Números complejos

$$\mathbb{C}$$

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Tabla de Contenidos

Definición

Problema

¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$? Obtenemos una expresión que contiene $\sqrt{-1}$, que no podemos resolver en $\mathbb{R}$

Definición

Problema

¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$? Obtenemos una expresión que contiene $\sqrt{-1}$, que no podemos resolver en $\mathbb{R}$

Definición

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se llama **número complejo**, en *forma binómica*, a la expresión $a + bi$
- El **número imaginario** $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$
- Un número complejo se suele representar con la letra z, y el conjunto de todos ellos como $\mathbb{C}$

Definición

Problema

¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$? Obtenemos una expresión que contiene $\sqrt{-1}$, que no podemos resolver en $\mathbb{R}$

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se llama **número complejo**, en *forma binómica*, a la expresión $a + bi$
- El **número imaginario** $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$
- Un número complejo se suele representar con la letra z, y el conjunto de todos ellos como $\mathbb{C}$

Dado un número complejo $z = a + bi$:

- a es la **parte real**, y se denota como $a = Re(z)$ y
- b es la **parte imaginaria**, y se denota $b = Im(z)$

Definición

Ejemplos

- z = 2 + 3i La parte real es 2 ($Re(z) = 2$) y la parte imaginaria es 3 ($Im(z) = 3$)
- z = 0 + 1i = i $Re(z) = 0, Im(z) = 1$
- z = 2 + 0i = 2 $Re(z) = 2, Im(z) = 0 \rightarrow z \in \mathbb{R}$
- z = -1 - 8i $Re(z) = -1, Im(z) = -8$

Definición

Ejemplos

z = 2 + 3i La parte real es 2 ($Re(z) = 2$) y la parte imaginaria es 3 ($Im(z) = 3$)

z = 0 + 1i = i $Re(z) = 0, Im(z) = 1$

z = 2 + 0i = 2 $Re(z) = 2, Im(z) = 0 \rightarrow z \in \mathbb{R}$

z = -1 - 8i $Re(z) = -1, Im(z) = -8$

Nota

En la expresión $z = a + bi$, el símbolo "+" no representa una adición en el sentido aritmético, sino que es un mero separador de la parte real y la parte imaginaria

Definición

Propiedades

- Si $a = 0$ y $b \neq 0$, $z = 0 + bi$ es un **imaginario puro**
- Si $b = 0$, el número $z = a + 0i$ es un real, por tanto, todos los números reales pueden considerarse como números complejos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Dos complejos son iguales cuando tienen iguales sus dos componentes y recíprocamente:
$$a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ y } b = d$$

Suma en forma binómica

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = a' + b'i$, se define la suma como:

$$z \pm w = (a + bi) \pm (a' + b'i) = (a \pm a') + (b \pm b')i$$

Suma en forma binómica

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = a' + b'i$, se define la suma como:

$$z \pm w = (a + bi) \pm (a' + b'i) = (a \pm a') + (b \pm b')i$$

Ejemplo

Dados $z_1 = 5 - 2i, z_2 = 1 + 3i$:
$z_1 + z_2 = (5 - 2i) + (1 + 3i) = (5 + 1) + (-2 + 3)i = 6 + i$

Propiedades de la suma

- Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Asociativa: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- $\exists$ el elemento neutro
  $0 = 0 + 0i$ t.q. $0 + z = z + 0 = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exists$ el elemento opuesto $-z = -a - bi$ t.q. $z + -z = 0$

Propiedades de la suma

- Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Asociativa: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- $\exists$ el elemento neutro
  $0 = 0 + 0i$ t.q. $0 + z = z + 0 = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exists$ el elemento opuesto $-z = -a - bi$ t.q. $z + -z = 0$

Resta de complejos

El elemento opuesto permite definir la resta de dos complejos como:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Propiedades de la suma

- Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Asociativa: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- $\exists$ el elemento neutro
  $0 = 0 + 0i$ t.q. $0 + z = z + 0 = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exists$ el elemento opuesto $-z = -a - bi$ t.q. $z + -z = 0$

Resta de complejos

El elemento opuesto permite definir la resta de dos complejos como:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Ejemplo

Dados $z_1 = 5 - 2i, z_2 = 1 + 3i$:
$z_1 - z_2 = z_1 + -z_2 = (5 - 2i) + (-1 - 3i) = (5 - 1) + (-2 + (-3))i = 4 - 5i$

Producto en forma binómica

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = a' + b'i$, se define el producto como:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Producto en forma binómica

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = a' + b'i$, se define el producto como:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Ejemplo

Dados $z_1 = 5 - 2i, z_2 = 1 + 3i$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (5 - 2i) \cdot (1 + 3i) \\ &= (5 \cdot 1 - (-2) \cdot 3) + (5 \cdot 3 + 1 \cdot (-2))i \\ &= 11 + 13i \end{aligned}$$

Podemos llegar a la misma conclusión realizando el producto manualmente: Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = a' + b'i$:

$$\begin{aligned} z \cdot w = (a + bi) \cdot (a' + b'i) &= aa' + (ab')i + (a'b)i + (bb')i^2 \\ &= aa' + (ab')i + (a'b)i - bb' \end{aligned}$$

Ejemplo

Dados $z_1 = 5 - 2i, z_2 = 1 + 3i$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (5 - 2i) \cdot (1 + 3i) \\ &= 5 \cdot 1 + 5 \cdot 3i + (-2)i \cdot 1 + (-2)i \cdot 3i \\ &= 5 + 15i - 2i - 6i^2 \\ &= 5 + 15i - 2i + 6 \\ &= 11 + 13i \end{aligned}$$

Propiedades del producto

El producto de complejos verifica las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Asociativa: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- $\exists$ el elemento neutro $1 = 1 + 0i$ t.q. $1 \cdot z = z \cdot 1 = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exists$ el elemento opuesto $z^{-1}(\neq 0 + 0i)$ t.q. $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$

Cálculo del inverso. Ejemplo:

- Tomemos un número complejo, $z = 2 + 3i$. Buscamos un número complejo $z^{-1} = x + yi$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1 + 0i$

Cálculo del inverso. Ejemplo:

- Tomemos un número complejo, $z = 2 + 3i$. Buscamos un número complejo $z^{-1} = x + yi$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1 + 0i$
- Es decir, queremos encontrar los valores de x e y tal que:

$$z \cdot z^{-1} = (2 + 3i) \cdot (x + yi) = 1 + 0i$$

Cálculo del inverso. Ejemplo:

- Tomemos un número complejo, $z = 2 + 3i$. Buscamos un número complejo $z^{-1} = x + yi$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1 + 0i$
- Es decir, queremos encontrar los valores de x e y de forma que:

$$z \cdot z^{-1} = (2 + 3i) \cdot (x + yi) = 1 + 0i$$

- Aplicando el producto de complejos, llegamos a:

$$2x - 3y + (2y + 3x)i = 1 + 0i$$

Cálculo del inverso. Ejemplo:

- Tomemos un número complejo, $z = 2 + 3i$. Buscamos un número complejo $z^{-1} = x + yi$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1 + 0i$
- Es decir, queremos encontrar los valores de x e y de forma que:

$$z \cdot z^{-1} = (2 + 3i) \cdot (x + yi) = 1 + 0i$$

- Aplicando el producto de complejos, llegamos a:

$$2x - 3y + (2y + 3x)i = 1 + 0i$$

- Igualando las parte real e imaginaria llegamos al siguiente sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas

$$2x - 3y = 1$$
$$2y + 3x = 0$$

Cálculo del inverso. Ejemplo:

- Podemos resolver fácilmente con alguno de los métodos conocidos, obteniendo $x = \frac{2}{13}$, $y = \frac{-3}{13}$
- Por lo tanto el resultado es:

$$z^{-1} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$$

Cálculo del inverso. Ejemplo:

- Podemos resolver fácilmente con alguno de los métodos conocidos, obteniendo $x = \frac{2}{13}$, $y = \frac{-3}{13}$
- Por lo tanto el resultado es:

$$z^{-1} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

- Efectivamente, puede comprobarse que:

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} &= (2+3i) \cdot \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i\right) \\ &= \frac{4}{13} - \frac{6}{13}i + \frac{6}{13}i - \frac{9}{13}i^2 \\ &= 1 + 0i \end{aligned}$$

Cálculo del inverso. Generalización

Fórmula del inverso

Dado $z = a + bi$, buscamos un número complejo $z^{-1} = x + yi$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1 + 0i$

1. Se aplica el producto: $(ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i$
2. Se igualan *Re* e *Im*: $ax - bx = 1; ay + bx = 0$
3. Se resuelve el sistema, obteniendo: $x = \frac{a}{a^2+b^2}$ e $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$
4. Y se obtiene el número complejo:

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \end{aligned}$$

que es el inverso de z

División de complejos

Definición

El elemento inverso permite definir la división de dos números complejos z_1, z_2, siempre que $z_2 \neq 0$ como:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

División de complejos

Definición

El elemento inverso permite definir la división de dos números complejos z_1, z_2, siempre que $z_2 \neq 0$ como:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

Ejemplo:

Dados $z_1 = 5 - 2i, z_2 = 1 + 3i$, calcular $\frac{z_1}{z_2}$

1. Calculamos z_2^{-1}:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{1}{1+9} - \frac{3}{1+9} i = \frac{1}{10} - \frac{3}{10} i$$

2. Y multiplicamos el resultado por z_1:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (5 - 2i) \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{3}{10} i \right) = -\frac{1}{10} - \frac{17}{10} i$$

Conjugado

Definición

Sea $z = a + bi$ un número complejo. Se define el **conjugado de z**, y se representa por $\overline{z}$, como el número complejo

$$\overline{z} = a - bi$$

Conjugado

Definición

Sea $z = a + bi$ un número complejo. Se define el **conjugado de z**, y se representa por $\overline{z}$, como el número complejo

$$\overline{z} = a - bi$$

Ejemplos:

- Si $z = 1 + 3i$, entonces $\overline{z} = 1 - 3i$
- Si $z = 5 - 2i$, entonces $\overline{z} = 5 + 2i$
- Si $z = -1 + 3i$, entonces $\overline{z} = -1 - 3i$

Conjugado

Propiedades

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
4. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}^+$

Nota:

Si $z = a + bi$, entonces

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$$

Parte real e imaginaria. Definición:

Si $z = a + bi$ es un número complejo, se define la parte real de z, $Re(z)$, y la parte imaginaria, $Im(z)$ como:

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} = a \in \mathbb{R} \qquad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} = b \in \mathbb{R}$$

Módulo

Definición

Si $z = a + bi$ es un número complejo se define el módulo de z, y se denota $|z|$, como:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Propiedades

Dado un número complejo $z = a + bi$, se verifica:

I) $|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \overline{z}$

II) $|z| = |\overline{z}|$

Además, recordando la fórmula del inverso, tenemos que:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Ejercicio

Calcular el valor de a y b para que $\frac{3b-2ai}{4-3i}$ sea real, y de módulo unidad

Ejercicio

Calcular el valor de a y b para que $\frac{3b-2ai}{4-3i}$ sea real, y de módulo unidad

Operando, tenemos que:

$$z = \frac{3b-2ai}{4-3i} = \frac{(3b-2ai)\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)}$$
$$= \frac{12b+9bi-8ai-6ai^2}{16+12i-12i-9i^2} = \frac{12b+6a}{25} + \frac{9b-8a}{25}i$$

Si $z \in \mathbb{R} \Rightarrow Im(z) = 0$, y por lo tanto:

$$\frac{9b-8a}{25} = 0 \Rightarrow 9b-8a = 0 \Rightarrow b = \frac{8a}{9}$$

Además, si $|z| = 1$, entonces debe verificarse que:

$$\sqrt{\left(\frac{12b+6a}{25}\right)^2 + \left(\frac{9b-8a}{25}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{12b+6a}{25} = 1 \Rightarrow 12\frac{8a}{9} + 6a = 25 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

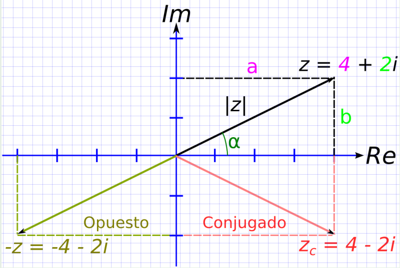
Argumento y plano complejo

Cada número complejo $z = (a, b)$ puede indentificarse con el punto P de coordenadas (a, b), que recibe el nombre de **afijo** de z

Notas:

- El módulo $|z|$ se corresponde con la distancia del afijo hasta el origen
- El eje de abscisas (eje OX) es el eje real (Re)
- El eje de ordenadas (eje OY) es el eje imaginario (Im)
- Todo complejo forma un ángulo α formado por el semieje positivo del eje real y el afijo, llamado **argumento**.
- Se representa por $\alpha = arg(z)$

Representacion en el plano complejo



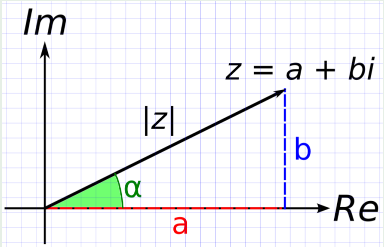
Módulo y argumento en el plano complejo

Cada número complejo $z = (a, b)$ puede indentificarse con el punto P de coordenadas (a, b), que recibe el nombre de **afijo** de z

Relaciones:

- $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{|z|}$
- $\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$
- $\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}$
- $\alpha = arctan\frac{b}{a}$

Representacion en el plano complejo



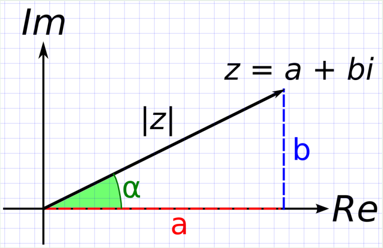
Módulo y argumento en el plano complejo

Cada número complejo $z = (a, b)$ puede indentificarse con el punto P de coordenadas (a, b), que recibe el nombre de **afijo** de z

Relaciones:

- $\text{sen}\, \alpha = \frac{b}{|z|}$
- $\cos \alpha = \frac{a}{|z|}$
- $\tan \alpha = \frac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a}$
- $\alpha = arctan \frac{b}{a}$

Representacion en el plano complejo



Nótese que existen infinitos argumentos para cada z. Podemos decir que:

$$arg(z) = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Al argumento de z comprendido en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se le llama **argumento principal**, y se denota como $Arg(\alpha)$

Por tanto, el plano complejo se divide en cuatro cuadrantes, por lo que:

- Primer cuadrante: $Re(z), Im(z) \in \mathbb{R}^+$
- Segundo cuadrante: $Re(x) \in \mathbb{R}^-, Im(z) \in \mathbb{R}^+$
- Tercer cuadrante: $Re(x) \in \mathbb{R}^-, Im(z) \in \mathbb{R}^-$
- Cuarto cuadrante: $Re(x) \in \mathbb{R}^+, Im(z) \in \mathbb{R}^-$

Ejercicio. Calcular el argumento de los siguiente números:

1. $z = 1 + 0i$
2. $z = -1 + 0i$
3. $z = 0 + i$
4. $z = 0 - i$
5. $z = 1 + i$
6. $z = -1 - i$

Conclusión respecto al cálculo del argumento:

Si a la hora de calcular $arg(z)$ / $z = a + bi$ mediante la fórmula, tomamos valores absolutos de $Im(z)$ y $Re(z)$, es decir:

$$\alpha = \arctan \frac{|b|}{|a|}$$

, entonces podemos obtener el argumento mediante la siguiente regla en función del cuadrante en que se encuentre z:

- Primer cuadrante $\rightarrow arg(z) = \alpha$
- Segundo cuadrante $\rightarrow arg(z) = \pi - \alpha$
- Tercer cuadrante $\rightarrow arg(z) = \pi + \alpha \equiv \alpha - \pi$
- Cuarto cuadrante $\rightarrow arg(z) = 2\pi - \alpha \equiv -\alpha$

Formas de representación de z

En función de su parte real (a) e imaginaria (b)

- Forma binómica: $z = a + bi$
- Forma Cartesiana: $z = (a, b)$

Formas de representación de z

En función de su parte real (a) e imaginaria (b)

- Forma binómica: $z = a + bi$
- Forma Cartesiana: $z = (a, b)$

En función de su módulo (r) y de su argumento (α)

- Forma polar: $z = r_\alpha$
- Forma trigonométrica: $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$
- Forma exponencial: $z = re^{i\alpha}$, siendo

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha \quad \text{(Fórmula de Euler)}$$

Formas de representación de z

En función de su parte real (a) e imaginaria (b)

- Forma binómica: $z = a + bi$
- Forma Cartesiana: $z = (a, b)$

En función de su módulo (r) y de su argumento (α)

- Forma polar: $z = r_\alpha$
- Forma trigonométrica: $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$
- Forma exponencial: $z = re^{i\alpha}$, siendo

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha \quad \text{(Fórmula de Euler)}$$

NOTA: No debe confundirse la forma exponencial de un número complejo con la exponencial de dicho número complejo.

Ejemplo

Dado $z = 1 + i$, representar en todas sus formas

1. Se calculan el módulo y el argumento:
   - $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
   - $\alpha = arg(z) = arctan\frac{b}{a} = arctan\frac{1}{1} = arctan1 = \frac{\pi}{4}$
2. Se escriben las formas:

Forma Binómica : Es la del enunciado, $z = 1 + i$

Forma Cartesiana : $z = (1, 1)$

Forma Trigonométrica : $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4})$

Forma Polar : $z = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$

Forma Exponencial : $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

Fórmula de Euler

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$ donde:

- Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, que representa un ángulo en el plano complejo
- e, es la base del logaritmo natural $e = 2{,}71828182845905\ldots$
- i es la unidad imaginaria ($i = \sqrt{-1} \to i^2 = -1$)

Función exponencial

También se suele expresar en la siguiente forma (función exponencial):

$$e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\,\mathrm{sen}\,b)$$

, siendo $z = a + bi$

Fórmula de Euler

- La forma de Euler es de relevancia matemática, dado que establece un nexo entre el *análisis matemático* y la *trigonometría*.
- Permite definir el logaritmo para números en $\mathbb{R}^-$ y en $\mathbb{C}$

Ejemplo: Logaritmo de -1

Dado $\alpha = \pi$, evaluamos con la fórmula de Euler y obtenemos:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + isen\pi = -1 \Rightarrow i\pi = \log(-1)$$

Por tanto, extendido a un número negativo cualquiera:

$$\log(-a) = \log(a) + \log(-1) = log(a) + i\pi, \text{ donde } a > 0$$

Función exponencial

Definición

Sea $z = a + bi$, se define la función exponencial como:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

Propiedades:

1. $e^{z+w} = e^z e^w$
2. $e^0 = 1$
3. $e^z e^{-z} = 1$
4. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
5. $|e^z| = e^{Re(z)}$
6. $arg(e^z) = Im(z)$
7. $Re(e^z) = Re(e^{a+bi}) = e^a \cos b$
8. $Im(e^z) = Im(e^{a+bi}) = e^a \operatorname{sen} b$

Ejemplo

Calcula el siguiente número complejo: $z = \frac{2}{i} \log\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

Ejemplo

Calcula el siguiente número complejo: $z = \frac{2}{i} \log\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

Resolvemos el cociente, multiplicando y dividiendo el mismo por el conjugado del denominador:

$$\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$$

Si pasamos i a su forma exponencial, tenemos que:
$|z| = r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, y $arg(z) = \alpha = \arctan \frac{1}{0} = \infty$
Esto quiere decir que $\cos\alpha = 0$. Como $Im(z)$ es positiva, sabemos que $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
En **forma polar**, tenemos que $z = 1_{\frac{\pi}{2}}$

En **forma exponencial**, lo expresamos como $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$
Por lo tanto, $\log(e^{\frac{\pi}{2}i}) = \frac{\pi}{2} i \log(e) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$

Y finalmente, tenemos:

$$z = \frac{2}{i} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i = \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Producto

Producto en forma polar

El resultado de multiplicar dos números complejos en forma polar es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.

$$r_\alpha \cdot r'_\theta = (r \cdot r')_{\alpha+\theta}$$

Ejemplo:

$$z_1 \cdot z_2 = 2_{\frac{\pi}{6}} \cdot 3_{\frac{\pi}{3}} = (2 \cdot 3)_{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}} = 6_{\frac{\pi}{2}}$$

Cociente

Cociente en forma polar

El resultado de dividir dos números complejos en forma polar es otro número complejo de módulo el cociente de los módulos y de argumento la diferencia de los argumentos (obsérvese la analogía con el producto de números complejos en forma polar)

$$\frac{r_\alpha}{r'_\theta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\theta}$$

Ejemplo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4_{\frac{\pi}{4}}}{1_{\frac{\pi}{2}}} = (4/1)_{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}} = 4_{\frac{-\pi}{2}}$$

Producto y cociente

Ambas fórmulas pueden deducirse fácilmente realizando el producto/cociente del número complejo en su forma trigonométrica, recordando las fórmulas trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Ejemplo: Fórmula del cociente en forma polar

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_\alpha}{r'_\theta} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha}{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)\cdot(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\cdot(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)} =$$

$$= \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta + i(\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta)}{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} =$$

$$= \frac{r}{r'} \cdot (\cos(\alpha - \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \theta)) = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha - \theta}$$

Potencias enteras

Si el exponente n es un número entero, entonces:

Forma polar $z = r_\alpha \Rightarrow z^n = (r_\alpha)^n = r^n_{n\cdot\alpha}$

Forma exponencial $z = re^{i\alpha} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\alpha}$

Fórmula de De Moivre:

De lo anterior se deduce la siguiente fórmula:

$$z^n = [r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n = r^n(\cos n(\alpha + 2k\pi) + i \operatorname{sen} n(\alpha + 2k\pi)),$$

con $k \in \mathbb{Z}$

Potencias

Potencias en forma polar

De la fórmula de de Moivre, se deduce que la potencia enésima de número complejo es otro número complejo tal que:

- Su módulo es la potencia n-ésima del módulo.
- Su argumento es n veces el argumento dado.

$$(r_\alpha)^n = (r)^n_{n\cdot\alpha}$$

Ejemplo:

$z = (1+i)^{10}$. Resulta conveniente pasarlo a su forma polar para realizar la potencia:

$$z = \sqrt{2}_{\arctan\frac{1}{1}} = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2})^{10}_{\frac{10\pi}{4}} = 2^5_{\frac{5\pi}{2}}$$

Aplicación de la fórmula de *de Moivre* para expresar un ángulo múltiple

Un aplicación muy útil de la fórmula *de Moivre* consiste en deducir fórmulas trigonométricas de ángulos múltiples expresados en función del seno y coseno del ángulo simple. Expresar $\cos 3\alpha$ en función de $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$:

1. Se considera por un lado la fórmula de *de Moivre*, y se tiene que

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha$$

2. Por otra parte, se desarrolla el cubo mediante el binomio de Newton (Ver diapositiva 54 para recordatorio):

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^3 &= \binom{3}{0}\cos^3\alpha + \binom{3}{1}\cos^2\alpha \cdot i \operatorname{sen}\alpha + \\ &+ \binom{3}{2}\cos\alpha \cdot i^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \binom{3}{3} i^3 \operatorname{sen}^3\alpha = \\ &= cos^3\alpha - 3\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha + i\left(3\cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha\right)\end{aligned}$$

(Continúa en la siguiente transparencia)

Aplicación de la fórmula de *de Moivre* para expresar un ángulo múltiple (Continuación)

3. Se igualan por un lado las partes reales y por el otro las imaginarias de los pasos anteriores:
   - Parte real:
   $$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\alpha$$
   - Parte imaginaria:
   $$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^3\,\alpha$$

Binomio de Newton

Definición:

El teorema del binomio es una fórmula que proporciona el desarrollo de la potencia n-ésima (siendo $n \in \mathbb{Z}^+$) de un binomio de la forma $(a+b)^n$. Se conoce como binomio de Newton. La fórmula es la siguiente:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Aplicación de la fórmula de *de Moivre para calcular potencias*. Ejemplo:

Sea $z = 1 - i$. Calcular z^6.

Aplicación de la fórmula de *de Moivre*. Ejemplo:

Sea $z = 1 - i$. Calcular z^6.

1. Se escribe z en forma trigonométrica:
    - $r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
    - $arg(z) = \arctan \frac{-1}{1} = \frac{-\pi}{4}$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

2. Y aplicando la fórmula de De Moivre, se obtiene que:

$$\begin{aligned} z^6 &= (\sqrt{2})^6\left(\cos\left(6 \cdot -\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(6 \cdot -\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 8\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) \\ &= 8\,(0 + 1i) = 8i \end{aligned}$$

Ejercicio

Determinar los números complejos z, tales que su cuadrado sea igual a su conjugado.

Ejercicio

Determinar los números complejos z *t.q.* $z^2 = \overline{z}$

Podemos resolver este ejercicio de forma conveniente trabajando en la forma exponencial de z: Sea $z = re^{\alpha i}$, de modo que fácilmente podemos deducir que $\overline{z} = re^{-\alpha i}$. Tal y como indica el enunciado tenemos que $z^2 = \overline{z} \Rightarrow r^2 e^{2\alpha i} = re^{-\alpha i}$.

Dividiendo ambos términos de la igualdad por $re^{-\alpha i}$, obtenemos:

$$\frac{r^2 e^{2(\alpha+2k\pi)i}}{re^{-(\alpha+2k\pi)i}} = \frac{re^{-\alpha i}}{re^{-\alpha i}} \Rightarrow re^{3(\alpha+2k\pi)i} = 1 \cdot e^{(0+2k\pi)i}$$

Si dos números complejos son iguales, tanto su módulo como su argumento son iguales. Por lo tanto, tenemos que:

- $r = 1$, como acabamos de ver
- $3\alpha + 6k\pi = 0 + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{-4k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{3}$

Dando valores de k tenemos como argumentos principales: $k = 0 \rightarrow \alpha = 0$, $k = 1 \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$ y $k = 2 \rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$

Raíces enésimas

Raíces enésimas. Fórmula de De Moivre.

Análogamente, por aplicación directa de la fórmula de De Moivre, tenemos:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} = z^{1/n} &= [r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^{1/n} \\ &= r^{1/n}(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha+2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)\end{aligned}$$

Este resultado se traslada al cálculo de raíces enésimas en forma polar de forma análoga a las potencias anteriormente descritas.

Ejercicio

Escribir la forma binómica y exponencial del número complejo $z = \frac{i^x}{1+\sqrt{2}i}$ dando $x = 186577$. Debemos saber que los resultados de las potencias de la unidad imaginaria se repiten de 4 en 4. Para saber cuánto vale una determinada potencia de i, se divide el exponente entre 4, y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada

Ejercicio

Escribir la forma binómica y exponencial del número complejo $z = \frac{i^x}{1+\sqrt{2}i}$ dando $x = 186577$

Debemos saber que los resultados de las potencias de la unidad imaginaria se repiten de 4 en 4. Para saber cuánto vale una determinada potencia de i, se divide el exponente entre 4, y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada:

$$i^x = i^{186577} = i^{4 \cdot 46644+1} = i^1 = i$$

y por lo tanto, tenemos que:

$$z = \frac{i}{1+\sqrt{2}i} = \frac{i(1-\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} = \frac{i-\sqrt{2}i^2}{1-2i^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$$

NOTA: En MAXIMA, se puede utilizar la función `remainder` para calcular el resto del cociente entero, como en `remainder(186577,4)`

Ejercicio

Dado el complejo z calculado en el ejercicio anterior, calcular $\log(z)$

Ejercicio

Dado el complejo z calculado en el ejercicio anterior, calcular $\log(z)$

Para calcular el logaritmo, recurrimos a la forma exponencial de z:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \alpha = \arctan \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{i \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Ahora aplicamos el logaritmo y operamos, teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos:

$$log(z) = \log\left(\frac{\sqrt{3}}{3} e^{i \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + i\left(\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \log(e)$$

Y por lo tanto obtenemos la solución:

$$log(z) = \log\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + i\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

Dado el polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ con $a_n \neq 0$

Grado y coeficiente director: Al número natural n se le llama grado del polinomio no nulo y al coeficiente a_n coeficiente director.

Raíz del polinomio: Se dice que un número complejo z_0 es raíz del polinomio $p(z)$ si $p(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \ldots + a_n z_0^n = 0$

Raíces complejas: si z_0 es una raíz compleja de $p(z)$ también lo es su conjugada.

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de grado mayor que cero tiene una raíz. Esto implica que todo polinomio de grado n de una variable con grado mayor que cero con coeficientes complejos tiene, contando las multiplicidades, exactamente n raíces complejas.

Ejemplo

Determinar un polinomio de coeficientes reales de grado 4 que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5+2i$.

Ejemplo

Determinar un polinomio de coeficientes reales de grado 4 que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5+2i$.

Dado que el polinomio es de grado 4, de acuerdo con el TFA tendrá 4 raíces. Sabemos además que dos de ellas son complejas, por lo tanto las otras dos serán sus conjugados. Por lo tanto, buscamos el polinomio con raíces: $-4i$, $4i$, $-5+2i$ y $-5-2i$. Podemos expresarlo en forma factorizada como:

$$
\begin{aligned}
(x-4i)(x+4i)(x-(-5+2i))(x-(-5-2i)) &= 0 \\
\Rightarrow x^2-4xi+4xi-16i^2(x+5-2i)(x+5+2i) &= 0 \\
\Rightarrow (x^2+16)((x+5)^2-4i^2) &= 0 \\
\Rightarrow (x^2+16)(x^2+25+10x+4) &= 0 \\
\Rightarrow p(x) = x^4+10x^3+45x^2+160x+464
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Resolver la ecuación $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$

Ejemplo

Resolver la ecuación $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Puede resolverse de forma directa mediante un cambio de variable $x^2 = t$, resultando en un polinomio de segundo grado:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 + 3t - 10 = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = 0$$

De donde se obtiene dos raíces: 2 y -5. Ahora retornamos a la variable original:

$$x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$
$$x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\sqrt{-1} = \pm i\sqrt{5}$$

Y por tanto, obtenemos las 4 soluciones de la ecuación: $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}\}$

Ejercicio

Hallar los complejos z tales que $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$, expresando el resultado en forma binómica.

Ejercicio

Hallar los complejos z tales que $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$, expresando el resultado en forma binómica.
Hacemos $z^3 = t$, quedando la ecuación en la forma $t^2 - 9t + 8$, obteniéndose las raíces $t = 8$ y $t = 1$.

- Para $t = 8$, tenemos: $z^3 = 8 \rightarrow z = \sqrt[3]{8}_{\frac{0+2k\pi}{3}}$ Dando valores a k:
  $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_0 = 2(cos(0) + i \cdot sen(0)) = 2 + 0i$
  $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{\frac{2\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$
  $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{\frac{4\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i$ (*que es $= \overline{z_2}$)
- Para $t = 1$, tenemos: $z^3 = t = 1 \rightarrow z = \sqrt[3]{1} = 1_{\frac{0+2k\pi}{3}}$. Del mismo modo:
  $k = 0 \rightarrow z_4 = 1_0 = 1$
  $k = 1 \rightarrow z_5 = 1_{\frac{2\pi}{3}} = 1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
  $k = 2 \rightarrow z_6 = 1_{\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (*que es $= \overline{z_5}$)