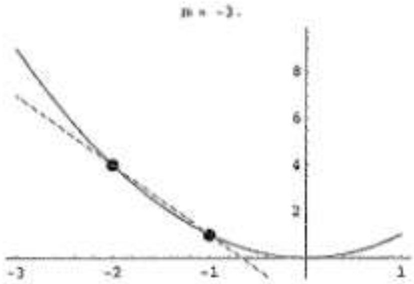
Práctica 2. "Cálculo Diferencial"

En esta práctica se trata de ilustrar geométrica y analíticamente el concepto de derivada. Para ello se hará uso del paquete "Secante.m" que permitirá representar una sucesión de secantes a una función dada entre un punto previamente fijado x0 y una sucesión de puntos que converge al punto x0. La derivada de la función en x0 coincide con el límite de las pendientes de esta sucesión de rectas secantes.

Interpretación geométrica

```
<< "c:\\Secante.m"
f[x_] = x^2;
Secante[f[x], {x, -3, 1}, {-2, -1, 20}]
```



La derivada de la función f(x) en el punto x0=-2 se definiría formalmente a través del siguiente límite:

$$\lim_{x\to x0}\frac{f(x)-f(x0)}{x-x0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^2-(-2)^2}{h}$$

$$\text{Limit}\left[\frac{(-2+h)^2-(-2)^2}{h},\ h\to 0\right]$$

-4

Efectivamente, este valor coincide con la derivada de la función en el punto dado:

```
f'[-2]
```

-4

La función derivada

La función derivada f'(x) de una función dada f(x) es aquella función que a cada punto x0 de su dominio le hace corresponder el valor de la derivada de la función f(x) en el punto x0. En el caso de la función anterior:

$$\text{Limit}\left[\frac{(x0+h)^2-(x0)^2}{h},\ h\to 0\right]$$

2 x0

Luego la función derivada de f(x)=x^2 es f'(x)=2x.

$$\text{D}[x^2,\ x]$$

2 x

La capacidad simbólica de *Mathematica* nos permite hallar la forma genérica de la derivada de un polinomio. Por ejemplo, dado f(x)= x^n, se tiene:

$$\text{Limit}\left[\frac{(x0+h)^n-(x0)^n}{h},\ h\to 0\right]$$

$n\,x0^{-1+n}$

$$\text{D}[x^n,\ x]$$

$n\,x^{-1+n}$

Operaciones elementales

```
D[f[x] + g[x], x]
```

f'[x] + g'[x]

```
D[f[x] * g[x], x]
```

g[x] f'[x] + f[x] g'[x]

$$D\left[\frac{f[x]}{g[x]}, x\right]$$

$$\frac{f'[x]}{g[x]} - \frac{f[x]\, g'[x]}{g[x]^2}$$

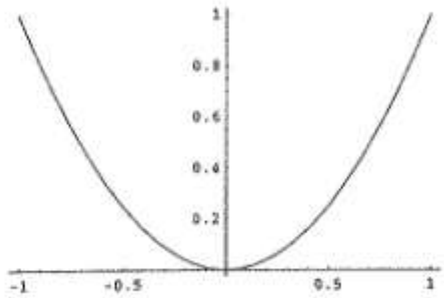
```
D[f[g[x]], x]
```

f'[g[x]] g'[x]

Teorema de Rolle

El teorema de Rolle nos asegura que dada una función f(x) en un intervalo (a,b), tal que f(a)=f(b) y bajo ciertas condiciones, existe un punto del interior del intervalo donde la derivada se anula.

```
f[x_] := x^2;
Plot[f[x], {x, -1, 1}];
```




```
f[-1] - f[1]
```

0

```
Solve[f'[x] == 0, x]
```

$\{\{x \to 0\}\}$

Ejercicios

- Calcular la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados, considerando tanto el límite de las pendientes de rectas secantes, como la función derivada:

  $f(x)=Sin[x]$ en $x0=\pi$ y $x0=\pi/2$

  $f(x)=Cos[x]$ en $x0=\pi$ y $x0=\pi/2$

  $f(x) = e\hat{}x$ en $x0 = 1$

  $f(x)= \frac{x+1}{x^2-x}$ en $x0 = 1$

- Calcular la derivada de las siguientes funciones:

  $f(x)=Log[x]$

  $f(x)=e^x$

  $f(x) = arcsen\, x$

  $f(x) = arcos\, x$

  $f(x) = arctg\, x$

  $f(x) = a^x$

  $f(x) = 5x\, tg\, (\frac{x}{3} + x^2)$

- Comprobar si se cumple el Teorema de Rolle en algún intervalo de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-x}$