Derivadas direccionales y gradientes
Plano tangente y recta normal

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Contenidos

Derivada direccional

Derivada direccional. Definición

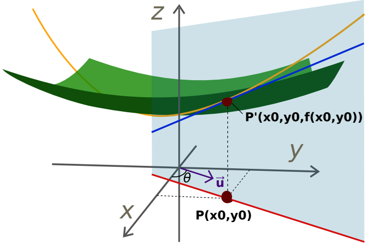
Sea f una función de dos variables x e y, y sea $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ un *vector unitario*. Entonces, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$, que se denota $D_u f$, es:

$$D_u f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta) - f(x,y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Interpretación geométrica

A diferencia de la derivada parcial, la derivada direccional proporciona la pendiente en un punto de una superficie en *cualquier* dirección.



Derivada direccional. Cálculo:

Cálculo de la derivada direccional

La derivada direccional puede calcularse usando la definición, de forma similar a la derivada en un punto en una función de una variable. Alternativamente, pueden emplearse las derivadas parciales, como se muestra a continuación. Si f es una función diferenciable de x e y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es

$$D_u f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

Ejemplo:

Hay infinitas direcciones posibles en las que calcular la derivada direccional para un punto dado de una superficie. Dos de éstas son las derivadas parciales:

1. En la dirección del eje OX $(\theta = 0)$: $D_{\mathbf{i}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + 0$
2. En la dirección del eje OY $(\theta = \frac{\pi}{2})$: $D_{\mathbf{j}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 1$

Derivada direccional. Ejemplos

Ejemplos de aplicación:

1. Hallar la derivada direccional de $f(x,y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ en el punto $(1,2)$, según la dirección del vector $\mathbf{u} = \cos\frac{\pi}{3}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\mathbf{j}$
2. Hallar la derivada direccional de $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} 2y$ en $(1, \frac{\pi}{2})$, en la dirección de $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

Gradiente

El gradiente de una función de dos variables es una función vectorial, con múltiples aplicaciones, respondiendo a la pregunta de *"¿en qué dirección f(x,y) varía más rápidamente?"*

Gradiente. Definición

Sea $z = f(x,y)$ una función de x e y tal que f_x y f_y existen. Entonces el gradiente de f, denotado por $\nabla f(x,y)$, es el vector:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j}$$

siendo ∇ el operador *nabla*.

Cabe indicar que el gradiente $\nabla f(x,y)$ es un vector en el plano, también conocido como *vector gradiente*.

Gradiente. Ejemplos

Ejemplos:

1. Hallar el gradiente de la función $f(x, y) = \operatorname{sen}^2 x - y \log x$
2. Hallar el gradiente de la función $f(x, y) = e^{7xy} - \cos(3x^2y)$, en el punto $(1, 1)$

Gradiente y relación con la derivada direccional

Forma alternativa de la derivada direccional

Dado que el gradiente de f es un vector, se puede expresar la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ como:

$$D_u f(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right] \cdot [\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}]$$

Por lo tanto, la derivada direccional es el *producto escalar* del gradiente y el vector unitario de dirección $\mathbf{u}$

Teorema:

Si f es una función diferenciable de x e y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$$

Gradiente. Propiedades

Gradiente. Propiedades:

Sea f diferenciable en el punto (x, y). Se definen las siguientes propiedades:

1. Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 0$ para todo $\mathbf{u}$
2. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $||\nabla f(x, y)||$
3. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $-||\nabla f(x, y)||$

Derivada direccional y gradiente. Ejemplos:

Ejemplos de aplicación:

1. Hallar la derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, en la dirección de $P\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ a $Q(0,1)$
2. Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = x - y^2$ siguiendo la parábola $y = 2x - 3x^2$ en el punto de coordenadas $(1, -1)$
3. Suponemos que la cima de una montaña helada en el invierno tiene forma de un paraboloide elíptico $z = c - ax^2 - by^2$, donde a, b y c son constantes positivas, x e y son las coordenadas geográficas longitud-latitud, y z es la altitud sobre el nivel del mar (x, y y z están medidas en metros). En el punto $(1,1)$ se encuentra un alpinista, que se dirige por la vía más directa hacia la cima. ¿En qué dirección asciende?. ¿Qué pendiente asciende en ese punto?. Si se le cae un mosquetón de la mochila, ¿en qué dirección se deslizará éste por la ladera?

$D_{\mathbf{u}}f$ y ∇f en funciones de tres (o más) variables

Las definiciones de derivada direccional y gradiente pueden extenderse de manera natural a 3 o más variables, aunque la interpretación geométrica de las mismas ya no es inmediata ni intuitiva. Se resumen a continuación las definiciones y propiedades, que no difieren de lo ya visto en dos variables:

Derivada direccional para funciones de tres variables

Sea f una función de x, y y z, con derivadas parciales de primer orden continuas. La derivada direccional de f en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ está dada por:

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}$$

A su vez, el gradiente de f se define como:

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Propiedades del gradiente:

Propiedades del gradiente para funciones de tres variables:

1. $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \mathbf{u}$, siendo f diferenciable en x, y y z
2. Si $\nabla f(x,y,z) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = 0$ para toda $\mathbf{u}$
3. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x,y,z)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)$ es $||\nabla f(x,y,z)||$
4. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x,y,z)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)$ es $-||\nabla f(x,y,z)||$

Vector gradiente en 3 variables. Ejemplo

Calcular el vector gradiente de la función $f(x,y,z) = \log \frac{x}{y} \operatorname{sen} z^2$

De acuerdo con la definición del gradiente, en este caso dada por

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \quad \text{, se obtiene:}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \operatorname{sen} z^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y} \operatorname{sen} z^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \log \frac{x}{y} \cos z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \nabla f & = \frac{1}{x} \operatorname{sen} z^2 \mathbf{i} - \frac{1}{y} \operatorname{sen} z^2 \mathbf{j} + 2z \log \frac{x}{y} \cos z^2 \mathbf{k} \\ & = \left(\frac{1}{x} \operatorname{sen} z^2 \quad , \ \frac{1}{y} \operatorname{sen} z^2 \quad , \ 2z \log \frac{x}{y} \cos z^2 \right) \end{array}$$

Ahora puede calcularse el vector gradiente en cualquier punto del dominio, p. ej. en $(e, 1, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$:

$$\nabla f(e, 1, \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2e}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathbf{z}$$

Plano tangente y recta normal

Ecuación de la superficie S

Por conveniencia, en lo sucesivo, se empleará la representación implícita de las superficies definida por $F(x, y, z) = 0$. La transformación a la forma general de $z = f(x, y)$ es inmediata teniendo en cuenta que:

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z \Rightarrow F(x, y, z) = 0$$

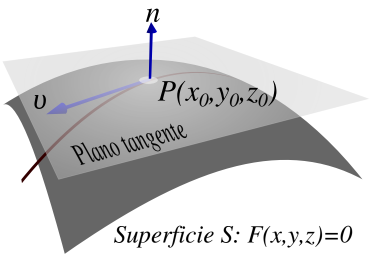
Sea F diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por la forma implícita $F(x, y, z) = 0$, tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$:

Plano tangente. Definición:

Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama plano tangente a S en P

Recta normal. Definición:

A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama recta normal a S en P



Hasta ahora se ha visto que $\nabla f(x,y)$ es un vector en el plano XY, normal a las curvas de nivel de f. Dada la representación de la misma superficie en tres variables en su forma implícita $F(x,y,z)$, se tiene el siguiente teorema:

Teorema:

Si F es diferenciable en (x_0,y_0,z_0) y $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (x_0,y_0,z_0)

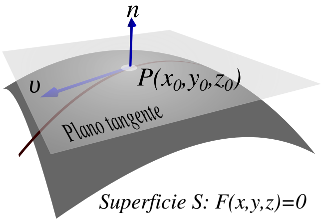
Nota:

Por lo tanto, debe recordarse que $\nabla f(x,y)$ es un vector en el plano XY mientras que $\nabla F(x,y,z)$ es un vector en el espacio

Ecuación del plano tangente

Siendo $P(x_0, y_0, z_0)$ el punto de tangencia de la superficie S y (x, y, z) un punto arbitrario del plano tangente, se define el vector v perteneciente a dicho plano como:

$$\mathbf{v} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$



Como $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente en (x_0, y_0, z_0), debe ser ortogonal a todo vector en plano tangente, y se tiene que:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$$

lo que demuestra el enunciado del siguiente teorema:

Ecuación del plano tangente. Teorema:

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), entonces una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es:

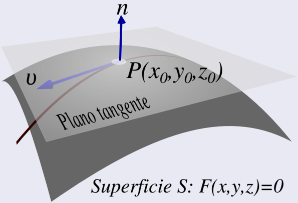
$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z - z_0) = 0$$

Ecuación del plano tangente (forma explícita)

No es estrictamente necesario contar con la forma implícita de la superficie para hallar el plano tangente. Alternativamente, a partir de la forma explícita de la función, puede calcularse el plano tangente en el punto de coordenadas (x_0, y_0) siguiendo la fórmula:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

siendo f_x y f_y las derivadas parciales de f, evaluadas en el punto de tangencia (x_0, y_0).



Ecuación del plano tangente. Ejemplos:

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + 2xy + yz = 1$ en el punto $(1, 0, -2)$

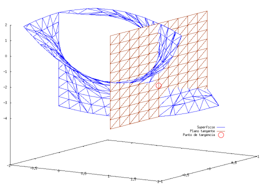


Figura 1: Representación gráfica de la solución. Código MAXIMA disponible en Moodle.

2. Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $f(x, y) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$ en el punto $(1, 1, \frac{1}{2})$

Ecuación de la recta normal

Recta normal. Ecuaciones paramétricas

La ecuaciones paramétricas de la recta normal a S en $P(x_0, y_0, z_0)$ vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} \cdot t \\ y = y_0 + \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} \cdot t \\ z = z_0 + \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \cdot t \end{cases}$$

estando las derivadas parciales particularizadas en el punto (x_0, y_0, z_0), y siempre y cuando éstas no sean todas nulas.

Ecuación de la recta normal. Ejemplo

Recta normal. Ejemplo

Hallar la ecuación del plano tangente a la hiperboloide dada por la expresión $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en el punto $(1, 1, 1)$. Determinar las ecuaciones paramétricas de las rectas normales a la superficie en dicho punto.

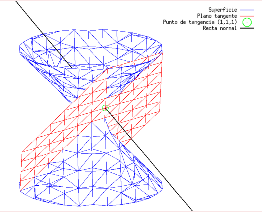


Figura 2: Representación gráfica de la solución. Código MAXIMA disponible en Moodle.

Polinomio de Taylor

Polinomio de Taylor de orden 1 en 2 variables: Plano tangente

Recordando la fórmula de Taylor en una variable, para el punto a:

$$P_x(a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

En varias variables es similar, salvo que ahora hay que acompañar cada variable con su derivada parcial. Por ejemplo, en dos variables (omitiendo el término residual), el polinomio de Taylor de orden 1 quedaría:

$$P_{xy}(a,b) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)$$

que coincide con la ecuación del plano tangente, ya que el plano tangente es la mejor aproximación lineal.
En más dimensiones lo que resultan son hiperplanos tangentes

Polinomio de Taylor. Orden 2

En el caso del polinomio de Taylor de orden 2 en dos variables, deben tenerse en cuenta las derivadas cruzadas:

$$P_{xy}(a,b) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2(a,b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2(a,b)}{\partial y \partial x}(x-a)(y-b)$$

que suponiendo $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}$, queda como:

$$P_{xy}(a,b) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2 + \frac{\partial f^2(a,b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b)$$

Los polinomios de Taylor de orden mayor son análogos pero se usan mucho menos en la práctica

Ejemplo:

Ejemplo:

Hallar los polinomios de Taylor de orden 1 y 2 de la función $f(x,y) = e^x \cos(x+y)$ en el origen