivable una o varias veces

Ejercicio 1 . Sea $f: R \to R$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Esta función tiene un mínimo absoluto y relativo en x=0 . Este es un ejemplo del caso (1)

Ejercicio 2 .Sea f (x)= $|x|$

Esta función es continua en x =0, sin embargo esta función no es derivable en x=0 . Siendo este punto un mínimo relativo. Este es un ejemplo del caso (2)

En la mayoría de los casos las funciones son derivables. Para buscar los máximos y mínimos de una función f(x) , se comienza por resolver la ecuación f'(x)=0 . Los puntos que son solución de ésta ecuación puede haber máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas . Para ver si hay extremo y si es máximo o mínimo vamos a ver las siguientes condiciones suficientes de máximo y mínimo.

4.6.1 Criterio de variación de la función Sea x_0 un extremo de la función sustituyamos el valor de x por $x_0 + h$, si para $|h|$ suficientemente pequeño es $f(x) > f(x_0)$ en el punto x_0 existirá un mínimo. Si por el contrario es $f(x) < f(x_0)$, habrá un máximo. Si en el entorno hay cambio de signo el punto será de inflexión.

4.6.2 Criterio de la derivada primera Sea: f[a ,b]→R , una función que verifica

1. f es continua en [a ,b]

2. f es derivable en (a , x_0) y (x_0 , b)

3. f' >0 en (a , x_0) y f' < 0 en (x_0 , b) , f(x) tiene un máximo relativo en x_0. Si f' < 0 en (a , x_0) y f' > 0 en (x_0 , b) f(x) tiene un mínimo relativo en x_0

Por ser la función continua en [a ,b] en virtud del teorema de Weirstrass la función admitirá un máximo absoluto. Este máximo tendrá que ser tomado en el punto x_0 , ya que, a la izquierda de x_0 por ser $f'(x_0)>0$, la función es creciente y a la derecha de x_0 por ser $f'(x_0)< 0$, la función es decreciente. Análogamente se estudia el caso de mínimo.

4.6.3 Criterio de la derivada segunda Sea f[a ,b]→R una función con derivada segunda en x_0 , interior a [a,b] . Si $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)< 0$ entonces la función posee en x_0 un máximo, si $f''(x_0)> 0$ entonces la función posee en x_0 un mínimo.

Si $f''(x_0)> 0$ y siendo f'' (x) la derivada de f ' (x), f ' (x) es creciente en x_0 . Ahora siendo $f'(x_0)=0$, esta derivada será negativa a la izquierda de x_0 y positiva a la derecha de dicho punto. Luego la función tendrá un mínimo local en el punto x_0 .

4.7. Concavidad , convexidad e inflexión en un punto

Función convexa Se dice que una función f(x) definida en un intervalo I es convexa en dicho intervalo , si todo punto del segmento AB , siendo A (a , f(a)) , B (b , f(b)) queda encima de la gráfica

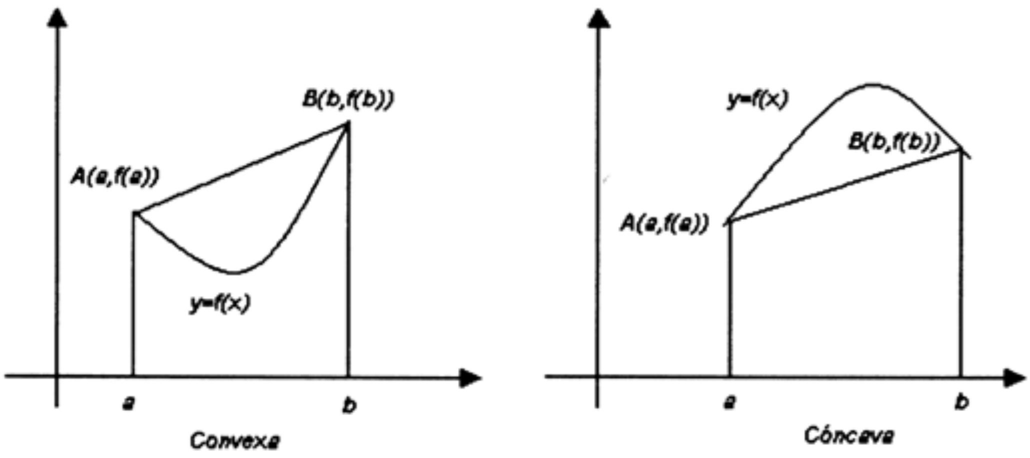


Fig .1

Función cóncava Se dice que una función $f(x)$es cóncava en un intervalo I ,si todo punto del segmento AB , con A (a , f(a)) , B (b , f(b)) queda debajo de la gráfica.

Punto de Inflexión Se dice que la función f(x) tiene un punto de inflexión en un punto x_0,si en dicho punto la función pasa de convexa a cóncava o al revés.

Sea f: **A→R** Si f(x) posee un punto de inflexión en x_0 y f es derivable al menos dos veces en x_0 , entonces $f''(x_0)=0$, ya que si $f''(x_0)\neq 0$ la función sería estrictamente convexa o estrictamente cóncava.

La condición $f''(x_0)=0$ es necesaria para la existencia de punto de inflexión , pero no es suficiente. Puede ocurrir que $f''(x_0)=0$ y, sin embargo, ese punto no sea de inflexión. Así, la función $f(x) = x^4$ tiene en $x_0=0$ derivada segunda nula, y en dicho punto la función posee un mínimo

4.8. Aplicaciones de la fórmula de Taylor

La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $(x_0 , f(x_0))$ es

$$y- f(x_0)= f'(x_0)(x-x_0)$$

La ordenada de esta recta tangente en el punto $x= x_0+h$ será

$$y = f(x_0) + h\ f'(x_0)$$

La ordenada de la curva en el punto x_0+h según la fórmula de Taylor , limitada en la derivada segunda

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta h) \qquad 0 < \theta < 1$$

Luego la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la tangente correspondiente al punto x_0+h es

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta h)$$

Sea $f''(x_0)>0$, al ser $f''(x)$ continua en x_0 , se tiene que en todos los puntos de un entorno de x_0 , es positiva,luego para $|h|$ suficientemente pequeño se verifica que $f''(x_0+\theta h) > 0$ y , por tanto, la diferencia de ordenadas

$$f(x_0 + h) - y = \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta h)$$

es positiva, cualesquiera que sea el signo de h. Lo cual implica $f(x_0+h)> y$ .Luego si $f''(x_0)>0$ la gráfica de f(x) es convexa en un entorno de x_0 .

Si $f''(x_0)< 0$, será negativa en todos los puntos de un entorno de x_0, luego para $|h|$ suficientemente pequeño se verifica que

$$f(x_0 + h) - y = \frac{h^2}{2} f''(x_0 + \theta h)$$

cualesquiera que sea el signo de h. Lo cual implica $f(x_0+h)< y$. Luego si $f''(x_0)< 0$ la gráfica de $f(x)$ es cóncava en un entorno de x_0.

Vamos a suponer que $f''(x_0)= 0$ y que p sea el orden de las primeras derivadas sucesivas de f(x) que no se anulan en el punto x_0, con lo cual se verifica

$$f''(x_0)= f'''(x_0)= \dots\dots\dots= f^{p-1}(x_0)=0 \ , \ f^{p}(x_0)\neq 0$$

Utilizando la fórmula de Taylor limitada a la derivada de orden p se tiene

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^p}{p!} f^{p}(x_0 + \theta h)$$

En el punto x_0+h la diferencia entre la ordenada de la curva y la de la tangente en x_0 es

$$f(x_0+h)-y=\frac{h^p}{p!}f^p(x_0+\theta h)$$

Como $f^p(x)$ es continua en x_0 resulta que para $|h|$ suficientemente pequeño, $f^p(x_0+\theta h)$ tiene el mismo signo que $f^p(x_0)$. Luego se tiene

1. p par y $f^p(x_0)>0$, $f(x_0+h)-y>0$ cualesquiera que sea el signo de h, la gráfica es convexa en un entorno de x_0

2. p par y $f^p(x_0)<0$, $f(x_0+h)-y<0$ cualesquiera que sea el signo de h , la gráfica es cóncava en un entorno de x_0

3. p impar y $f^p(x_0)\neq 0$, $f(x_0+h)-y$ tiene signos opuestos según que h sea positivo o negativo , luego la gráfica tiene un punto de inflexión en el punto x_0

4.9. Cálculo de máximos y mínimos

Sabemos que si f(x) tiene un máximo o un mínimo en el punto x_0 y la función es derivable en dicho punto se tiene: $f'(x_0)=0$. Supongamos, que $f'(x_0)=0$ y sea p el orden de las primeras derivadas sucesivas que no se anula en x_0 , es decir

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\dots\dots\dots=f^{p-1}(x_0)=0\ ,\ f^p(x_0)\neq 0$$

La formula de Taylor limitada en la derivada de orden p es

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h^p}{p!}f^p(x_0+\theta h)$$

La diferencia de ordenadas de la curva entre los puntos x_0+h y x_0 , será

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^p}{p!}f^p(x_0+\theta h)$$

Por la continuidad de la función $f^p(x)$,los valores $f^p(x_0)$ y $f^p(x_0+\theta h)$ tienen el mismo signo para $|h|$ suficientemente pequeño. Casos a considerar

1. **Si p es par** y $f^p(x_0)>0$, la diferencia $f(x_0+h)-f(x_0)$ es positiva, cualesquiera sea el signo de h. La función tiene un mínimo en el punto x_0

2. **Si p es par** y $f^p(x_0) < 0$, la diferencia $f(x_0+h)-f(x_0)$ es negativa, cualesquiera sea el signo de h. La función tiene un máximo en el punto x_0

3. Si p es impar y $f^p(x_0) \neq 0$, la diferencia $f(x_0+h)-f(x_0)$ tiene signos opuestos según que h sea positivo o negativo.En este caso el punto es de inflexión y no hay ni máximo ni mínimo en x_0

Regla para hallar los máximos y mínimos de una función Para calcular máximos y mínimos de una función f(x) , se resuelve la ecuación f'(x)=0 . Si x_0 es una raíz de dicha ecuación se hallan los valores hasta una derivada que no se anule en x_0 . Si esta derivada es de orden par y positiva, la función tiene un mínimo en x_0 . Si dicha derivada es de orden par y negativa la función tiene un máximo en x_0 .Si dicha derivada es de orden impar, el punto es de inflexión y no hay ni máximo ni mínimo en x_0

4.10. Representación gráfica de funciones

1. Dominio de definición de una función f(x) , es el conjunto de valores de x para los cuales esta f(x) tiene un valor perfectamente determinado. Veamos el dominio de definición de algunos tipos de funciones:

Función polinómica $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots\dots\dots\dots + a_nx^n$ esta función esta definida $\forall x \in R$.

Función racional

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots\dots\dots\dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots\dots\dots\dots + b_mx^m}$$

Dominio definición (- ∞ , ∞) excepto los valores de x que hagan nulo el denominador

Función irracional $f(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

Si n es impar, la función dada existe para los mismos valores que f(x) .

Si n es par, la función dada existe solo para valores de x que hagan f(x) positiva o nula.

2.Simetrías Estudiar la simetría es muy importante a la hora de intentar representar curvas, ya que sabemos que si una función es par , la curva será simétrica respecto al eje OY, y si la función es impar, la curva será simétrica respecto al origen de coordenadas.

Pero debemos tener en cuenta que para las funciones no uniformes, es decir funciones en las que a un valor de x le corresponde más de un valor para y, puede existir simetría respecto al eje de abcisas cuando la curva no cambia si se sustituye y por (-y) .

3. Asíntotas Sea un punto variable P, que se mueve sobre una curva de ecuaciones $y = f(x)$. Puede suceder que una de las dos coordenadas (x, y) de P, o las dos tiendan a infinito cuando P describe una rama de la curva, representada por $y = f(x)$; en este caso se dice que la rama es infinita, es decir, que existe una asíntota

Se llama asíntota de la curva a una recta r, tal que la distancia de un punto variable P de la curva a la recta r tienda a cero cuando P se aleja indefinidamente sobre una rama infinita de dicha curva.

Asíntotas verticales Si $\lim f(x) = \infty$, cuando $x \to a$. La recta $x = a$ es asíntota vertical de la curva $y=f(x)$

Asíntotas horizontales Si $\lim f(x) = \pm b$ cuando $x \to \pm\infty$. La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

Asíntotas oblicuas Supongamos que la curva $y=f(x)$ admita una asíntota oblicua de ecuación $y = m x + n$. Los coeficientes m y n se determinan a partir de:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - m x \right]$$

Ramas parabólicas

Si $m=0$, $n = \infty$ se dice que la curva presenta una rama parabólica según OX. Si $m=\infty$ se dice que la curva tiene una rama parabólica según OY

Si m es finito distinto de cero, $n= \infty$, se dice que la curva tiene una rama parabólica oblicua según la dirección $y = m x$

4. Puntos de corte de la gráfica con las asíntotas Para hallar los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas y con las asíntotas se resuelven los sistemas

Puntos de corte con el eje OX $\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$

Puntos de corte con el eje OY $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$

Puntos de corte con las asíntotas $\begin{cases} y = mx + n \\ y = f(x) \end{cases}$ ó $\begin{cases} y = f(x) \\ x = a \end{cases}$ ó $\begin{cases} y = f(x) \\ y = b \end{cases}$

5. Periodos Se dice que una función $f(x)$ es periódica de periodo T si $f(x + T)=f(x)$.

6.Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos Se llaman intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) al conjunto de todos los valores de la variable x en los que la función f(x) es creciente o decreciente. Para calcular dichos intervalos se calculan las raíces de f' (x)=0 y a continuación se estudia el signo de f'(x) en los puntos interiores de los extremos cuyos extremos son dichas raíces y según sea positivo o negativo la función es creciente o decreciente respectivamente.

Si la función crece en el intervalo de la izquierda de la raíz y decrece en el intervalo de la derecha, la función presenta un máximo en dicho punto y si decrece en el intervalo de la izquierda y crece en el intervalo de la derecha, la función presenta un mínimo en dicha raíz.

7.Concavidad y convexidad de la función, puntos de inflexión Se llaman intervalos de convexidad o de concavidad de la función al conjunto de todos los valores de la variable x en los que la función f(x) es cóncava o convexa. Para calcular dichos intervalos se calculan las raíces de f''(x)=0 y se estudia el signo de dicha función en los puntos interiores de los intervalos cuyos extremos son dichas raíces y, según sea positiva o negativa la función será cóncava o convexa. Si dichas raíces separan intervalos donde la función es cóncava en uno de ellos y convexa en el otro, la función presenta un punto de inflexión en dichas raíces.

8. Puntos múltiples un punto por el que pasa la curva más de una vez se le denomina punto múltiple.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea la funcion: y= L (x+2) .Calcular

a.El polinomio de Taylor en : x = 1

b.EI desarrollo de Mac-Laurin

c.Calcular el término complementario de Lagrange en los desarrollos de Taylor y Mac-Laurin

Polinomio de Taylor en x = 1

$$y(1) = L3,\quad y'(1) = \frac{1}{3},\qquad y''(1) = -\frac{1}{3^2},\qquad y'''(1) = \frac{2!}{3^3},\qquad y'''' = \frac{-\ 3!}{3^4},\qquad y^n = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{3^n}$$

$$f(x) = L\ 3 + \frac{1}{3}\ (x-1) - \frac{1}{3^2}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{3^3}\frac{(x-1)^3}{3} + \dots\dots\dots\dots + \ (-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}\frac{(x-1)^n}{n} + T_1$$

Desarrollo de Mac - Laurin:

$$y(0) = L\ 2,\quad y'(0) = \frac{1}{2},\ \ y''(0) = -\frac{1}{2^2},\qquad y'''(0) = \frac{2!}{2^3},\qquad y''''(0) = \frac{-3!}{2^4},\ \ y^n(0) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{2^n}$$

$$f(x) = L2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2^3}\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\frac{x^n}{n} + T_2$$

Término complementario de Lagrange en el desarrollo de Taylor

$$T_1 = (-1)^{n+2}\frac{1}{(c+2)^{n+1}}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}, \qquad 1 < c < x$$

Término complementario de Lagrange en el desarrollo de Mac-Laurin

$$T_2 = (-1)^{n+2}\frac{1}{(c+2)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad 0 < c < x$$

2. Desarrollar la función $f(x)= e^{x+1}$ por Mac –Laurin.

$$f(0)= e \,,\ f'(0)=e \,,\ f''(0)=e \,,\ldots\ldots\ldots\ldots f^{n}(0)=e$$

$$f(x) = e + e\,x + \frac{1}{2!}e\,x^2 + \frac{1}{3!}e\,x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!}e\,x^n + T_1$$

3. Calcular hasta el orden de las diezmilésimas, el valor del numero e

Sabemos que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + T_1$$

Para: x =1, se obtiene : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!} + T_1$

siendo : T_1 el término complementario de Lagrange que mide el error que se comete, cuando se aproxima la función por el desarrollo. Ahora bien

$$T_1 = \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}, \quad 0 < \theta < 1 \Rightarrow \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10.000} \Rightarrow (n+1)! = 30.000 \Rightarrow n = 7$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2.71822$$

Luego: el valor exacto del número e con cuatro cifras exactas viene dado por: 2.7182

4. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio R = 5

El área del rectángulo viene dada por: A(x ,y)=x .y.Las variables x e y están ligadas por: $x^2+y^2=100$. Luego la expresión del área viene dado por: $A(y)=\sqrt{100-y^2}\quad y$

Anulando la derivada primera, teniendo en cuenta que el área ha de ser máxima, se tiene:

$$A'(y)=\sqrt{100-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{100-y^2}}=0\Rightarrow\left\{ y=5\sqrt{2}\ ,\ x=5\sqrt{2}\right.$$

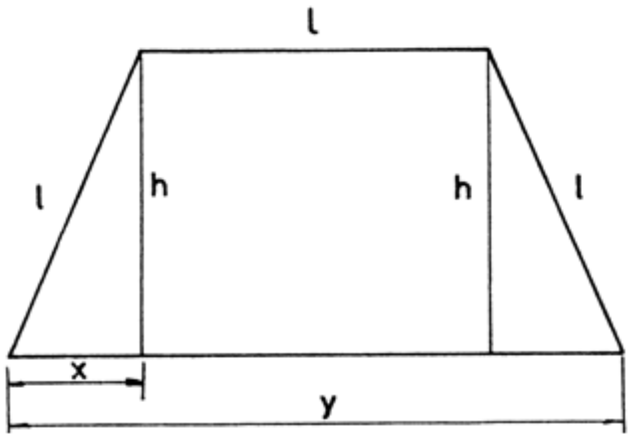
El rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio R es un cuadrado.

5. Entre todos los trapecios de tres lados iguales, calcular las dimensiones del que tiene área máxima.

$$S(x,h)=\frac{(l+y)h}{2}$$

Ahora bien, y=2 x+h,sustituyendo en la expresión anterior:

$$S(x,h)=\frac{(l+y+l)h}{2}=(l+x)h$$



$$h^2+x^2=l^2\Rightarrow\sqrt{l^2-x^2}$$

En estas condiciones se tiene, planteando la condición de que el área sea máxima:

$$S(x)=(l+x)\sqrt{l^2-x^2}\Rightarrow S'(x)=\sqrt{l^2-x^2}-\frac{x(l+x)}{\sqrt{l^2-x^2}}=0\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{l}{2}\\ x=-l\end{cases}$$

La solución $x = -1$, no tiene sentido. Para $x = \frac{1}{2}$, $S''(x) < 0$. Máximo. Luego y= 2 l

6. Hallar el 5º polinomio de MacLaurin y generalizarlo para el enésimo polinomio:

a) f (x) = sen x

$$f(0) = 0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f''''(0)=0,\ f'''''(0)=1$$

El siguiente polinomio de Taylor: $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

De manera general: $\operatorname{sen} x \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

b) f (x) = cos x

$$f(0) = 1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,\ f''''(0)=1,\ f'''''(0)=0$$

Polinomio de Taylor: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

Y de manera general: $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

7. Hallar el 4º polinomio de MacLaurin de la función: $f(x)=(1+x)^r$

$$(1+x)^r \approx 1 + r\,x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!}x^4$$

$$(1+x)^r \approx 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{r(r-1)(r-2)......(r-k+1)}{k!}x^k$$

8. Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres de la función: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Hacemos la división ordenando los polinomios de menor a mayor grado

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1} = -3 - 5x - 5x^2 - 5x^3 ....$$

9. Hallar los extremos absolutos de la función en el intervalo [0 ,3]

$$f(x)= 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$$

Primero calculamos los puntos críticos, puntos en los que la derivada primera vale cero , que son

$$x = 2 , x = -1$$

Comparamos los valores de la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo

$$\begin{aligned} &f(0) = 15 \text{ Máximo} \\ &f(2) = -5 \text{ Mínimo absoluto} \\ &f(3) = 6 \end{aligned}$$

10. Se define la función $f(x) = x - \frac{a}{x}$, $x \neq 0$; determinar a, de modo que:

a) f tenga un mínimo en x = 2

b) f tenga un máximo en x = -1

$$\text{a) } f'(2)=0 \quad 4+a=0 \quad a = -4$$

$$\text{b) } f'(-1)= 0 \quad 1+a=0 \quad a = -1$$

11. Dividir una recta AB en dos partes tales que $AC^3 . BC$ sea máxima

Sea AC = x , BC = b , de forma que x + b= a

Planteamos $y = b x^3 = (a-x) x^3 = a x^3 - x^4$

$y' = 3 a x^2 - 4 x^3 = 0 \quad x= 0 , x = 3a /4$

para x=0 , $y''' \neq 0$ luego no hay ni máximo ni mínimo

Para $x=3a /4$, $y''<0$ (máximo) , $b=a/4$

12. Calcular el desarrollo limitado de f(x)= senx (1-cos x) y de $g(x) = x^3\sqrt[4]{1-x^2}$

$$\operatorname{sen} x(1-\cos x) = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + 0(x^6)\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + 0(x^7)\right) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{80}x^7 + 0(x^8)$$

$$x^3\sqrt[4]{1-x^2} = x^3 - \frac{x^5}{4} - \frac{3x^7}{32} - \frac{7x^9}{128} + 0(x^{10})$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar el polinomio de Taylor para la función: f(x)= $e^{x}+e^{-x}$ en el punto x =0

Solución : $f(x)=2+\frac{2}{2!}x^2+\frac{2}{4!}x^4+\dots\dots\dots\dots+\left(\frac{1+(-1)^n}{n!}\right)x^n$

2. Dada la función : f(x)= $4x^3-3x^2+5x-1$. Desarrollarla en serie de potencias de (x – 2)

Solución: $f(x)=29+41(x-2)+21(x-2)^2+4(x-2)^3$

3. Representar la función: $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

4. Representar la función: $y=\frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$

5. Representar la función: y= L (x^3-3x+2)

6. Representar la función: $y=x+\sqrt{x^2-1}$

7. Hallar el polinomio de orden cuatro de MacLaurin de las funciones: a) $(1+x)^{\sqrt{2}}$, b) $\sqrt{1+x}$

SOLUCION :

$$(1+x)^{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}\,x+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{3!}x^3+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-3)}{4!}x^4$$

$$\sqrt{(1+x)}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$$

8. Hallar el polinomio de orden cinco de MacLaurin: f(x)=e^{x}

SOLUCIÓN: $e^x\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

9. Calcular los coeficientes a, b y c de la parábola y= ax^2+bx+c para que pase por el punto (-2, -5) y tenga un mínimo en el punto (5, 8).

SOLUCIÓN: $a=-\frac{13}{49}$; $b=\frac{130}{49}$; $c=\frac{67}{49}$

10. Al caer cierta cantidad de arena en el suelo a razón de 12 cm^3 por segundo , se forma un montón cónico cuya altura es 2/3 del radio de su base ¿ Cual es la velocidad de crecimiento de la altura cuando está ha alcanzado un valor de 10m .

SOLUCION $h'(t_0) \approx 0.167.10^{-5}$

11. Estudiar los extremos absolutos y relativos de la función $f(x)=\frac{-x}{1+x^2}$ en todo R

Solución: Máximo relativo en x =-1 , mínimo relativo en x=1

$f(-1)=\frac{1}{2}$ (Máximo absoluto) , $f(1)=-\frac{1}{2}$ (Mínimo absoluto)

12. Calcular a , b y c tales que la grafica de la función $f(x)=a\,x^3+bx^2+cx$ tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión (1 , 1)

Solución: a=1, b = -3, c = 3

13. Calcular a , b , c y d para que la función $f(x)=a\,x^3+bx^2+cx+d$ tenga un mínimo relativo de valor -3 en x = 0 y un máximo relativo de valor 4 en x =1

Solución: a =-14 , b = 21, c = 0 , d = -3

14. Deseamos construir una lata cilindrica con 40 cm^3 de capacidad . El material del fondo y de la tapa es dos veces más caro que el del lateral . Hallar el radio y la altura de la lata más económica

Solución: $r=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$, $h=4r$

15. Calcular el punto más cercano y más alejado de la parábola $y=4-x^2$ al punto (0,1)

Solución : Los puntos de la parábola que se encuentran más cercanos al punto (0,1) son

$\left(+\sqrt{\frac{5}{2}},\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}},\frac{3}{2}\right)$, El punto más alejado no existe.

16. Estudiar los extremos absolutos de la función $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ en todo R

Solución : Mínimo (0 ,0) , Máximo no tiene

17. Mediante un desarrollo de Taylor de tercer grado para la funcion f(x)=arco tang x , calcular el valor aproximado de arco tang 0.1 y acotar el error cometido

Vamos a calcular el polinomio de Taylor de tercer grado , desarrollando en el punto x=0

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 +$$

El valor de arco tan 0.1 , sera aproximadamente P_3 (0.1)

El error cometido vendra dado por el termino complementario

$$R_3(x) = \frac{f''''(c)}{4!}x^4$$

Donde c es un numero comprendido entre 0 y 0.1

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \text{arco } \tan x & \to f(0) = 0 \\
f'(x) = \left(1 + x^2\right)^{-1} & \to f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\left(1 + x^2\right)^{-2} 2x & \to f''(0) = 0 \\
f'''(x) = 2(1 + x^2)^{-3}\, 4x^2 - (1 + x^2)^{-2}\, 2 & \to f'''(0) = -2 \\
f''''(x) = \dfrac{-48x^3}{\left(1 + x^2\right)^4} + \dfrac{24x}{\left(1 + x^2\right)^3} &
\end{array}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

Arco tang (0.1)≈P_3 (0.1)= 0.0996666

Error cometido

Arco tang (0.1) - P_3 (0.1)= R_3 (0.1) = $\dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{-24c^3 + 24c^2}{\left(1 + c^2\right)^4}\right) 0.1^4 \qquad , 0 < c < 1$

$$R_3(0.1) < \frac{24}{24}.0.1^4 = 0.0001$$

El error cometido es menor que 0.0001

18. Dada la funcion $f(x) = \dfrac{1}{\left(1 + x\right)^{\frac{1}{2}}}$

a)Su polinomio de Mac-Laurin de grado tres

b)Usar el polinomio anterior para calcular de forma aproximada el valor de $\frac{1}{\sqrt{1.1}}$

c) ¿ Que se puede decir sobre el error cometido en la anterior aproximación

Vamos a calcular el polinomio de Taylor de tercer grado , desarrollando en el punto x=0

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 +$$

El error cometido vendra dado por el termino complementario

$$R_3(x) = \frac{f''''(c)}{4!}x^4$$

Donde c es un numero comprendido entre 0 y x

$$f(x) = (1+x)^{\frac{-1}{2}} \qquad \to f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad \to f'(0) = \frac{-1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \qquad \to f''(0) = \frac{3}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{-15}{8}(1+x)^{-\frac{7}{2}} \qquad \to f'''(0) = -\frac{15}{8}$$

$$f''''(x) = \frac{105}{16}(1+c)^{-\frac{9}{2}}$$

$$P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{5}{16}x^3$$

$$R_3(x) = \frac{105}{16}(1+c)^{\frac{-9}{2}}\,x^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{1.1}} = \frac{1}{\sqrt{1+0.1}} = f(0.1) \approx P_3(0.1) = 0.9534375$$

$$R_3(0.1) = \frac{105}{16}0.1^4(1+c)^{-\frac{9}{2}} < 0.0007$$

Pues $(1+c)^{-\frac{9}{2}} < 1$. Esto quiere decir que el valor de $P_3(0.1)$ difiere del verdadero valor de f(0.1) en una cantidad menor que 0.0007

CAPÍTULO 5. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

5.1. Primitiva de una función

Definiciones Una función F(x) se dice primitiva de otra función f(x) en un intervalo I si se verifica

$$F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$$

Es decir, su derivada coincide con la función en dicho intervalo.

Sumando a F(x) una constante arbitraria C, se obtiene otra función primitiva

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$$

El conjunto de todas las primitivas de f(x) se llama integral indefinida de dicha función y se representa por

$$\int f(x)\,dx= F(x)+C$$

El proceso de obtener una integral indefinida de la expresión f(x) dx se llama integración y se simboliza por el operador $\int$ (signo integral). C se le denomina constante de integración.

5.2. Propiedades de la integral indefinida

Si f(x) y g(x) admiten primitivas en un cierto intervalo I, se verifica

$$\boxed{\begin{array}{l}\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\\[2ex] \int k\,f(x)dx=k\int f(x)dx\end{array}}$$

$k\neq 0$, constante real arbitraria

5.3. Tabla de integrales inmediatas

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,(n+1\neq 0) \qquad \int\frac{dx}{x}=L|x|+C$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C \qquad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{La}+C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx=-\cos x+C \qquad \int \cos x\,dx=\operatorname{sen} x+C$$

$\int \tan g\, x\, d\, x = -L\ |\cos x|\ +C$

$\int \cot g\, x\, d\, x = L\,|\ \text{sen}\, x\ |\ +C$

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = -\text{cotg}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan g\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{|a|} \text{arco tang} \frac{x}{|a|} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \text{arcsec}\, x + C$$

$$\int \text{Sh}x\, dx = \text{Ch}\, x + C$$

$\int \text{Ch}\, x\ \ d\, x = \text{Sh}\, x\ +C$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} L \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = L\left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C = \text{ArgSh} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = L\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C = \text{ArgCh} \frac{x}{a} + C$$

5.4. Métodos de integración

Existen diversos métodos para resolver la integral $\int f(x)\, d\, x$. Los más usuales son

Integración por partes

Integración por cambio de variable

También se estudiará la integración de determinados tipos de funciones como: Funciones racionales

Funciones irracionales. Funciones racionales de e^x. Funciones trigonométricas. Funciones hiperbólicas.

5.4.1. Integración por partes

Sean las funciones u(x) y v(x), diferenciables en un intervalo I. Diferenciando la función u(x).v(x) se

Verifica $d[u(x)\,.v(x)] = u'(x)\, v(x)\, d\, x + u(x)\, v'(x)\, d\, x$

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx}$$

que es la fórmula de integración por partes

Ejercicios de aplicación

1. Calcular $I = \int \frac{Lx}{x}\,dx$

$$I = (Lx)^2 - \int \frac{Lx}{x} dx \Rightarrow 2I = (Lx)^2 \Rightarrow \boxed{I = \frac{(Lx)^2}{2} + C}$$

2. Calcular: I= ∫ arctang x d x

$$I = x\ \text{arctang}\,x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \boxed{x\,\text{arctang}x - \frac{1}{2} L(1+x^2) + C}$$

5.4.2. Integración por cambio de variable

El problema consiste en sustituir en la integral ∫f(x) d x la variable x por una nueva variable t con el fin de simplificar los cálculos.

Sea la integral ∫f(x) d x. Se efectúa el cambio de variable x= φ(t) , siendo φ(t) una función derivable que admite función inversa. En estas condiciones se verifica

$$\int f(x)\, d x = \int f[\varphi(t)\ \varphi'(t)]dt = \int g(t)\ \varphi'(t)\ dt = F(t)+C$$

Siendo F(t) una primitiva de la nueva función g(t) φ'(t)

Se vuelve a la variable x mediante el cambio $t = \varphi^{-1}(x)$

Ejercicios de aplicación

3. Calcular: $\int \sqrt[3]{(ax+b)^5}\ dx$

Cambio de variable $a x + b = t^3 \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{a} dt$

$$\int \sqrt[3]{(ax+b)^5}\ dx = \int \frac{3t^7}{a} dt = \frac{3t^8}{8a} + C$$

Deshaciendo el cambio $\int \sqrt[3]{(ax+b)^5}\ dx = \boxed{\frac{3}{8a}\sqrt[3]{(ax+b)^8} + C}$

5.4.3. Integración por reducción

Reciben el nombre de fórmulas de reducción aquellas que permiten calcular una integral I cuando a partir de ella se obtiene otra integral de su mismo tipo pero más sencilla. Veamos algunos casos

a) $I=\int P(x)\, e^{ax}\, dx$

Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int P(x) e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} P(x) - \frac{1}{a}\int P'(x) e^{ax}\, dx$$

Aplicando este proceso reiteradamente se obtiene la integral propuesta

$$\boxed{I = \int P(x) e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[P(x) - \frac{P'(x)}{a} + \frac{P''(x)}{a^2} .....\right]}$$

b) $I_1=\int P(x)\, e^{ax} \cos bx\, dx$ **,** $I_2=\int P(x)\, e^{ax}\, \text{sen}\ bx\, dx$

Multiplicando la segunda integral por la unidad imaginaria i y sumando, se obtiene

$$I_1 + i I_2 = \int P(x) e^{ax} \cos bx\, dx + i\, P(x) \text{sen}\ bx\, dx$$

Teniendo en cuenta que $e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) + i\, \text{sen}(bx))$, la expresión anterior se transforma en

$$I_1 + i I_2 = \int P(x)\, e^{(a+ib)x}\, dx$$

Si aplicamos la expresión obtenida en **a)** a esta integral

$$\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\left[P(x) - \frac{P'(x)}{a+ib} + \frac{P''(x)}{(a+ib)^2} + ...\right] = A + iB \;\;,\; \{A, B \in R\}$$

Identificando las partes reales e imaginarias, obtenemos $I_1=A$, $I_2=B$

Ejercicios de aplicación

4. Calcular $\int x^5\, e^{3x}\, dx$

$$\int x^5 e^{3x}\, dx = \boxed{\frac{e^{3x}}{3}\left[x^5 - \frac{5x^4}{3} + \frac{20x^3}{9} - \frac{60x^2}{27} + \frac{120x}{81} - \frac{120}{243}\right] + C}$$

5.4.4. Integración de funciones racionales

Una función racional es una función de la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios. En este apartado se aborda el cálculo de la integral $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$.

La integración de estas funciones es inmediata cuando P(x)= k Q'(x). En este caso

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = k\int \frac{1}{Q(x)}Q'(x)dx = k\,L\left|Q(x)\right| + C}$$

Se considera ahora el caso general en el que el grado de P(x) ≥ grado de Q(x). Se procede de la siguiente forma:

a) Se divide P(x) entre Q(x) y se obtiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Siendo C(x) y R(x) el cociente y el resto respectivamente. Por lo tanto

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx}$$

$\int C(x)\,dx$ es una integral inmediata y el grado de R(x) es estrictamente menor que el grado de Q(x)

b) Ahora el problema se reduce a calcular la integral $\int \dfrac{R(x)}{Q(x)}dx$ donde el grado de R(x) es estrictamente menor que el grado de Q(x) .Suponiendo $Q(x) = x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_0$

Se hallan las raíces $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots$ de Q(x), que se descompone en factores irreducibles

$$Q(x)=(x-\alpha_1)^{n1}(x-\alpha_2)^{n2}\ldots .$$

Se descompone $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones simples según los casos

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{P_1(x)} + \frac{A_2}{P_2(x)} + \ldots\ldots + \frac{A_k}{P_k(x)}$$

Se hallan las constantes $A_1, A_2\ldots..A_k$ mediante un sistema de ecuaciones

$R(x) = A_1 P_2(x) \ldots\ P_k(x) + A_2(x) P_1(x) \ldots\ P_k(x) + \ldots\ldots + A_k P_1(x) P_2(x) \ldots\ P_{k-1}(x)$

(Método de los coeficientes indeterminados).Por último se integran los diferentes sumandos

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx = A_1 \int \frac{dx}{P_1(x)} + A_2 \int \frac{dx}{P_2(x)} + \ldots\ldots + A_k \int \frac{dx}{P_k(x)}$$

A continuación se analizan los diferentes casos de descomposición de la función $\frac{R(x)}{Q(x)}$

Raíces reales simples Por cada raíz real simple a de Q(x), Q(x)= (x-a)….. se procede de la siguiente forma

$$\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \ldots\ldots}$$

Ejercicios de aplicación

5. Calcular $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} = \frac{A_1(x-1) + A_2(x+1)}{x^2-1} \Rightarrow 1 = A_1(x-1) + A_2(x+1) \Rightarrow$$

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \ A_2 = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \boxed{\frac{1}{2} L|x-1| - \frac{1}{2} L|x+1| + C}$$

Raíces reales múltiples Por cada raíz real múltiple a de orden h de Q(x), $Q(x)=(x-a)^h$ ……..

$$\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_h}{(x-a)^h} + \cdots}$$

Ejercicios de aplicación

6. Calcular $I = \int \frac{6x^4 - 9x^2 + 5}{(x-1)^2 (x+2)(x+1)^2} dx$

$$\frac{6x^4 - 9x^2 + 5}{(x-1)^2 (x+2)(x+1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{(x+2)} + \frac{C_1}{(x+1)} + \frac{C_2}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$A_1=\frac{5}{18},\quad A_2=\frac{1}{6},\quad B_1=\frac{65}{9},\quad C_1=-\frac{3}{2},\quad C_2=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{I=\frac{5}{18}L\left|x-1\right|-\frac{1}{6(x-1)}+\frac{65}{9}L\left|x+2\right|-\frac{3}{2}L\left|x+1\right|-\frac{1}{2(x+1)}+C}$$

Raíces imaginarias simples Si la ecuación algebraica de coeficientes reales Q(x)=0 admite una raíz imaginaria $x=\alpha+i\beta$, admite también la raíz conjugada $x=\alpha-i\beta$. Luego el polinomio Q(x) tiene como divisor el polinomio de segundo grado

$$(x-\alpha)^2+\beta^2=(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)$$

$$Q(x)=(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)=(x-\alpha)^2+\beta^2$$

De manera que por cada par de raíces imaginarias conjugadas simples se tiene un sumando de la forma

$$\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\ldots}$$

$$\int\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\int\frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx+\int\frac{B+A\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=$$

$$=\frac{A}{2}L\left|(x-\alpha)^2+\beta^2\right|+\frac{B+A\alpha}{\beta}\operatorname{arctang}\frac{x-\alpha}{\beta}+C$$

Ejercicios de aplicación

7. Calcular $I=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\Rightarrow$$

$$1=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)\Rightarrow A=1,B=1,C=-1,D=0$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}L\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}L\left|x^2+1\right|+C}$$

5.4.5. Integración de funciones irracionales

a) $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}\right] dx$

Siendo R, la característica de una función racional; los exponentes α, β……. son números racionales positivos o negativos; las constantes reales a, b, c, d son reales y conocidas y cumplen $ad - bc \neq 0$.

Sea m el mínimo común múltiplo de los denominadores de α, β…… Se efectúa el cambio de variable

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^m}$$

Ejercicios de aplicación

8. Calcular $I = \int \frac{x + \sqrt{2x+1}}{1 + 2\sqrt{2x+1}} dx$

Cambio de variable: $2x + 1 = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2}$, $dx = t\,dt$

$$I = \int \frac{t^3 + 2t^2 - t}{2 + 4t} dt = \frac{1}{4}\int t^2 dt + \frac{3}{8}\int t\,dt - \frac{7}{16}\int dt + \frac{7}{8}\int \frac{dt}{2 + 4t} =$$

$$= \frac{1}{12}t^3 + \frac{3}{16}t^2 - \frac{7}{16}t + \frac{7}{32}L|4t + 2| + C$$

Deshaciendo el cambio se obtiene

$$\boxed{I = \frac{1}{12}\left(\sqrt{(2x+1)^3}\right) + \frac{3}{16}(2x+1) - \frac{7}{16}\left(\sqrt{2x+1}\right) + \frac{7}{32}L\left|4\sqrt{2x+1} + 2\right| + C}$$

b) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$

Se efectúa uno de estos cambios

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}\,x + t, a > 0 \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} + t\,x, c > 0 \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t \end{array}}$$

Donde α es una de las raíces de la ecuación a x^2 +bx +c=0

Ejercicios de aplicación

9. Calcular $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 2}}$

Cambio: $\sqrt{x^2 + x - 2} = x + t \Rightarrow x = \dfrac{t^2 + 2}{1 - 2t}$, $dx = \dfrac{-2t^2 + 2t + 4}{(1 - 2t)^2}dt$

$$\sqrt{x^2 + x - 2} = \frac{-t^2 + t + 2}{1 - 2t}$$

$$I = \int \frac{2dt}{t^2 + 2} = \sqrt{2}\,\text{arctang}\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

Deshaciendo el cambio $\boxed{I = \sqrt{2}\,\text{arctang}\dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2} - x}{\sqrt{2}} + C}$

10. Calcular $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{-x^2 + x + 1}}$

Cambio $\sqrt{-x^2 + x + 1} = 1 + x\,t \Rightarrow x = \dfrac{1 - 2t}{1 + t^2}, dx = \dfrac{2t^2 - 2t - 2}{(1 + t^2)^2}dt$

$$\sqrt{-x^2 + x + 1} = \frac{-t^2 + t + 1}{t^2 + 1}$$

$$I = \int \frac{-2dt}{1 - 2\,t} = L|1 - 2\,t| + C$$

Deshaciendo el cambio $\boxed{I = L\left|\dfrac{2\sqrt{-x^2 + x + 1} - 2}{x} - 1\right| + C}$

c) Casos particulares

Integrales del tipo:

$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$ Cambio de variable $\boxed{x = a\,\text{Sht}\ , x = a\,\text{tangt}}$

$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ Cambio de variable $\boxed{x = a\,\text{sen}t\ , x = a\cos t}$

$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ Cambio de variable $\boxed{x = a\,\text{Ch}t,\ \ x = a\sec t}$

Ejercicios de aplicación

11. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

Cambio de variable $x = 3$ tang t $dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \Rightarrow \sqrt{9 + x^2} = \frac{3}{\cos t}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} = \int \frac{dt}{\cos t}$$

O bien, si se realiza el cambio x= 3 Sh t $\Rightarrow \begin{cases} dx = 3\ \text{Ch}\,t\,dt \\ \sqrt{9 + x^2} = 3\text{Ch}\,t \end{cases}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} = \int dt = t + C = \boxed{\text{Arg}\,\text{Sh}\frac{x}{3} + C}$$

12. Calcular: $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$

Cambio de variable $x = 2\,\text{sen}t \Rightarrow dx = 2\cos t\,dt \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 2\cos t$

$$\int \sqrt{4 - x^2}\,dx = 4\int \cos^2 t\,dt = 2t + \text{sen}\,2t + C$$

Deshaciendo el cambio $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx = \boxed{2\arcsen\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + C}$

Integrales del tipo $\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, P(x) polinomio entero en x

Esta integral se calcula aplicando el método alemán: se descompone la integral de la siguiente forma

$$\boxed{\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}}$$

Siendo Q(x) un polinomio de coeficientes a determinar de un grado inferior al de P(x) y K una constante desconocida.

Todos estos parámetros se determinan derivando ambos miembros, eliminando denominadores y aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

Por último se calcula la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Ejercicios de aplicación

13. Calcular $I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)\sqrt{a^2 + x^2} + D\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Derivando

$$\frac{x^3}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \left(2Ax + B\right)\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{x\left(Ax^2 + Bx + C\right)}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{D}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Se eliminan denominadores

$$x^3 = \left(2Ax + B\right)\left(a^2 + x^2\right) + x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + D$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados se obtiene

$$A = \frac{1}{3},\ B = 0\ ,\ C = -\frac{2}{3}a^2\ , D = 0$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2a^2\right)\sqrt{a^2 + x^2} + C}$$

5.4.6. Integración de funciones racionales de e^x

En este apartado se estudia la integral $I = \int R\,(e^{x})\,dx$

Para calcularla se efectúa el cambio de variable $\boxed{e^x = t} \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t} \Rightarrow \boxed{I = \int \frac{R(t)}{t} dt}$

Ejercicios de aplicación

14. Calcular: $I = \int \frac{e^{3x} + e^{2x} + 1}{e^x - e^{-x}} dx$

Cambio $e^{x} = t$

$$I=\int\frac{t^3+t^2+1}{t^2-1}dt=\int t\,dt+\int dt+\int\frac{2+t}{t^2-1}dt=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}L|t+1|+\frac{3}{2}L|t-1|+C$$

Deshaciendo el cambio $\boxed{I=\frac{e^{2x}}{2}+e^x-\frac{1}{2}L|e^x+1|+\frac{3}{2}L|e^x-1|+C}$

5.4.7. Integración de funciones trigonométricas

a) Potencias impares de senos o de cósenos $\int sen^{2m+1}x\,dx$, $\int\cos^{2m+1}x\,dx$

$$I=\int sen^{2m+1}x\,dx=\int sen^{2m}x\;sen\,x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^m\,sen\,x\,dx$$

Cambio $\boxed{\cos x=t\Rightarrow I=-\int\left(1-t^2\right)^m dt}$

Análogamente $I=\int\cos^{2m+1}x\,dx=\int\left(1-sen^2x\right)^m\cos x\,dx$

Cambio $\boxed{sen\,x=t\Rightarrow I=\int\left(1-t^2\right)^m dt}$

Ejercicios de aplicación

15. Calcular $I=\int\cos^5 x\,dx$

$$I=\int\left(1-\cos^2x\right)^2 senx\,dx=-\int\left(1-t^2\right)^2dt=-\frac{t^5}{5}+\frac{2}{3}t^3-t+C$$

Deshaciendo el cambio $\boxed{I=-\frac{1}{5}\cos^5x+\frac{2}{3}\cos^3x-\cos x+C}$

16. Calcular $I=\int\cos^3 x\,dx$

$$I=\int\left(1-sen^2x\right)\cos x\,dx=\int\left(1-t^2\right)dt=t-\frac{t^3}{3}+C$$

Deshaciendo el cambio $\boxed{I=senx-\frac{1}{3}sen^3x+C}$

b) Potencias pares de senos o de cósenos $\int sen^{2m}x\,dx$, $\int\cos^{2m}x\,dx$**,** m par

Se recurre a las fórmulas de Euler

$$senx=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\quad,\quad\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

de manera que

$$\boxed{\begin{array}{l}\int \operatorname{sen}^m x dx = \int\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^m dx \\ \int \cos^m x dx = \int\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^m dx\end{array}}$$

Desarrollando el binomio de Newton se obtiene la integral de una suma de potencias de e^{ix} y de e^{-ix}

Ejercicios de aplicación

17. Calcular: I= $\int \cos^4 x\, dx$

$$I = \int\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 dx = \frac{1}{16}\int\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{i4x}}{4i} + \frac{2e^{i2x}}{i} + 6x - \frac{2e^{-i2x}}{i} - \frac{e^{-i4x}}{4i}\right) + C = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i} + 4\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} + 6x\right) + C =$$

$$= \boxed{\frac{1}{16}\left(\frac{\operatorname{sen}4x}{2} + 4\operatorname{sen}2x + 6x\right) + C}$$

Ejercicios de aplicación

18. Calcular la integral I= $\int \cos^2 x \ \operatorname{sen}^2 x\, dx$

$$I = \int\left(1 - \cos^2 x\right)\cos^2 x\, dx = \int \cos^2 x\, dx - \int \cos^4 x\, dx$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos^3 x + 3\int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos^3 x + 3I \Rightarrow$$

$$I = \int \cos^2 x\, dx - \operatorname{sen} x \cos^3 x - 3I$$

Por otra parte $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}2x}{4}$

Por tanto $\boxed{I = \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen}2x}{16} - \frac{\operatorname{sen}x \cos^3 x}{4} + C}$

d) Integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$

Caso general La integral se reduce a una racional mediante el cambio de variable $\boxed{\operatorname{tang}\frac{x}{2} = t} \Rightarrow$

$$dx = \frac{2dt}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}} = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Casos particulares

R es impar en sen x , R (-sen x, cos x)=-R (sen x, cos x). Se efectúa el cambio cos x = t

R es impar en cos x, R (sen x, - cos x)= -R (sen x, cos x). Se efectúa el cambio sen x = t

R es par sen x y cos x R (- sen x, - cos x)= R (sen x, cos x) . Se efectúa el cambio tang x = t

$$dx = \frac{dt}{1+\operatorname{tang}^2 x} = \frac{dt}{1+t^2} \quad , \quad \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tang} x}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Ejercicios de aplicación

19. Calcular $I = \int \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x - 1}dx$

Cambio $\operatorname{tang}\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{-(t^2+2t+1)}{t^2(1+t^2)}dt$$

$$\frac{-(t^2+2t+1)}{t^2(1+t^2)} = \frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{Ct+D}{1+t^2} \Rightarrow \begin{cases} A=-1, B=-2 \\ C=2 \ , \ D=0 \end{cases}$$

$$I = -\int\frac{dt}{t^2} - 2\int\frac{dt}{t} + \int\frac{2t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{t} - 2L|t| + L|1+t^2| + C =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}} + L\left|1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}\right| - 2L\left|\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right| + C}$$

e) Integrales del tipo ∫ sen (m x) sen (n x) dx**,** ∫ cos (m x) cos (n x) dx **,** ∫ cos (m x) sen (n x) dx

Se transforman en sumas o diferencias de cosenos o de senos

$$\int \operatorname{sen}(m\,x)\operatorname{sen}(n\,x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\,d\,x - \frac{1}{2}\int \cos(m+n)\,x\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + C}$$

$$\int \cos(m\,x)\cos(n\,x)dx = \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + C}$$

$$\int \cos(mx)\operatorname{sen}(n\,x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(m+n)x\,dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(m-n)x\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + C}$$

5.4.8. Integración de funciones hiperbólicas

En este apartado se estudian las integrales ∫R(S h x, C h x) dx. Para ello será útil recordar las siguientes expresiones

$$\mathrm{Ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Sh}\,x = e^x \;, \; \mathrm{Chx} - \mathrm{Shx} = e^{-x}$$

$$\mathrm{Ch}^2x - \mathrm{Sh}^2x = 1 \;, \; \mathrm{Sh}\,2\,x = 2\,\mathrm{Sh}\,x\;\mathrm{Ch}\,x \quad , \quad \mathrm{Sh}^2x = \frac{\mathrm{Ch}\,2\,x - 1}{2}$$

$$\mathrm{C\,h}\,2\,x = \mathrm{Ch}^2x + \mathrm{Sh}^2x\,,\; \mathrm{C\,h}^2x = \frac{\mathrm{Ch}\,2\,x + 1}{2}$$

$$\mathrm{Th2x} = \frac{2\,\mathrm{Th}\,x}{1 + \mathrm{Th}^2x}, \qquad \mathrm{Th}^2x = \frac{\mathrm{Ch}\,2\,x - 1}{\mathrm{Ch}\,2\,x + 1}$$

Ejercicios de aplicación

20. Calcular $\int \frac{dx}{\mathrm{Sh}\,x}$

Cambio C h x = t

$$\int \frac{dx}{Shx} = \int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{2} L|Ch\,x+1| + \frac{1}{2} L|Ch\,x-1| + C = \boxed{L\sqrt{\frac{Ch\,x-1}{Ch\,x+1}} + C}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

SOLUCION: $\arcsin\frac{x}{2} + C$

2. Calcular $I = \int \sqrt[4]{x^3}\, L(2x)\, dx$

SOLUCION: $\sqrt[4]{x^7}\left(\frac{4}{7}L(2x) - \frac{16}{49}\right) + C$

3. Calcular I=∫ arco sen (2 x) dx

SOLUCION: $x \arcsin(2x) + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

4. Calcular I= ∫ x sen x cos x dx

SOLUCION: $\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2 x - \left(\frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{4}\right) + C$

5. Calcular $I = \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$

SOLUCION: $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{La - Lb} + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{Lb - La} - 2x + C$

6. Calcular: $I = \int \frac{x\, e^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$

SOLUCION: $I = \frac{e^{\arcsin x}}{2}\left(-\sqrt{1-x^2} + x\right) + C$

7. Calcular I=∫ e^{2x} sen 3 x dx

SOLUCION: $I = \frac{e^{2x}}{13}(2\operatorname{sen}3x - 3\cos 3x) + C$

8. Calcular I=∫ x (L x) ^{2} dx

SOLUCION: $\frac{x^2}{2}(L\,x)^2 - \frac{x^2}{2}Lx + \frac{1}{4}x^2 + C$

9. Calcular I=$\int \text{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$

SOLUCION: $\boxed{\frac{\text{sen}^4 x}{4} - \frac{\text{sen}^6 x}{6} + C}$

10. Calcular $I = \int \frac{3x^3}{x^8+1}dx$

SOLUCION: $\frac{3}{4}\text{arctang}(x^4) + C$

11. Calcular $\int \left(2x - \sqrt{x}\right)^2 \sqrt[3]{2x}\, dx$

SOLUCION: $\sqrt[3]{2}\left[\frac{6x^{10/3}}{5} - \frac{24x^{17/6}}{17} + \frac{3x^{7/3}}{7}\right] + C$

12. Calcular I=$\int \text{sen}\, x\, e^{\cos x}\, dx$

SOLUCION: $-e^{\cos x} + C$

13. Calcular $\int \frac{4x^2}{\sqrt[4]{3x^3 - 1}}dx$

SOLUCION: $\frac{16}{27}\left(3x^3 - 1\right)^{3/4} + C$

14. Calcular $\int \frac{2^x}{1+2^x}dx$

SOLUCION: $\frac{1}{L2}L\left(1 + 2^x\right) + C$

15. Calcular I=$\int (x^2 - 5x + 6)\, e^{3x}\, dx$

SOLUCION: $\frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2 - 51x + 71\right) + C$

16. Calcular $I = \int \frac{\left(x^2 + 4\right)dx}{(x-2)^3}$

SOLUCION: $L|x-2|-\frac{4}{x-2}-\frac{4}{(x-2)^2}+C$

17. Calcular $I=\int\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\cos x}dx$

SOLUCION: $\frac{1}{2}L\left|\frac{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right|-\operatorname{arctang}\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)+C$

18. Calcular $\int\frac{x(x-2)}{(x+1)(x^2-9)}dx$

SOLUCION: $-\frac{3}{8}L|x+1|+\frac{5}{4}L|x+3|+\frac{1}{8}L|x-3|+C$

19. Calcular $\int\frac{3x+4}{2+3x-9x^2}dx$

SOLUCION: $\frac{1}{3}\left[L\left(x+\frac{1}{3}\right)-2L\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]+C$

20. Calcular $\int\frac{4x^4-x^3-46x^2-20x+153}{x^3-2x^2-9x+18}dx$

SOLUCION: $2x^2+7x+3L|x-2|-4L|x-3|+5L|x+3|+C$

21. Calcular $I=\int\frac{2x^3-x-7}{x^3-x^2-x-2}dx$

SOLUCION: $2x+L\left[(x-2)\sqrt{x^2+x+1}\right]+\sqrt{3}\operatorname{arctang}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

22. Calcular $I=\int\frac{dx}{x^4-1}$

SOLUCION: $\frac{-1}{2}\operatorname{arctang}x+\frac{1}{4}L\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

23. Calcular $I=\int\frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}dx$

SOLUCION: $\frac{-1}{x-1}-\frac{2}{(1+x)^2}+C$

24. Calcular $I=\int\frac{x+4}{x^2+1}dx$

SOLUCION: $4\arctan g\, x+\frac{L\left|1+x^2\right|}{2}+C$

25. Calcular $I=\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+4x-3}}$

SOLUCION: $-\frac{1}{3}L\left|4-6\left(\sqrt{9x^2+4x-3}-3x\right)\right|+C$

26. Calcular $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-6x-x^2}}$

SOLUCION: $-2\arctan g\left(\frac{\sqrt{1-6x-x^2}-1}{x}\right)+C$

27. Calcular $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

SOLUCION: $-L\left|1-2\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\right|+C$

28. Calcular $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

SOLUCION: $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6L\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C$

29. Calcular $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

SOLUCION: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

30. Calcular $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$

SOLUCION: $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2L\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]+C$

31. Calcular $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

SOLUCION: $\left(\dfrac{x^2-1}{3}\right)\sqrt{1-x^2}+C$

32. Calcular $I=\int \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

SOLUCION: $\boxed{e^x - L\left|e^x+1\right|+C}$

33. Calcular $I=\int \cos^6 x\ dx$

SOLUCION: $\dfrac{1}{64}\left(\dfrac{1}{3}\text{sen}\,6x+3\,\text{sen}\,4x+15\,\text{sen}\,2x+20x\right)+C$

34. Calcular $I=\int\dfrac{\cos x\,dx}{2+\cos x}$

SOLUCION: $x-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\text{arctang}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{tang}\,\dfrac{x}{2}\right)+C$

35. Calcular: $\int\dfrac{\text{tang}\,x\,dx}{1+\cos x}$

SOLUCION: $L\left|\dfrac{1-\text{tang}\,\dfrac{x}{2}}{1+\text{tang}\,\dfrac{x}{2}}\right|+C$

36. Calcular $I=\int \text{sen}^4 x\cos^3 x\ dx$

SOLUCION: $\dfrac{\text{sen}^5 x}{5}-\dfrac{\text{sen}^7 x}{7}+C$

37. Calcular $I=\int \text{sen}\,5x\cos 3x\,dx$

SOLUCION: $-\dfrac{\cos 8x}{16}-\dfrac{\cos 2x}{4}+C$

38. Calcular $I=\int e^x\,\text{sen}\,(e^{x})\,dx$

SOLUCION $:-\cos\left(e^x\right)+C$

CAPITULO 6. INTEGRAL DE RIEMANN

6.1 Integral definida en el sentido de Riemann

Definiciones Dados dos números reales a y b, a < b, se llama partición del intervalo cerrado [a, b] al conjunto finito de puntos de R

$$P= \{x_0, x_1, x_2 \dots\dots x_n \,;\, a = x_0 < x_1 < x_2 \dots\dots < x_n = b\}$$

Estos puntos dan lugar a n intervalos parciales de amplitudes

$$\Delta x_p = x_{p+1} - x_p \,,\; p=0\dots\dots n-1$$

$P_{[a,b]}$ Es el conjunto de todas las particiones del intervalo [a ,b]

Norma o diámetro de una partición Es el máximo de los valores $\Delta x_p = x_{p+1} - x_p$, p = 0,…..n-1

Suma inferior y superior de Riemann Sea f(x) una función acotada en [a, b] $\forall$ $x \in [a, b]$, existen dos valores reales m y M para los que $m \le f(x) \le M$. Se considera en dicho intervalo una partición P de n intervalos parciales

$$P= \{x_0, x_1, x_2 \dots\dots x_n \,;\, a = x_0 < x_1 < x_2 \dots\dots < x_n = b\}$$

Si f(x) está acotada en [a, b], estará también acotada en cualquier subintervalo $[x_p, x_{p+1}]$, p= 0,……n-1.
Sean m_p y M_p los extremos inferior y superior de f(x) en $[x_p, x_{p+1}]$, p= 0,……n-1. Es decir

$$m_p \le f(x) \le M_p \,,\; \forall\, x \in [a\,,\, b]$$

En la Figura 6.1, se ha representado la curva y=f(x) acotada por m y M en el intervalo [a, b] , donde se ha realizado una partición en n intervalos parciales. Se definen las aplicaciones s: P [a, b] → R

$$S: P\,[a, b] \to R$$

$$P \to S(P) = \sum_{p=0}^{n-1} M_p \Delta x_p$$

$$s : P\,[a, b] \to R$$

$$P \to s(P) = \sum_{p=0}^{n-1} m_p \Delta x_p$$

s(P) , S(P) , se denominan suma inferior y suma superior de Riemann correspondientes a la partición P

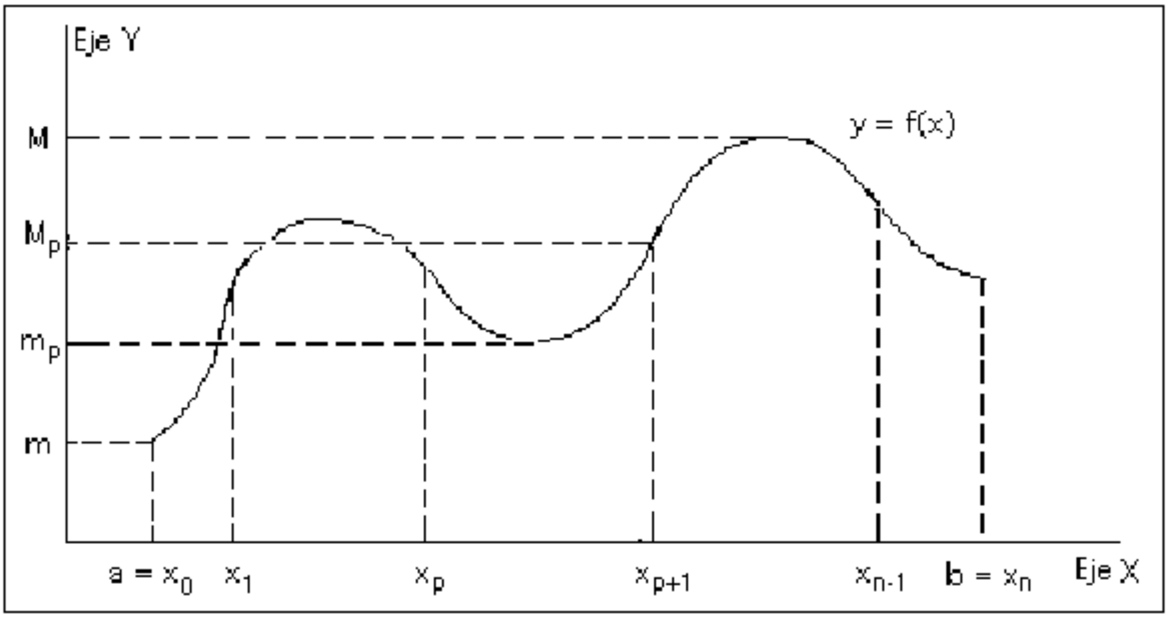


Figura 6.1.

De aquí se deduce que haciendo particiones del intervalo [a , b] cada vez más finas, se obtiene una sucesión monótona creciente de sumas inferiores, acotada superiormente por M (b-a) y por todas las sumas superiores, que tiende a un valor s (el extremo superior de la sucesión):

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots\ldots \leq s_m \leq \ldots\ldots\ldots \leq s$$

Análogamente, se obtiene una sucesión monótona decreciente de sumas superiores, acotada inferiormente por m (b-a) y por todas las sumas inferiores, que converge a un valor S (el extremo inferior de la sucesión)

$$S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq \ldots\ldots \geq S_m \geq \ldots\ldots \leq S$$

Definiciones Se denomina integral inferior de Riemann y se designa por $\int_{\text{INFR}}$ al extremo superior de las sumas inferiores. Es decir

$$\boxed{\sup s(P) = s = \int_{\text{INFR}}}$$

Se denomina integral superior de Riemann y se designa por $\int_{\text{SUPR}}$ al extremo inferior de las sumas superiores. Es decir

$$\boxed{\inf S(P) = S = \int_{\text{SUPR}}}$$

Teorema Sea f(x) una función acotada en [a, b]. Se demuestra que se cumple la siguiente desigualdad

$$\int_{INFR} \leq \int_{SUPR}$$

Definición Sea f(x) una función acotada en [a, b]. Se dice que f(x) es integrable [a ,b] en el sentido Riemann si elegido un número real $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que $S(P) - s(P) < \varepsilon$

Teorema Si f(x) es integrable en [a, b], se verifica $\int_{INFR} = \int_{SUPR}$

$$I = \int_a^b f(x)dx \text{ Integral de Riemann en [a, b]}$$

6.2. Clase de funciones integrables

a) Toda función f continua en [a, b], es integrable en [a, b]

b) Toda función f acotada en [a, b] con un número finito de puntos de discontinuidad en [a, b] es integrable

c) Toda función monótona y acotada en [a, b] es integrable en [a, b]

6.3. Propiedades de la integral definida

a) Si f(x) y g(x) son integrables en [a, b], la función $f(x) \pm g(x)$ también lo es, y se cumple

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

b) Si f(x) es integrable en [a, b] , también lo es la función k f(x) , siendo $k \in R$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

c) El valor de una integral cambia de signo si se permutan los límites de integración

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

d) Si c es un punto interior del intervalo [a, b] , la integral en el intervalo [a, b] se descompone como suma de dos integrales extendidas a los intervalos [a, c] y [c , b]

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

e) Si $f(x)$ es integrable en [a, b], también lo es $|f(x)|$, verificándose

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

f) Propiedades de monotonía .Si f(x) es integrable en [a, b], siendo $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, se verifica

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

6.4. Teorema de la media

Se demuestra que si, f(x) y g(x) son integrables en [a, b] y g(x) tiene signo constante en dicho intervalo, existe al menos un valor $\mu \in [m, M]$ tal que

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx}$$

μ es un número comprendido entre los extremos m y M de f(x) en [a, b]

Casos particulares

a) Si f(x) es continua en [a, b] , existe un número real $\eta \in [a , b]$ tal que $f(\eta)= \mu$. Por tanto

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\eta)\int_a^b g(x)\,dx$$

b) Si f(x) es continua en [a, b] y g(x)=1, entonces se verifica

$$\boxed{f(\eta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

se define como el valor medio de f(x) en [a ,b]

6.5. Interpretación geométrica de la integral definida

Sea f(x) una función integrable y con signo constante en [a, b]. El valor $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ es el área A encerrada por la curva y = f(x), el eje OX y las rectas x = a, x=b

Demostración Supongamos $f(x) \geq 0$ en [a, b]. Sea P una partición del intervalo [a, b]

$$P = \{x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n \,;\, a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_n = b\}$$

En cualquier subintervalo parcial se tiene

$$M_p \leq f(\psi_p) \leq M_p \quad , \quad \forall \psi_p \in [x_p , x_{p+1}]$$

$$m_p \Delta x_p \leq f(\psi_p)\Delta x_p \leq M_p \Delta x_p \Rightarrow$$

$$s(P) = \sum_{p=0}^{n-1} m_p \Delta x_p \leq \sum_{p=0}^{n-1} f(\psi_p)\Delta x_p \leq \sum_{p=0}^{n-1} M_p \Delta x_p = S(P)$$

Además $\qquad s(P) \leq A \leq S(P) \qquad (1)$

Por ser f(x) integrable, se cumple que S (P)- s (P) se puede hacer tan pequeña como se quiera tomando una partición suficientemente fina. Es decir, por ser integrable:

$$\lim_{n\to\infty} s(P) = \lim_{n\to\infty} S(P) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Por tanto, tomando límites en (1)

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b f(x)dx = A$$

(Véase Fig. 6.2)

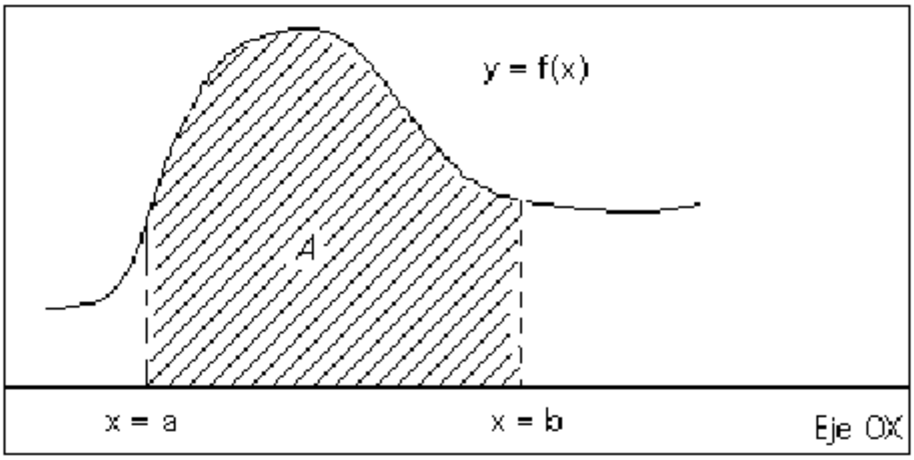


Figura 6.2. Área limitada por la curva y = f(x) ≥0 , el eje OX y las rectas x = a, x =b

Análogamente, si f(x) <0

$$\int_a^b f(x)dx = A < 0 \to \left|\int_a^b f(x)dx\right| = A$$

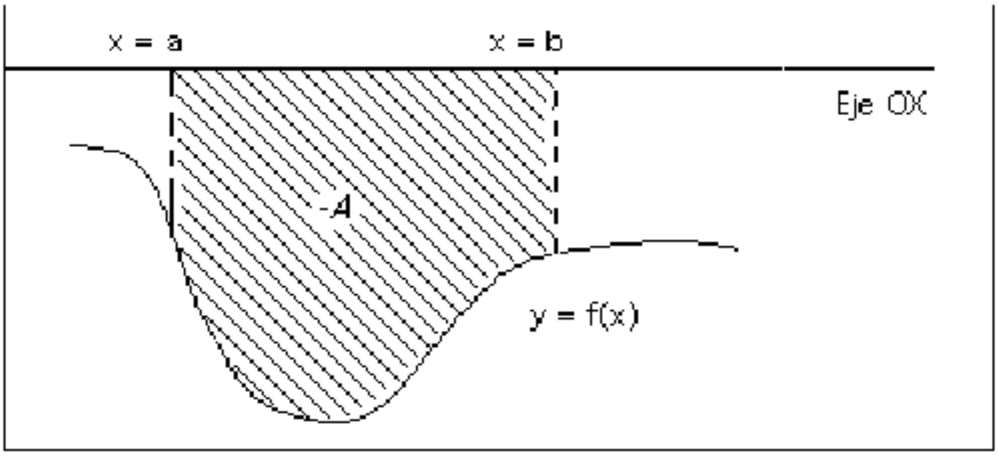


Figura 6.3. Área limitada por la curva y = f(x) < 0, el eje OX y las rectas x = a, x =b

6.6. Teorema fundamental del cálculo integral

Sea una función f: [a, b]→R integrable en [a, b]. Se define la función F: [a, b]→R

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

que depende del límite superior de integración. F(x) representa el área del recinto limitado por la curva y=f(t) , el eje de las abscisas y las rectas t = a , t =x . Se demuestra que

a) F es continua en [a, b]

b) Si f es continua en [a, b], entonces F es derivable en [a, b] y su derivada es F '(x)= f(x) x ∈[a, b]. Es decir, F es una función primitiva de f en [a, b]

6.7. Regla de Barrow

Sea f: [a, b]→ R una función continua en [a, b]. Si existe una función G: [a , b]→R , tal que G' (x)=f(x) en [a, b], entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b}$$

6.8. Integral euleriana de segunda especie

Esta integral fue estudiada primeramente por Euler, siendo posteriormente Legendre el que la designo como integral eulerina de segunda especia. Se define como

$$\gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$$

Descomponiendo esta integral en la forma

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx=\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx+\int_1^{\infty} e^{-x}\,x^{p-1}dx$$

Se demuestra que esta integral converge para p>0.

6.8.1. Cálculo de γ(p) Calculemos el valor de $\gamma(1)$

$$\gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\left(-e^{-x}\right)_0^{\infty}=1$$

Integrando por partes

$$\gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{p-1}dx=\left(\left[\frac{x^p}{p}\right]e^{-x}\right)_0^{\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^p dx=\frac{1}{p}\gamma(p+1)$$

Se obtiene $\gamma(p+1)= p\,\gamma(p)$. Sustituyendo en esta formula p sucesivamente por: (p+1), (p+2)….(p+n-1) y a continuación multiplicando miembro a miembro se verifica

$$\begin{aligned}&\gamma(p+1)=p\,\gamma(p)\\&\gamma(p+2)=(p+1)\gamma(p+1)\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&\gamma(p+n)=(p+n-1)\gamma(p+n-1)\end{aligned}$$

$$\gamma(p+n)=p(p+1)(p+2).....(p+n-1)\gamma(p)$$

Para p =1 se obtiene $\gamma(n+1)= n!$

6.9. Integral euleriana de primera especie

Se define integral euleriana de primera especie

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx$$

la convergencia de esta integral requiere que los parámetros p y q sean positivos.

6.9.1. Propiedades

1. La β (p, q) es simétrica respecto a los parámetros p y q, es decir β (p, q) = β (q, p). En efecto haciendo el

cambio de variables x=
1- u, se verifica

$$\beta(p,q) = -\int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \int_0^1 u^{q-1} (1-u)^{p-1} du = \beta(q,p)$$

2. Aplicación de la β (p, q) al cálculo de algunas integrales trigonométricas, haciendo el cambio de variable: x= sen ^{2} θ

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-1}\theta \ \cos^{2q-1}\theta \ d\theta$$

3. Veamos otra transformación de la β (p, q), mediante el cambio $x = \dfrac{y}{1+y}$

$$\beta(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$$

6.10. Reducción de la integral de primera a la segunda especie

6.10.1 Se demuestran que $\beta(p,q) = \dfrac{\gamma(p)\gamma(q)}{\gamma(p+q)}$

6.10.2 Fórmula de los complementos Considerando la expresión

$$\beta(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$$

Para q = 1- p, 0< p < 1, se verifica

$$\beta(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y} dy$$

El valor de esta integral es $\gamma(p)\,\gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\,\pi}$

6.11. Integrales reducibles a eulerianas

Primer caso Sea la integral $I_1 = \int_0^a x^{p-1} (a-x)^{q-1} dx$

Realizando el cambio x = a u, se obtiene $I_1 = \int_0^a x^{p-1} (a-x)^{q-1} dx = a^{p+q-1} \beta(p,q)$

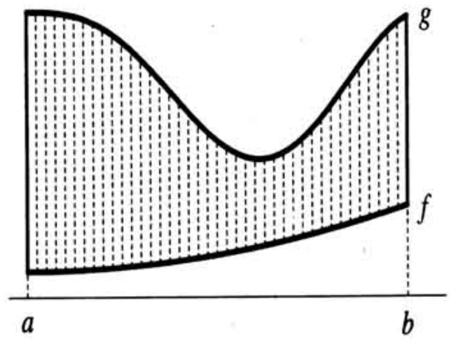
Segundo caso Sea la integral $I_2 = \int_0^1 x^{p-1}\left(1 - x^m\right)^{q-1} dx$

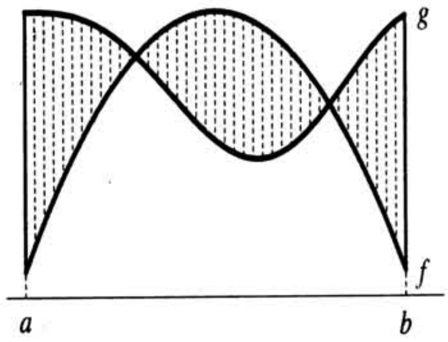
Cambio $x^m = u$

$$x = u^{\frac{1}{m}} \Rightarrow dx = \frac{1}{m} u^{\frac{1}{m}-1} du \Rightarrow I_2 = \frac{1}{m}\int_0^1 u^{\frac{p-m}{m}} (1-u)^{q-1} du = \frac{1}{m}\beta\left(\frac{p}{m}, q\right)$$

6.12. Área limitada por dos curvas planas

Sean las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$. Se determinan primero los puntos de intersección de dichas curvas, resolviendo el sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$





Si los puntos obtenidos tienen abcisas a y b, suponiendo que en (a, b), f(x) > g(x), el área viene dada por

$$A = \int_b^a \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Esto se generaliza al caso de funciones arbitrarias f y g mediante la formula

$$A = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx$$

6.12.1. La curva es dada por sus ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas son $x = x(t)$, $y = y(t)$

El área limitada por dicha curva el eje de abcisas y las ordenadas x=a, y =b, viene dada por la expresión

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt$$

Los límites de integración t_1 , t_2 , se obtienen a través de las ecuaciones $a = x(t_1)$, $b = y(t_2)$

6.12.2. La curva es dada por su ecuación en coordenadas polares

Se trata de calcular el área limitada por el arco de curva de ecuación polar $\rho = \rho(\theta)$ y las semirrectas de ecuaciones $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$. El área del sector será

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$$

6.13. Longitud de un arco de curva

6.13.1. Longitud de un arco de curva plana dada en forma explícita

Sea la curva $y=f(x)$ definida y continua así como $f'(x)$ en el intervalo $[a, b]$. La longitud del arco de curva entre los puntos $x=a$, $x=b$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

6.13.2. Longitud de una curva en coordenadas paramétricas

Sea la ecuación de la curva en coordenadas paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$ teniendo estas funciones derivadas continuas. Si t_0, t_1 son los valores del parámetro t correspondientes a los puntos A y B, se tiene

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

6.13.3. Longitud de una curva en coordenadas polares

Sea $\rho=\rho(\theta)$ la ecuación de la curva en coordenadas polares, la longitud de la curva, viene dada por

$$L=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\theta^2}$$

6.14. Volúmenes de cuerpos de revolución

6.14.1. Volumen engendrado por una curva dada en forma explícita

Sea la curva $y=f(x)$, definida y continua en el intervalo $[a ,b]$.El volumen engendrado por esta curva al girar alrededor del eje OX viene dado por

$$V=\pi\int_a^b [f(x)^2]\,dx=\pi\int_a^b y^2 dx$$

Análogamente: el volumen engendrado al girar alrededor del eje OY viene dado por

$$V=\pi\int_c^d x^2 dy$$

Si en lugar de un arco de curva tenemos una curva cerrada o un área plana limitada por dos arcos $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, el volumen engendrado vendrá dado por

$$V = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2 \right) dx$$

6.14.2. Volumen engendrado por una curva en paramétricas

El volumen engendrado por una curva en paramétricas al girar alrededor del eje OX, viene dado por

$$V = \int_{t_0}^{t_1} \pi \left[y(t) \right]^2 x'(t) dt$$

En el caso de que la curva gire alrededor del eje OY, la expresión será

$$V = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) x(t) x'(t) dt$$

6.14.3. Volumen engendrado por una curva en coordenadas polares

El volumen engendrado por un sector limitado por el arco de curva $\rho=\rho(\theta)$ y los radios polares $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$, al girar alrededor del eje polar viene dado por

$$V = \frac{2}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

6.15. Área de una superficie de revolución

Sea la curva $y=f(x)$, definida y continua en [a, b]. Al girar alrededor del eje OX engendrará una superficie de revolución, cuya área vendrá definido por la expresión

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} \, dx$$

En el caso de que el eje de revolución sea el eje OY, la fórmula será

$$A = 2\pi \int_a^b x \, dl$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. a) Demostrar que $\int_0^a F(x) \, dx = \int_0^a F(a - x) \, dx$

b) Aplicar el resultado anterior para demostrar la siguiente igualdad

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

SOLUCIÓN: a) Cambio de variable a – x =t. Por tanto: $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = 0 \\ x = 0 \Rightarrow t = a \end{cases}$

$$\boxed{\int_0^a F(x)\,dx = \int_a^0 F(a-t)(-dt) = \int_0^a F(a-t)\,dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^n dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

2. Calcular $I = \int_0^{\pi/4} L(1 + \tan x)\,dx$

SOLUCIÓN: Cambio $x = \frac{\pi}{4} - t$

$$I = \int_0^{\pi/4} L\left[1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right] dt = \int_0^{\pi/4} L\left[1 + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan t}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan t}\right] dt = \int_0^{\pi/4} L\left[\frac{2}{1 + \tan t}\right] dt =$$

$$L2\int_0^{\pi/4} dt - \int_0^{\pi/4} L(1 + \tan t)\,dt \Rightarrow 2I = L2\int_0^{\pi/4} dt \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4}L2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{8}L2$$

3. Calcular $\int_0^{\infty} \frac{Lx}{1+x^2}\,dx$, suponiendo que es convergente

SOLUCIÓN: Descompongamos la integral de la siguiente forma

$$\int_0^{\infty} \frac{Lx}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{Lx}{1+x^2}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{Lx}{1+x^2}\,dx$$

Resolvamos la integral $\int_1^{\infty} \frac{Lx}{1+x^2}\,dx$

Cambio de variable $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

Por tanto $\int_0^{\infty} \frac{Lx}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{Lx}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{Lt}{1+t^2}\,dt = 0$

4. Dada la función f(x)= e^x, demostrar que es integrable en [2,5] y calcular el valor $I = \int_2^5 e^x\,dx$

SOLUCIÓN: Veamos que f(x) es integrable en [2 ,5]. Sea P una partición del intervalo [2 ,5] de subintervalos iguales y formemos las sumas S (P) y s (P)

$$x_0 = 2 < x_1 = 2 + \frac{3}{n} < x_2 = 2 + \frac{6}{n} < x_3 = 2 + \frac{9}{n} < \cdots\cdots < x_{n-1} = 2 + \frac{3(n-1)}{n} < x_n = 5$$

$$s(P) = \frac{3}{n}e^2 + \frac{3}{n}e^{2+\frac{3}{n}} + \frac{3}{n}e^{2+\frac{6}{n}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{3}{n}e^{2+\frac{3(n-1)}{n}} = \frac{3}{n}\left[e^2 + e^{2+\frac{3}{n}} + e^{2+\frac{6}{n}} + \cdots + e^{2+\frac{3(n-1)}{n}}\right]$$

$$S(P) = \frac{3}{n}e^{2+\frac{3}{n}} + \frac{3}{n}e^{2+\frac{6}{n}} + \frac{3}{n}e^{2+\frac{9}{n}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{3}{n}e^5 = \frac{3}{n}\left[e^{2+\frac{3}{n}} + e^{2+\frac{6}{n}} + e^{2+\frac{9}{n}} + \cdots\cdots + e^5\right]$$

$$S(P) - s(P) = \frac{3}{n}\left(e^5 - e^2\right)$$

Cuando $n \to \infty$, la diferencia S(P)-s(P) puede hacerse tan pequeña como queramos con lo cual la función es integrable.

5. Hallar el área limitada por la curva de ecuaciones paramétricas y las ordenadas x = 0, x=5

$$\begin{cases} x = 5\ \cos(t) \\ y = 4\ \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Límites de integración: $x = 0 \Rightarrow \cos(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, x = 5 \Rightarrow \cos(t) = 1 \Rightarrow t = 0$

$$A = \int_0^5 y\,dx = 20\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(t)dt = 10\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 5\pi$$

6. Dada la lemniscata de ecuación $\rho^2 = 2\ a^2 \cos 2\ \theta$. Hallar su área.

SOLUCIÓN: Por simetría del problema el área vendrá dada por $A = 4\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta\, d\theta = 2a^2$

7 . Calcular el área limitada por el eje de abcisas y la función y=sen x entre los puntos $x = \pi, x = \frac{3\pi}{2}$.

SOLUCIÓN: La función sen (x) en el intervalo dado es negativa, luego el área vendrá generada por:

$$A = -\int_a^b f(x)dx = -\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx = 1$$

8 . Calcular la longitud de la curva de ecuaciones paramétricas $x = a \cos^3 \theta$, $y = a\operatorname{sen}^3 \theta$

SOLUCIÓN: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^4(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta) + 9a^2\operatorname{sen}^4(\theta)\cos^2(\theta)}\,d\theta = 3a\int_0^{2\pi} [\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)]d\theta$

$$L = 12a\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta = 12\ a\ \ \beta(1,1) = 6a$$

9. Hallar la longitud de la espiral $\rho = e^{2\theta}$ desde $\theta=0$, $\theta=2\pi$

SOLUCIÓN: La longitud en coordenadas polares será

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(2e^{2\theta}\right)^2 + \left(e^{2\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{5e^{4\theta}}\,d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}\left[e^{4\pi} - 1\right]$$

10. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX y del eje OY por la figura limitada por un arco de cicloide de ecuaciones

$$\begin{cases} x = R(t - \mathrm{sen}(t)) \\ y = R(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Volumen alrededor del eje OX

$$V = \pi\int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi R^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^3\,dt = \pi R^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos(t) + 3\cos^2(t) - \cos^3(t)\right)dt = 5\pi^2 R^3$$

Volumen alrededor del eje OY

$$V = 2\pi\int_0^{2\pi} x\,y\,dx = 2\pi R^3 \int_0^{2\pi} (t - \mathrm{sen}(t))(1 - \cos(t))^2\,dt = 6\pi^3 R^3$$

11. Hallar el volumen de un cuerpo engendrado al girar la curva $y = x^3$ alrededor del eje OY comprendido entre y=0, y=1

SOLUCIÓN: $V = \pi\int_0^1 x^2 dy = \pi\int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3}{5}\pi$

12. Hallar el área de un paraboloide de revolución

SOLUCIÓN: Sea $y^2 = 2\,p\,x$ la ecuación de la parábola que gira alrededor del eje OX. Calculemos el área desde 0 a x.

$$S = 2\pi\int_0^x y\,\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^x \sqrt{\left(2px + p^2\right)}\,dx = \frac{4\pi}{3}\left[\left(2px + p^2\right)^{\frac{3}{2}} - p^3\right]$$

13. Calcular la integral $I = \int_0^1 \frac{L(1+x)\,dx}{1+x^2}$

SOLUCIÓN: Cambio: x= tan θ

$$I = \int_0^1 \frac{L(1+x)\,dx}{1+x^2} = \int_0^{\pi/4} L(1 + \tan\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{8} L2$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular $I = \int_0^1 \sqrt[5]{x^2 (1-x)^3}\, dx$

Solución: $\dfrac{3}{25} \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{5}}$

2. Calcular $I = \int_0^\infty \dfrac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}$

Solución: $\dfrac{\pi}{16}$

3. Calcular $I = \int_0^\infty \dfrac{x^4 dx}{(1+x^3)^2}$

Solución: $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{27}$

4. Calcular siendo n es una cte positiva superior a 2: $I = \int_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^n}}$

Solución: $\dfrac{1}{n} \dfrac{\gamma\left(\frac{1}{n}\right)\gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}{\gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$

5. Calcular siendo n una cte positiva superior a 2: $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$

Solución: $\dfrac{1}{2} \dfrac{\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}$

6. Calcular $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}\theta \; d\theta$

Solución: $\dfrac{1.3.5........(2n-3)(2n-1)}{2.4.6.......2n} \dfrac{\pi}{2}$

7. Calcular $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

Solución: $\frac{1}{3}\,\frac{\gamma\left(\frac{1}{3}\right)\gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$

8. Calcular $\int_0^{\pi}\cos 3x\ \operatorname{sen} 6x\, dx$

Solución: $\frac{4}{9}$

9. Calcular $\int_0^{\pi} e^x\ \operatorname{sen} x\, dx$

Solución: $\frac{e^{\pi}+1}{2}$

10. Calcular el área encerrada por un lazo de cicloide de ecuaciones x=R (t-sen t), y=R (1-cos t)

Solución: $3\pi R^2$

11. Calcular el área encerrada por la curva $\rho = a \cos 2\theta$

Solución: $\frac{\pi a^2}{2}$

12. Calcular el área encerrada entre la curva $y=\frac{1}{x^2+4}$ y el eje de abcisas

Solución: $\frac{\pi}{2}$

13. Calcular el área común a las cardioides $\begin{cases}\rho = a(1+\cos\theta)\\ \rho = a(1-\cos\theta)\end{cases}$

Solución: $a^2\left(\frac{3\pi}{2}-4\right)$

14. Calcular el área limitada por el eje OX y las curvas $y = x^3$, $x^2 + y^2 = 2$

Solución: $\frac{\pi}{2}-1$