Función de varias variables. Derivadas parciales y Diferenciales

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Contenidos

1. Derivadas Parciales. Introducción
   - Derivadas Parciales de primer orden
   - Derivadas Parciales de orden superior
2. Diferenciabilidad
   - Incrementos y diferenciales
   - Diferenciabilidad
3. Derivación implícita

Derivadas parciales. Definición

Definición

Si $z = f(x, y)$, las primeras derivadas parciales de f con respecto a x e y, son las funciones f_x y f_y definidas por:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

siempre y cuando dicho límite exista

Esta definición indica que si $z = f(x, y)$, entonces para hallar f_x se considera y como una constante y se deriva con respecto a x. De manera similar, para calcular f_y, se considera x constante y se deriva respecto de y.

Derivadas parciales. Notación

Derivadas parciales. Notación

- Si $z = f(x,y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

- Las primeras derivadas parciales, evaluadas en el punto (a,b), se denotan por:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b)$$

Derivadas parciales. Ejemplo.

Ejemplo:

Dada la función $f(x,y) = xe^{x^2y}$, calcular las primeras derivadas parciales, y su valor en el punto $(1, \log 2)$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y} + xe^{x^2y}(2xy) = e^{x^2y} + 2x^2ye^{x^2y}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,\log 2)} = e^{\log 2} + (2\log 2)e^{\log 2} = 2 + 4\log 2$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{x^2y}(x^2) = x^3e^{x^2y}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,\log 2)} = e^{\log 2} = 2$$

Derivadas parciales. Interpretación geométrica

Derivadas parciales. Interpretación geométrica

Si $y = y_0$, entonces $z = f(x, y_0)$ representa la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$. Por lo tanto

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Del mismo modo:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

representa la pendiente de esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Informalmente, los valores $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en (x_0, y_0, z_0) denotan las pendientes de la superficie en las direcciones de x e y, respectivamente.

Derivadas parciales de una función de tres o más variables

Derivada parcial en 3 o mas variables

El concepto de derivada parcial se extiende de manera natural funciones de tres o más variables. Por ejemplo, dada $w = f(x, y, z)$, existen tres derivadas parciales, que se calculan de manera similar a lo ya visto en dos variables:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hay n derivadas parciales:

$$\frac{\partial w}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

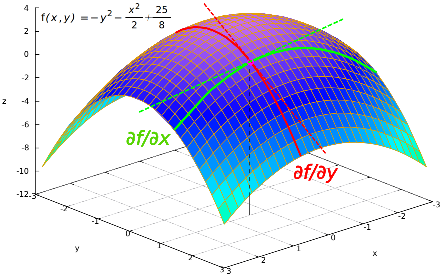
Derivadas parciales. Interpretación geométrica

Ejemplo:

Hallar las pendientes de la superficie $f(x,y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$ en las direcciones de x y de y en el punto $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}\right) = -x \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}\right) = -2y \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},1)} = -2$$



Derivadas parciales. Ejemplos

Hallar las dos derivadas parciales de primer orden

1. $f(x,y) = \log\sqrt{(x^2+y^2)}$
2. $f(x,y) = \cosh xy^2$
3. $f(x,y) = \int_x^y (2t+1)dt + \int_y^x (2t-1)dt$
4. $g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$

Determinar la pendiente de las rectas tangentes a la superficie en las direcciones de x e y, en los puntos dados:

1. $f(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{4x^2+5y^2}}, \qquad (1,1)$
2. $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}, \qquad (2,-2)$

Continuidad y derivadas parciales no se condicionan

Al contrario de lo que sucede con las funciones de una variable, la existencia de las derivadas parciales no garantiza la continuidad de la función en un punto.

Por lo tanto, continuidad y derivada parcial no se condicionan mutuamente en el caso de funciones de varias variables. Se analizan a continuación algunos ejemplos.

Continuidad y derivadas parciales no se condicionan

Ejemplo 1: $f(x,y)$ continua en $(0,0)$ existiendo derivadas parciales:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad, pasamos el límite a coordenadas polares:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{2\rho^3 \cos^3\theta}{\rho^2} = 2\rho\cos^3\theta = 0 = f(0,0) \quad \text{por lo que es continua}$$

Además, tiene derivadas parciales en $(0,0)$, que son, aplicando la definición:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^3}{h^3} = 2$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{n \to 0} \frac{\frac{0}{0+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

Continuidad y derivadas parciales no se condicionan

Ejemplo 2: $f(x,y)$ discontinua en $(0,0)$ existiendo derivadas parciales:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

En este caso, los límites reiterados no permiten descartar la existencia del límite, pero el límite direccional con $y=mx$ sí (cuyo resultado es función de m):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot mx}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2m}{x^2\left(1+m^2\right)}=\frac{m}{1+m^2}\Rightarrow \nexists L,\ f(x,y) \text{ discontinua en } (0,0)$$

No obstante, encontramos que las derivadas parciales existen, y valen 0:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0+h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0,0+h\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

Continuidad y derivadas parciales no se condicionan

Ejemplo 3: $f(x,y)$ continua en $(0,0)$ sin derivadas parciales en dicho punto:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}+y\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Es continua en $(0,0)$, ya que:

$$\lim x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}+y\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}=0+0=f(0,0)\quad \text{por lo que es continua}$$

Sin embargo, encontramos que las derivadas parciales no existen en el origen:

$$f_x(0,0)\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{1}{h^2}}{\cancel{h}}\Rightarrow\nexists L$$

$$f_y(0,0)\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{1}{h^2}}{\cancel{h}}\Rightarrow\nexists L$$

Derivadas parciales de orden superior

Es posible hallar las derivadas parciales de órdenes superiores a uno, siempre que dichas derivadas existan.

Derivada parcial segunda respecto a x : $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Derivada parcial segunda respecto a y : $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Derivadas cruzadas:

Derivada parcial con respecto a y y a x : $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Derivada parcial con respecto a x y a y : $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Se puede recordar el orden de derivación observando que primero se deriva con respecto a la variable “más cercana” a f

Derivadas parciales de sucesivas

Igualdad de las derivadas cruzadas. Teorema de Schwarz:

Si f es una función de x e y tal que sus derivadas parciales cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ son continuas en un disco abierto R, entonces se cumple que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \; \forall (x, y) \in R$$

El teorema se aplica igualmente a una función f de tres o más variables, siempre y cuando las derivadas parciales de segundo orden sean continuas.

Por ejemplo:

Si $w = f(x, y, z)$ y todas sus derivadas parciales de segundo orden son continuas en una región abierta R, entonces en todo punto en R el orden de derivación para obtener las derivadas parciales cruzadas de segundo orden es irrelevante. Si las derivadas parciales de tercer orden de f también son continuas, el orden de derivación para obtener las derivadas parciales cruzadas de tercer orden es irrelevante.

Derivadas parciales de orden superior. Ejemplos.

Ejemplos de aplicación:

1. Mostrar que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ para la función dada por $f(x, y, z) = ye^x + x \log z$
2. Dada la función $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y}$, verificar el teorema de Schwarz hasta orden 3 en el punto $(1, 1)$

Incremento en z y diferencial total

Incremento en z y Diferencial total

Recordando la definición de diferencial en una variable, dada como $dy = f'(x)dx$, de igual modo se define el incremento en z para una función de dos variables:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son los incrementos respectivos en x e y, entonces las diferenciales de las variables independientes x e y son:

$$dx = \Delta x \qquad \text{y} \qquad dx = \Delta y$$

y la diferencial total de la variable dependiente z es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Esta definición puede extenderse a una función de tres o más variables. Por ejemplo, dada $w = f(x, y, z, u)$, entonces $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$ y $du = \Delta u$ y la diferencial total de w es:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial u}du$$

Diferencial total. Ejemplos

Ejemplo:

Hallar la diferencial total de la función $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2$. El diferencial total vendrá dado por $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2) = 2 \operatorname{sen} y - 6xy^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2) = 2x \cos y - 6x^2y$$

$$\Rightarrow dz = (2 \operatorname{sen} y - 6xy^2)dx + (2x \cos y - 6x^2y)dy$$

Ejemplo de aplicación:

Aproxímese a través de la diferencial dz el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x, y) se desplaza del punto $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$. Comparar la aproximación con el cambio exacto en z.

Diferenciabilidad

Cuando es válida la aproximación del valor de Δz a través del diferencial total (es decir, es válido el supuesto $\Delta z \approx dz$), se dice que la función z es diferenciable.

Diferenciabilidad. Definición:

Una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en (a, b) si Δz puede expresarse en la forma:

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. La función f es diferenciable en una región R si es diferenciable en todo punto de R.

Diferenciabilidad

En una variable, $f(x)$ es diferenciable en un punto si existe $\mathrm{f}'(x)$ en ese punto. En varias variables es diferente, ya que la existencia de las derivadas parciales f_x y f_y no garantiza que la función sea diferenciable.

Condición suficiente de diferenciabilidad:

Si f es una función de x e y, para la que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en R.

Función continuamente diferenciable:

Una función es de clase C^1 si sus derivadas parciales son continuas. Estas funciones se denominan continuamente diferenciables. Una función es de clase C^n, con $n \geq 1$, si existen todas sus derivadas parciales hasta orden n y son continuas. Estas funciones se denominan n veces continuamente diferenciables.

Ejemplo:

Mostrar que la función $f(x, y) = 5x^2 + 2y$ es diferenciable en cualquier punto del plano.

Derivación parcial implícita

Una función $y(x)$ está dada de forma implícita cuando está definida de la forma $F(x, y) = 0$ en lugar de la habitual $y = f(x)$. El teorema de la función implícita establece condiciones suficientes, bajo las cuales una ecuación o conjunto de ecuaciones de varias variables permite definir a una de ellas o varias de ellas como función de las demás.

Función implícita (una ecuación y 2 variables). Teorema:

Sea $F : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en la región abierta G, y sea $(x_0, y_0) \in G$. Si se verifica:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\exists \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}$, siendo ambas continuas en el entorno de (x_0, y_0)
3. $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$

Entonces, en el entorno de (x_0, y_0) existe una función $y = y(x)$ tal que $F(x, y(x)) = 0$. Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente de cualquier número de variables.

Derivación parcial implícita

Si la ecuación $F(x,y)=0$ define a y implícitamente como función derivable de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \quad F_y(x,y)\neq 0$$

Del mismo modo, si la ecuación $F(x,y,z)=0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x e y, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad F_z(x,y,z)\neq 0$$

De manera general:

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

Ejemplo:

1. Demostrar que $y^2+xz+z^2-e^z=4$, define la función $z=f(x,y)$ en un entorno del punto $(0,e,2)$
2. Hallar las derivadas parciales de z en $(0,e)$