CAPITULO 0. LOS NUMEROS REALES

1. Axiomática de los números reales

Sea un conjunto R, que verifica las siguientes propiedades conocidas como axiomas de los números reales

Axioma I. En R hay definidas dos operaciones, llamada suma y producto representadas (+) y (•) tales que R con estas operaciones es un cuerpo conmutativo.

1) $\forall$ a, b $\in$ R , a + b $\in$ R

2) $\forall$ a ,b ,c $\in$ R , a + (b+c) =(a+b)+c

3) $\forall$ a $\in$ R, $\exists$ 0 $\in$ R/ a+0=0+a = a

4) $\forall$ a $\in$ R, $\exists$ (-a) $\in$ R/ a + (-a) = (-a) +a = 0

5) $\forall$ a, b $\in$ R , a+b=b+a

Respecto a la operación (.)

1) $\forall$ a, b $\in$ R , a. b $\in$ R

2) $\forall$ a ,b ,c $\in$ R , a . (b.c) =(a,b).c

3) $\forall$ a $\in$ R, $\exists$ 1$\in$ R/ a.1=1.a = a

4) $\forall$ a $\in$ R, $\exists$ a^{-1} $\in$ R-{0} / a . a^{-1} = a^{-1} .a = 1

5) $\forall$ a, b $\in$ R, a.b=b.a

6) $\forall$ a, b,c $\in$ R , a .(b+c) =a .b+a .c

Axioma II. En R hay definida una relación de orden total representada por $\leq$ tal que verifica

II-a) $\forall$ a$\in$ R y siendo b $\leq$ c $\Longrightarrow$ a+b $\leq$a+c

II-b) Si b$\leq$ c y siendo 0 $\leq$ a $\Longrightarrow$a .b $\leq$ a.c

Axioma III o axioma del supremo. Todo subconjunto de R no vacío acotado superiormente (inferiormente) posee supremo (ínfimo)

Todas las propiedades de los números reales o están entre las anteriores o se pueden deducir de ellas.

2. Consecuencias que se deducen de los axiomas

El conjunto de los números reales que comprenda los tres axiomas anteriores existe, pues se puede construir completando el cuerpo Q. Enumeremos las distintas formas de llevar a cabo tal construcción:

1. A través de las sucesiones de Cauchy.

2. A través de pares de sucesiones monótonas convergentes.Por ejemplo $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = [1\ ,\ 2]\ ,\ [1.4\ ,1.5],[1.41\ ,1.42\ ],[1.414\ \ ,1.415]........$$

3. A través de la representación decimal de los números $\sqrt{2} = 1.4142135.......$

Se demuestra que las diferentes formas de construir el cuerpo R son equivalentes. Es decir si se construyen dos cuerpo R_1 y R_2 que verifiquen los axiomas anteriores. Estos cuerpos son isomorfos, lo cual significa que existe entre ellos una biyección que conserva las operaciones suma y producto así como el orden.

Inyección de Q en R: Definamos una aplicación del cuerpo Q de los racionales en el cuerpo R de los reales de la siguiente forma: $\forall$ a $\in$ Q

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{f} & R \\ a & \longrightarrow & f(a)\ =\ a \end{array}$$

siendo f (a) el numero real definido por la sucesión constantemente (a). La aplicación así definida se demuestra fácilmente que es inyectiva, además conserva las operaciones suma y producto. Luego es un homomorfismo de Q en R.

Esta aplicación es compatible con la relación de orden, es decir si: a < b => f (a) < f (b). Este homomorfismo inyectivo que conserva el orden nos permite identificar cada numero racional a con el numero f (a) $\in$ R, luego Q es un subcuerpo de R.

f no es sobreyectiva como se ve en el siguiente ejemplo :Sea f (a) un numero real tal que $[f(a)\ ]^2 = 2$, si f(a) proviene de un numero racional a , se tiene $a^2 = 2$, que no se verifica para ningún a racional.

Al conjunto **R - Q** se le llama conjunto de los números irracionales **I**. Los números irracionales son definidos mediante sucesiones de Cauchy de números racionales.

Acabamos de ver la completitud de **R**. Es decir no toda sucesión de Cauchy de números racionales converge en **Q**, pero si es convergente en **R**

Propiedad arquimediana de los números reales. Se demuestra que para cada numero real a > 0 .Existe un numero natural n tal que: n a > b

$$\forall\ a\ ,\ b \in R\ \ ,si\quad 0< a < b\ ,\ \ \exists\ n \in N\ /\ n\ .\ a > b$$

Parte entera de un numero real: Se demuestra que para cada a $\in$R existe un entero p $\in$ Z tal que : p < a < p+1. Siendo p la parte entera de a

Q es denso en R: $\forall$ a , b $\in$ R , $\exists$ q $\in$ Q / a < q < b

3. expresión decimal de un número real

Veamos ahora: Cuando un número real expresado decimalmente es racional o irracional. En el caso racional o sea de la forma:

$$\frac{a}{b} / a \in Z \ , \ b \in Z - \{0\}$$

Si se efectúa la división de esos dos números enteros, se obtiene como cociente un número decimal que es otra forma de escribir el número racional. Pues bien puede ocurrir o que el desarrollo decimal termine, o si no, exista una cifra o grupo de cifras que continuamente se repite. Así:

$$\frac{14}{5} = 2.8 \quad , \quad \frac{4}{33} = 0.\overline{12} \quad , \quad \frac{421}{300} = 1.40\overline{3}$$

Después de visto lo anterior cabe preguntarse ¿Habrá números decimales de infinitas cifras decimales y no periódicos ¿ La respuesta es si: por ejemplo :

$$\sqrt{3} = 1.7320508...... \quad , \quad e = 2.7182818...... \quad , \quad \pi = 3.141592......$$

que son los números irracionales

4. Representación geométrica de los números reales

Los números reales, se representan como puntos de una recta real. Si elegimos un punto para que represente el origen (O) y otro a la derecha para que represente el 1 . Sabemos que a cada punto de esta recta corresponde un numero real y solo uno y recíprocamente.

La relación de orden a < b indica que el punto a esta a la izquierda del punto b. Los números positivos están a la derecha del O y los números negativos están a la izquierda del O. Si a < b, un punto x satisface las desigualdades: a < x < b si y solo si, x esta entre a y b

Generalización: R^n es el espacio entre cuyos puntos y el conjunto de los números reales (x_1 , x_2 ... x_n) que son las coordenadas del punto se puede establecer una correspondencia biunívoca, dar la correspondencia significa que se ha dado un sistema de coordenadas particular que llamaremos cartesiano. La recta real puede estructurase como un espacio puntual unidimensional R^1

5. R es un cuerpo valuado

Definición: Se define el valor absoluto de un número real como la aplicación

$$R \xrightarrow{|\;|} R^{+}$$

$$x \longrightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

$$|x| \leq a \quad \text{siendo } a > 0 \Rightarrow -a < x < a$$

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x-y| = |y-x|$$

$$|x-y| \leq |x| + |y|$$

$$|x-y| \geq |x| - |y|$$

6. Subconjuntos más destacados de la recta real

Intervalo cerrado [a, b] .Subconjunto de números reales x de modo que se verifica: $a \leq x \leq b$

Intervalo abierto (a, b) .Subconjunto de números reales x de modo que se verifica: $a < x < b$

$[a, \propto)$ conjunto de números reales x tales que $x \geq a$,

$(-\propto, a]$ conjunto de números reales x tales que $x \leq a$

Entorno simétrico de un punto $x_0 \in R$. Se denomina así a todo intervalo abierto que contiene a x_0 que es su centro. El entorno de centro x_0 y radio r es el Subconjunto de R tal que se verifica: $| x-x_0|< r$. Se le designa por E (x_0)

Entorno reducido de un punto x_0. Es el entorno del que prescindimos del centro x_0. Se le designa por E * (x_0)

En general entorno de un punto x_0 es todo intervalo abierto que contiene x_0

Conjunto acotado: Un Subconjunto A de R se dice acotado superiormente si

$$\forall x \in A, \exists\, k \in R \Rightarrow x \leq k$$

Un subconjunto A de R se dice acotado inferiormente si:

$$\forall\, x \in A,\ \exists\, k' \in R \Rightarrow k' \leq x$$

Se dice que el conjunto A es un conjunto acotado si esta acotado superior e inferiormente. La menor de las cotas superiores se llama extremo superior o supremo del conjunto acotado, y si pertenece al conjunto será su máximo. La mayor de las cotas inferiores será el extremo inferior o ínfimo y si pertenece al conjunto será su mínimo.

Se demuestra que: La unión y la intersección de conjuntos acotados es un conjunto acotado. La unión de dos conjuntos no acotados es un conjunto no acotado. La intersección de dos conjuntos no acotados es un conjunto que puede ser acotado o no.

Asimismo se demuestra que: La unión de entornos de un punto es otro entorno del punto. La intersección de un número finito de entornos de un punto es otro entorno del punto

Ejemplos. El intervalo (3, 5) es entorno del punto 4, ya que es por si misma una bola abierta de centro el punto 4 y radio 1

El intervalo [3, 5] es entorno del punto 4, ya que existen intervalos abiertos de centro 4 y radio ≤ 1 contenidos en [3 ,5]

El intervalo (2,3] no es entorno del punto 3 ya que no existe ningún intervalo que contenga a 3 y que este contenido en (2,3]

7. Postulado de Cantor o de continuidad de la recta

Se llama sucesión de intervalos encajados a la sucesión

$$I_1 = [a_1, b_1],\ I_2 = [a_2, b_2], \ldots\ldots\ldots\ I_n = [a_n, b_n]$$

tales que : $I_1 \supset I_2 \ldots\ldots \supset I_n$

Postulado de Cantor: Una sucesión de intervalos encajados donde la amplitud formada por las amplitudes de cada uno de ellos, $b_n - a_n$, tiende a cero , define un único punto que pertenece a todos los intervalos de la sucesión. Esta correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio ordinario y el conjunto R de los números reales nos lleva a decir que la real es un espacio afín unidimensional

8. Conjuntos numerables

Conjuntos equipolentes: Dos conjuntos se llaman equipotentes cuando entre sus elementos x puede establecer una correspondencia biunívoca. Los conjuntos equipotentes se dice que tienen la misma potencia.

Cuando los conjuntos son finitos el termino tener la misma potencia significa tener el mismo numero de elementos.

Ahora bien esto no es aplicable al caso de conjuntos infinitos, por eso teniendo en cuenta que el conjunto infinito mas sencillo es el conjunto de los números naturales N se llaman conjuntos numerables aquellos que tienen la misma potencia que el conjunto N. Este concepto expresa una ampliación del numero cardinal finito que nos sirve para caracterizar a los conjuntos finitos, esta ampliación da lugar a los cardinales transfinitos .La potencia del conjunto N se le designa por a.

Propiedades de los conjuntos numerables

1. Todo conjunto infinito contiene algún subconjunto numerable.

2. Si de un conjunto numerable se extrae un conjunto parcial, queda otro conjunto numerable.

3. El conjunto formado por la reunión de un número finito de conjuntos numerables es numerable. La demostración se aborda en los ejercicios resueltos

Se demuestra que todo conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable

Ejemplos de conjuntos numerables: El conjunto Z de los números enteros es numerable: En efecto Z esta formado por los números naturales, los números enteros negativos y el cero y teniendo en cuenta que la reunión de un numero finito de conjuntos numerables es numerable. Se concluye Z es numerable

Se demuestra que el conjunto Q se los números racionales es numerable.

El conjunto $E = \{1, 4, 9, 16, 25......\} \subset N$ es numerable, ya que se puede establecer la correspondencia biunívoca ($n \longrightarrow n^2$), luego ambos conjuntos son equipotentes.

Se llaman números algebraicos de orden n a los que son raíces de una ecuación de grado n con coeficientes enteros. Los números algebraicos de primer orden forman un conjunto numerable. Igualmente los números algebraicos de segundo orden son numerables, pues basta numerar todas las ecuaciones de segundo grado (conjunto que depende de tres índices) y luego ordenar con cualquier criterio las dos raíces de cada una de ellas. De la misma se ve que los números algebraicos de orden n son numerables .El conjunto de todos los números algebraicos, no solo reales sino complejos algebraicos es numerable, por ser un conjunto numerable de conjuntos numerables.

Ejemplos de conjuntos no numerables: Se demuestra que el conjunto de los números reales del intervalo (0 , 1) no es numerable . Este conjunto se dice que tiene la potencia del continuo, se designa por c

El conjunto de los números reales del intervalo (a, b) tiene la potencia del continuo .Se puede establecer entre el intervalo (0,1) y el intervalo (a, b) una correspondencia biunívoca, dada por: y =a + (b-a) x. Esta correspondencia se demuestra fácilmente que es biyectiva, así como que transforma el intervalo (0, 1) en el intervalo (a, b).

El conjunto R de los números reales tiene la potencia del continuo. En efecto sea la correspondencia:

$$y = \frac{x}{1-|x|}$$

Esta correspondencia establece una biyección entre los intervalos (-1,1)⟶(- ∝, ∝), a continuación se establece un correspondencia biyectiva entre los intervalos (-1,1) ⟶(0,1)

Se demuestra que el conjunto de los números irracionales del intervalo (0,1) tiene la potencia del continuo. Asimismo se demuestra que el conjunto de los números transcendentes del intervalo (0,1) tiene la potencia del continuo.

9. Otros conceptos importantes sobre la recta real

Se llama recta real ampliada al conjunto: $\overline{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$

Espacio vectorial real: El conjunto R de los números reales (R +. R) tomando como de escalares el conjunto R, tiene estructura de espacio vectorial de dimensión 1.

Norma del vector AB: Se designa así a la longitud del segmento AB .Si a es la abscisa del punto A y b es la abscisa del punto B: $\| AB \| = |b - a|$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $|3x-4|=4$; Solución {0, 8/3}

b) $|5x-3|=2$; Solución {1, 1/5}

c) $1-|2-x|=-6$; Solución {-5, 9}

d) $|x|+|x-1|=-3$; Solución {conjunto vacío}

e) $\left|\frac{1-x}{2}\right|=1$; Solución {-1,3}

f) $\left|\frac{1-2x}{x}\right| = 4$; Solución {-1/2,1/6}

g) $|1 - x| = |3x-1|$; Solución {1/2,0}

2. Resolver las siguientes inecuaciones

a) $|x-3| < 5$; Solución (-2 ,8)

b) $2\ |4x-1| > 9$; Solución (-∞, - 7/8) ∪(11/8, ∞)

c) $1+|x-3/2| \geq 2$, Solución (-∞, ½] ∪[5/2, ∞)

d) $|x-1| \leq 3$; Solución [-2 ,4]

e) $|x-1| \geq 2$, Solución (-∝ , -1) ∪[3 , +∝)

3. Calcular los números $x \in R$ que verifican

a) $\frac{(x+3)(x-4)}{x^3-2x^2-3x} < 0$

b) $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0$

c) $(x-3)^2 \leq 1$

Solución

a) (- ∝ ,-3)∪(-1,0)∪ (3,4)

b) (- ∝ ,1]∪(2 ,3)∪ (4, ∝) No se incluyen 3 y 4 porque anulan el denominador

c) [2, 4]

4. Hallar el extremo superior, el extremo inferior, máximo y mínimo, si es que exiten de los subconjunto

a) $A = \{x \in R / -2 < x \leq 0$

b) $B = \{x \in R / x^2 + 5x - 6 \leq 0$

c) $C = \{x \in R / x^2 < 9$

Solución

a) Son cotas superiores de A cualquier x $\in$R/ x$\geq$0, sup. (A)=0 que por pertenecer al conjunto A es máximo

Son cotas inferiores del conjunto A cualquier x $\in$R/ x$\leq$-2 , Inf(A)=-2 , no exite mínimo

b) B= [-6 ,1]. Son cotas superiores del conjunto B cualquier x $\in$R/ x$\geq$1, Sup (B) =1, que por pertenecer al conjunto B es máximo

Son cotas inferiores del conjunto B cualquier x $\in$R/ x $\leq$-6, Inf.(B) =-6 , que por pertenecer al conjunto B es mínimo

c) C= (-3 3)

Son cotas superiores del conjunto C cualquier x $\in$R/ x >3, Sup (C) =-3 , no existe máximo

Son cotas inferiores del conjunto C cualquier x $\in$R/ x < -3, Inf (C) =-3 , no existe mínimo

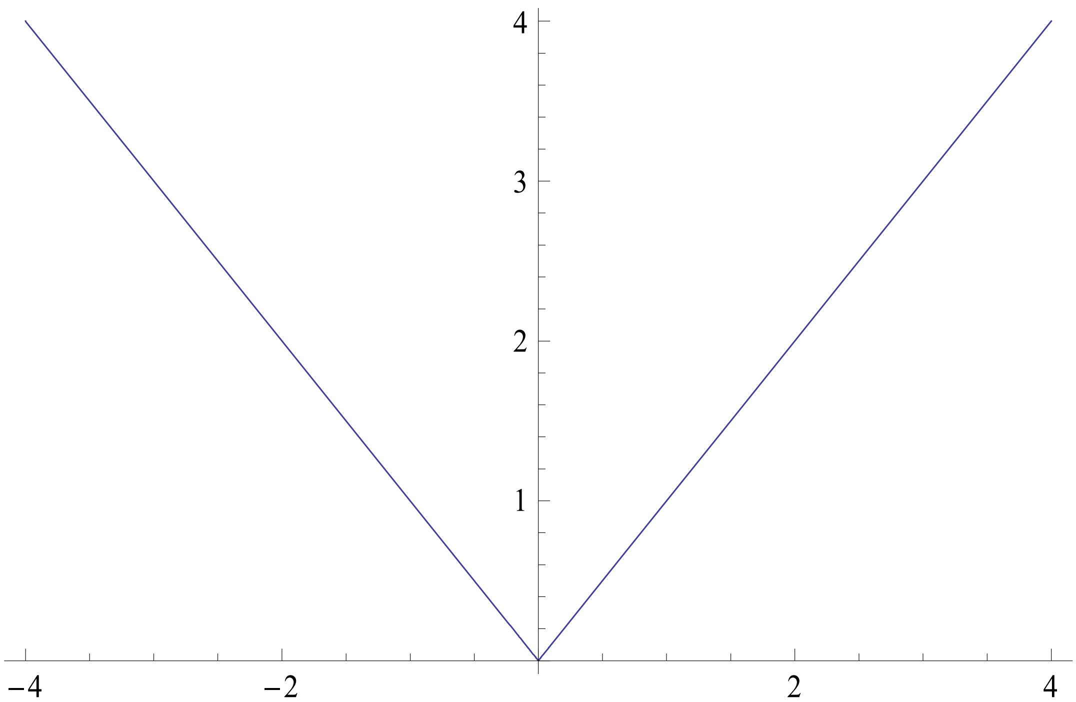
5. Estudiar si f(x)=| x | es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva, en los siguientes casos

a) f: R $\longrightarrow$ R

b) f: R $\longrightarrow$ R^+

c) f: R^+ $\longrightarrow$R

d) f :R^+ $\longrightarrow$$R^+$



a) No es inyectiva: porque por ser la función par para cada origen $x > 0$, hay un $x<0$ para los cuales la imagen es la misma , no es sobreyectiva , porque todos los $y<0$ no tienen origen

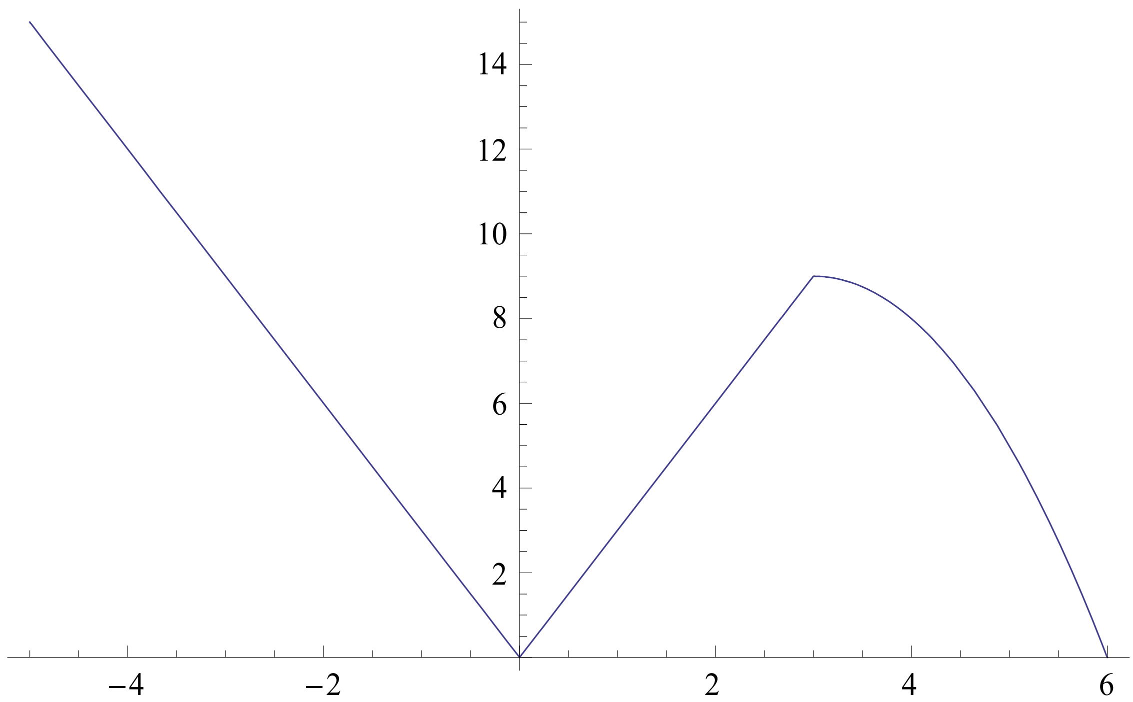
b) No es inyectiva: por el mismo motivo que en el apartado anterior. Ahora si es sobreyectiva, ya que ahora no hay imágenes negativas, que son las que en el apartado anterior daban el problema

c) Si es inyectiva, ya que ahora no hay $x< 0$ por ser el conjunto inicial R^+. No es sobreyectiva por la misma razón que en el aparado a

d)Si es inyectiva : por la misma razón que en el apartado anterior . Si es sobreyectiva por la misma razón que en b . Por ser inyectiva y sobreyectiva es biyectiva

6. Estudiar si f(x) es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva en todo su dominio la aplicación $f : R \longrightarrow R$

$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2 & ; \ x \geq 3 \\ |3x| & ; \ x < 3 \end{cases}$$



La aplicación no es inyectiva, ya que como se ve en la Figura puesto que orígenes distintos dan la misma imagen

Si es sobreyectiva, puesto que cualquier valor de y tanto positivo como negativo, tiene origen

La aplicación no es biyectiva, puesto que no es inyectiva