Función real de una variable real: Derivadas

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

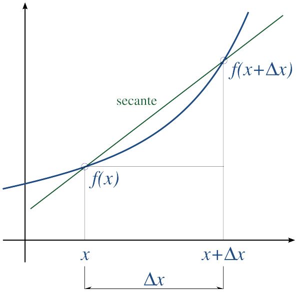
Contenidos

Recta secante

Cociente incremental de f en x

La fórmula que calcula la pendiente m de la recta secante a la gráfica de la función f, y que une los puntos $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ y $(x, f(x))$ queda definida como:

$$m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

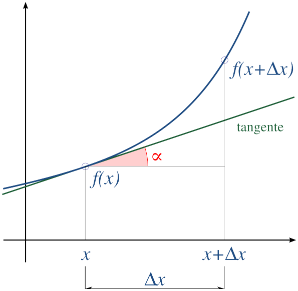


Recta tangente

Definición de derivada

Definimos la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 como el límite del cociente incremental:

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



- Representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$
- Notaciones frecuentes:
  - $f'(x)$
  - $\frac{df}{dx}$
  - $f^{(1}(x)$
  - y'
  - $\frac{dy}{dx}$
  - $y^{(1}$

Derivada de una función

Definición informal

Dada un función $f(x)$, se define una nueva función, que se denota $f'(x)$, la cual:

- Geométricamente, representa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en un punto x_0
- De modo más general, es un valor que se interpreta como la rapidez de cambio de la función en x_0

Ejemplo: la velocidad

Por ejemplo, cuando la variable independiente x mide el tiempo, la derivada de la función mide la velocidad de una partícula moviéndose a lo largo de un eje, el caudal de un río etc.

Características

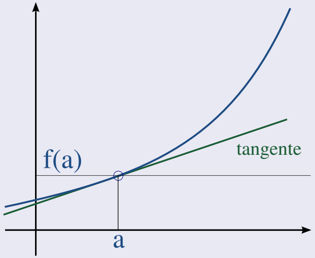
- El proceso de cálculo para determinar la derivada de una función se denomina diferenciación
- La noción de derivada puede generalizarse para el caso de funciones de más de una variable con la derivada parcial y el diferencial

Recta tangente y normal

Recta tangente:

Sea $f(x)$ una función derivable en un punto $(a, f(a))$: La ecuación de la recta tangente viene dada por:

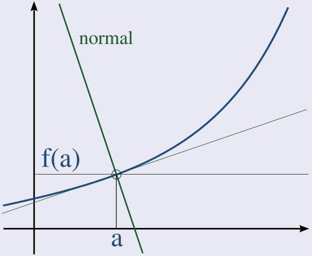
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



Recta normal:

La ecuación de la recta normal es la perpendicular a la recta tangente en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$



Derivadas laterales

Sea $f: \quad X \subset \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \quad :$

$\Rightarrow$ Si existe un $\delta > 0$ para el que $[a, a+\delta) \subset X$, f es derivable por la derecha de a, si existe:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se denota $f'(a^+)$, $y'(a^+)$, $y^{(1}(a^+)$, indicando que el límite es por la derecha.

$\Rightarrow$ Si existe un $\delta > 0$ para el que $[a-\delta, a) \subset X$, f es derivable por la izquierda de a, si existe:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se denota $f'(a^-)$, $y'(a^-)$, $y^{(1}(a^-)$, indicando que el límite es por la izquierda.

Interpretación geométrica

En estos casos, no existe una recta tangente, sino dos semirrectas tangentes por la derecha y por la izquierda

Función derivable

Condición de derivabilidad

Sea f una función real y sea $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f es derivable en a si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{o bien} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que una función $f(x)$ sea derivable en a es que existan las derivadas laterales:

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y que éstas sean iguales:

$$f'(a^-) = f'(a^+) = f'(a)$$

Teorema

- Toda función derivable en un punto, es continua en dicho punto
- El recíproco en general no es cierto

Ejemplo: función valor absoluto

Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ en el punto $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} = \lim_{x \to 0^+} = f(0) = 0$$

, la función es continua. Sin embargo, cuando calculamos los límites laterales para su derivada:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \frac{-x-h+x}{h} = -1$$
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

comprobamos que la función no es derivable en dicho punto

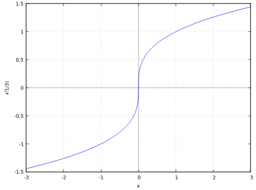
Derivada Infinita

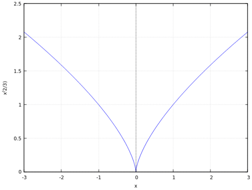
En el caso en que el límite sea ∞, la función no es derivable si el límite es $+\infty$ ó $-\infty$, existiendo una tangente única vertical.

Ejemplos:

- $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $\qquad f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h}-0}{h} = +\infty$, f no derivable en 0

- $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $\qquad \left\{ \begin{array}{l} f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{(0+h)^2}-0}{h} = +\infty \\ f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{(0+h)^2}-0}{h} = -\infty \end{array} \right.$, f no derivable en 0





Estudio de la derivabilidad. Ejemplos:

1. $f(x) = \left| x - \frac{x^3}{6} \right|$ en $x = 0$
2. $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$
3. Determinar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua, y estudiar su derivabilidad:

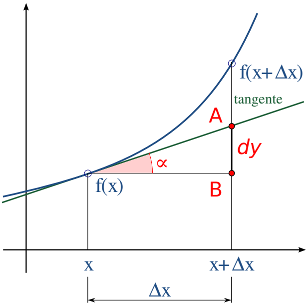
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Diferenciales

Definición:

Si $f(x)$ es una función derivable en un intervalo abierto que contiene a x:

- La diferencial de x es igual al incremento de x, $\Delta x = dx$
- La diferencial de y se define como $dy = f'(x)dx$



Interpretación geométrica

La diferencial en un punto representa el incremento de la ordenada de la tangente, correspondiente a un incremento de la variable:

$$f'(x) = \tan \alpha = \frac{AB}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Diferenciales

Aproximación local de una función mediante la recta tangente

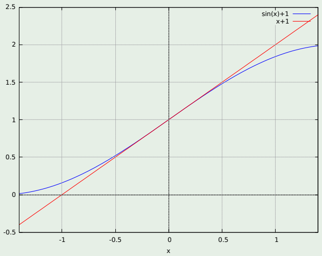
En numerosas aplicaciones, la diferencial de y se utiliza como una aproximación del cambio en y, es decir:

$$\Delta y \approx dy \quad \text{o bien} \quad \Delta y \approx f'(x)dx$$

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$:

- Aproximar por medio de su recta tangente el valor de $f(x)$ en el punto $(0, 1)$ y su entorno.
- Comprobar el error absoluto en la aproximación



Resolución:

La derivada primera $f'(x) = \cos x$. Se considera el punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente viene dada por:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) = y - 1 = \cos 0(x - 0) \rightarrow y = x + 1$$

La siguiente table recoge los valores de la aproximación y los valores exactos cerca de $x = 0$, así como el error absoluto de la estimación ($E_a = |y - \hat{y}|$):

x	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5
$f(x)$	0.521	0.90017	0.9900	1	1.00999	1.0998	1.479
$y = 1 + x$	0.5	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.5
E_a	0.021	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	0	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	0.021

Se comprueba que cuanto más cercano es el valor de x a 0, mejor es la aproximación (menor es su error con respecto al valor de $f(x)$ en el punto). Esta conclusión se refuerza mediante la inspección de la gráfica de la diapositiva anterior.

Ejemplo

Ejemplo de aplicación del diferencial

Un depósito cilíndrico tiene una altura de 1.5m, y un diámetro de 60cm. Tras la aplicación de un revestimiento interior aislante de 1mm de espesor en la pared lateral (no en la tapa ni el fondo),

- estimar la reducción de volumen experimentada mediante cálculo diferencial
- calcular el error absoluto de la estimación

Reglas de derivación

i) Regla del producto por una constante $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x), \; a \in \mathbb{R}$

ii) Regla de la suma $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

iii) Regla del producto $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

iv) Regla del cociente $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Ejemplos de aplicación de las reglas:

1. $y = 4 \cdot Cos\ x \Rightarrow y' = 4 \cdot -sen\ x = -4sen\ x$
2. $y = 3x^2 - x + 6 \Rightarrow y' = 6x - 1 + 0$
3. $y = sen\ x \cdot \sqrt{x} \Rightarrow y' = cos\ x \cdot \sqrt{x} + sen\ x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y = \frac{sen\ x}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{cos\ x \cdot \sqrt{x} - sen\ x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

Regla de la cadena

Si $y = f(u)$ es derivable en $g(x)$, y $u = g(x)$ es derivable en x, entonces la función compuesta $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable en x, siendo su derivada:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Lo mismo puede expresarse con la notación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$f(x) = cos\sqrt{x}$. Se trata de una composición de $y = cos(u)$, con $u = \sqrt{x}$. Por lo tanto, para hallar $f'(x)$:

$\frac{dy}{du} = -sen(u)$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -sen(u) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

Recordatorio de derivadas

Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $x^2 + 3x - 10$
2. $\sqrt[5]{2x}$
3. $(x^2 + 3x - 10)^4$
4. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
5. $\log\left(\sqrt{x(1-x)}\right)$
6. $\sqrt{x} \cdot 3^{2x^2}$
7. $\log(\cos 2x)$
8. $\operatorname{arc\,sen}(1 - 2x^2)$
9. $\frac{e^{2x}}{x^2}$
10. $\log\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

Derivación implícita

Motivación

La mayoría de las funciones que hemos visto hasta ahora están expresadas en forma explícita, donde la variable y viene expresada en función de x. Ejemplo:

$$y = \frac{4}{5x^3 + 1}$$

No obstante, la misma función puede expresarse implícitamente:

$$5x^3 y + y = 4$$

Se trata de resolver derivadas cuando la función está expresado en forma implícita, y además despejar y no es posible o resulta muy complicado.

Derivación implícita

Estrategia de derivación:

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x. La derivada de y se realiza mediante la *regla de la cadena*, añadiendo $y'(x)$ cada vez que se deriva y
2. Agrupar todos los términos que contengan $y'(x)$ en el lado izquierdo de la ecuación
3. Sacar factor común de $y'(x)$
4. Despejar $y'(x)$

Derivación implícita

Ejemplo:

Cálculo de la derivada implícita de $4y^3 + 2y^2 - 7y - 3x^2 = -4$ respecto de x

1. Se derivan ambos miembros de la ecuación
$$12y^2 \cdot y' + 4y \cdot y' - 7 \cdot y' - 6x = 0$$
2. Se agrupan en un mismo lado todos los términos y'
$$12y^2 \cdot y' + 4y \cdot y' - 7 \cdot y' = 6x$$
3. Se saca factor común de y':
$$y'(12y^2 + 4y - 7) = 6x$$
4. se despeja y':
$$y' = \frac{6x}{12y^2 + 4y - 7}$$

Derivación implícita

En el caso de expresiones más complejas, puede aplicarse esta regla, que facilita mucho el cálculo:

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$$

Ejemplo:

Calcular la derivada respecto de x de $x^2 sen(x+y) - 5ye^x$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-[2x\ sen(x+y) + x^2 cos(x+y) - 5ye^x]}{x^2 cos(x+y) - 5e^x}] \\ &= \frac{2x\ sen(x+y) + x^2 cos(x+y) - 5ye^x}{-x^2 cos(x+y) + 5e^x} \end{aligned}$$

Derivación implícita

Ejercicios

Considerando que y es función de x en un cierto entorno, calcula la derivada y' a partir de las ecuaciones:

1. $\log y + 4y^2 + 2x^2 = 1$
2. $\cos x + \operatorname{sen} 2y = 0$
3. $5x^3 + 2y^5 = \log xy$

Derivadas sucesivas

Derivada segunda

Sea una función $f(x)$ derivable. Si la función $f'(x)$ es derivable también, podemos calcular la derivada de la derivada obteniendo una función nueva que llamaremos segunda derivada, o derivada de orden 2 de $f(x)$, y que denotaremos $f''(x)$, $f^{(2}(x)$...

Derivadas de orden n

- De forma análoga, derivando $f''(x)$ llegamos a la tercera derivada, o derivada de orden 3, que se denota $f'''(x)$, $f^{(3}(x)$...
- Las derivadas posteriores se denotan como $f^{(4}(x), f^{(5}(x) \ldots$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2e^x \\
f'(x) &= 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x \\
f''(x) &= (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x
\end{aligned}
$$

Derivada enésima de un producto

Fórmula de Leibniz

Si f y g son derivables hasta orden n, entonces la función $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable hasta orden n y además:

$$h^{(n}(x) = (f \cdot g)^{(n}(x) =$$

$$= \binom{n}{0} f(x)g^{(n}(x) + \binom{n}{1} f'(x)g^{(n-1}(x) + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} f^{(n}(x)g'(x) + \binom{n}{n} f^{(n}(x)g(x)$$

De forma general:

$$(f \cdot g)^{(n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k}(x) \cdot g^{(n-k}(x)$$

Notas recordatorias:

Números combinatorios:

Los números combinatorios se definen como

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

, siendo n un número natural t.q. $0 \leq k \leq n$

Factorial:

El factorial de un número natural se define como:

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- $0! = 1$

Ejercicio de aplicación

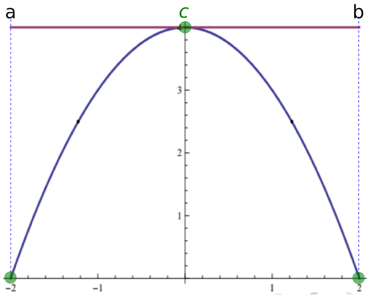
Ejercicio:

Siendo $f(x) = e^x sen\ x$ calcular $f^{(4}(\pi/2)$ aplicando la fórmula de Leibniz

Teorema de Rolle

Teorema:

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), de forma que $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ de forma que $f'(c) = 0$

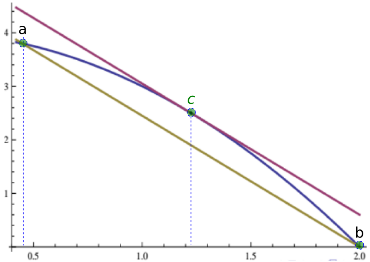


Teorema del valor medio (o de Lagrange)

Teorema:

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ de forma que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Teorema del valor medio generalizado (o de Cauchy)

Teorema:

Si f y g son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ de forma que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad \text{donde } g(b) \neq g(a), \text{ y } g'(c) \neq 0$$

Interpretación geométrica

El teorema de Cauchy nos dice que existen dos puntos $(c, f(c))$ y $(c, g(c))$ de las curvas $f(x)$ y $g(x)$, tales que la pendiente de la tangente a la curva $f(x)$ en el primer punto es k veces la pendiente de la tangente a la curva $g(x)$ en el segundo punto.

Teoremas sobre la derivada

Ejemplos de aplicación:

1. Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $|x^2 - 2x - 3|$
   a. Estudiar si f cumple la hipótesis de Rolle en el intervalo $[2, 4]$
   b. Estudiar si f cumple la hipótesis de Rolle en el intervalo $[-1, 3]$
   c. Si f cumple la hipótesis del teorema de Rolle en alguna de los intervalos de los apartados anteriores, determinar el punto correspondiente cuya existencia se afirma en dicho teorema.
2. Sea la función
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(a+1)x}{1-x} & x < 0 \\ \frac{2x}{1+ax} & x \geq 0 \end{cases}$$
calcular a para que cumpla la hipotesis del teorema del valor Medio de Lagrange en el intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$. Enuncia el Teorema.
3. Analizar si es aplicable el teorema de Cauchy, y en su caso aplicarlo, dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$, considerando el intervalo $[1, 4]$

Regla de l'Hôpital

l'Hôpital

Dadas $f(x)$ y $g(x)$, derivables en $x = a$, tal que $g(a) \neq 0$ y:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Entonces se cumple que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Lo que conocemos como la regla de l'Hôpital.

Podemos aplicarla para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Notas sobre la regla de L'Hôpital

Limitaciones de L'Hôpital

1. Hay que tener cuidado y aplicarlo sólo a las indeterminaciones de los tipos señalados, y no a otras
2. Puede suceder que la aplicación de L'Hôpital complique el cálculo del límite en lugar de simplificarlo (p.ej.: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}}$)
3. No todos los límites que den lugar a las formas indeterminadas mencionadas pueden resolverse por L'Hôpital. Puede suceder que $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, pero $\nexists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejemplo:

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x - e^x}{\arctan^2 x}$$

(Sol:-1/2)

Crecimiento

Teorema

- Si f es creciente en un intervalo (a, b) y derivable en cualquier punto del intervalo, entonces $f'(x) \geq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$
- Si $f'x \geq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b)

Y de la misma manera:

- Si f es decreciente en un intervalo (a, b) y derivable en cualquier punto del intervalo, entonces $f'(x) \leq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$
- Si $f'x \leq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b)

Definición

- Sea f definida en c. Si $f'(c) = 0$, o bien f no es derivable en c, entonces c es un valor crítico o punto crítico
- Si $f'(c) = 0$, se dice que c es un punto estacionario.

Estudio del crecimiento

Procedimiento

1. Se calcula la derivada de $f(x)$
2. Se iguala a cero la derivada y se resuelve la ecuación (*Puntos críticos*)
3. Se estudio el signo de la derivada en cada uno de los intervalos, teniendo en cuenta el dominio.

Ejemplo: Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$
2. $3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
3. Se estudia el signo de la derivada, considerando tres intervalos:
   - $(-\infty, -1)$; en este caso $f' > 0 \Rightarrow$ la función es creciente en el intervalo
   - $(-1, 1)$; $f' < 0 \Rightarrow$ decreciente
   - $(1, \infty)$; $f' > 0 \Rightarrow$ creciente

Máximos y mínimos

Definición

Sea f definida en un intervalo C, que contiene a c ($c \in C$). Entonces:

- $f(c)$ es el mínimo de f en C si $f(c) \leq f(x)\ \forall\ x \in C$
- $f(c)$ es el máximo de f en C si $f(c) \geq f(x)\ \forall\ x \in C$

El máximo y el mínimo de una función en un intervalo se denominan valores extremos, o simplemente extremos de la función en el intervalo.

Definición

Sea f definida en un intervalo C, que contiene a c ($c \in C$). Entonces:

1. Si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que $f(c)$ es máximo, entonces $f(c)$ se llama máximo relativo de f
2. Si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que $f(c)$ es mínimo, entonces $f(c)$ se llama mínimo relativo de f

Teorema

Si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en $x = c$, c es un valor crítico de f

Estrategia para estudiar extremos absolutos en $[a, b]$:

1. Hallar los valores críticos de f en $[a, b]$
2. Evaluar f en cada valor crítico en (a, b)
3. Evaluar f en a y en b
4. El mayor valor obtenido es el máximo y el más pequeño el mínimo

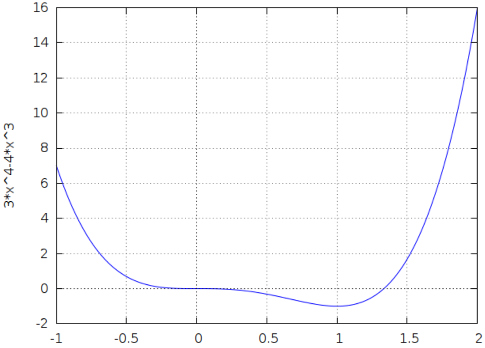
Ejemplo: Calcular los extremos absolutos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en $[-1, 2]$

1. Se deriva. $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$
2. Cálculo de los valores críticos: $12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$
3. Evaluamos la función en los extremos del intervalo y los puntos críticos:

x	x = -1	x = 0	x = 1	x = 2
f(x)	$f(-1) = 7$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$	$f(2) = 16$
			Mínimo	*Máximo*

Nota

En el valor crítico $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. El recíproco del teorema por lo tanto es falso: no todos los valores críticos son máximos o mínimos.



Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea c el valor crítico de una función f continua en un intervalo abierto (a, b) tal que $c \in (a, b)$. Si f es derivable en ese intervalo, salvo tal vez en c, $f(c)$ se clasifica así:

1. Si $f'(x)$ cambia en c de negativa (decreciente) a positiva (creciente), entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f.
2. Si $f'(x)$ cambia en c de positiva (creciente) a negativa (decreciente), entonces $f(c)$ es un máximo relativo en c

Ejemplo: hallar los extremos relativos de $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$

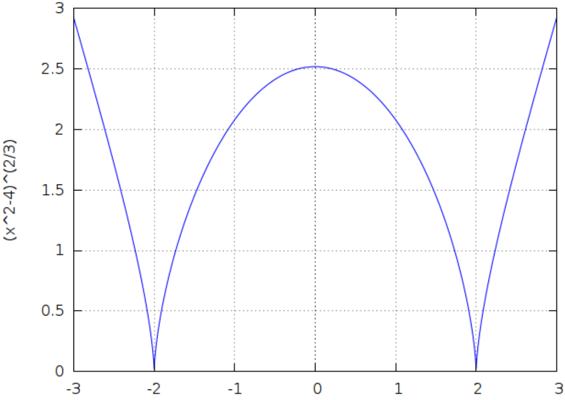
1. Calculamos la derivada primera:
$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{\frac{-1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{\frac{1}{3}}}$$

2. Puntos críticos: Nótese que $x = \pm 2$ hacen la función no derivable. Además:
$$\frac{4x}{3(x^2 - 4)^{\frac{1}{3}}} = 0 \Rightarrow x = 0$$ es otro punto crítico.

3. Representamos los 4 intervalos resultantes sobre la recta $\mathbb{R}$:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Valor de prueba x_0	$x_0 = -3$	$x_0 = -1$	$x_0 = 1$	$x_0 = 3$
$f'(x_0)$	< 0	> 0	< 0	> 0
	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Utilizando el criterio de la primera derivada, encontramos que $f(x)$ tiene en $x = -2$ un mínimo relativo, en $x = 0$ un máximo relativo y en $x = 2$ un mínimo relativo

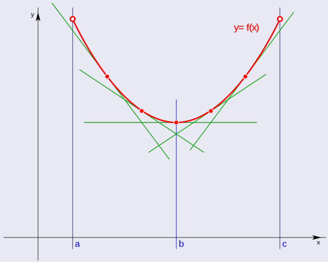


Concavidad

Sea f derivable en un intervalo (a, b). La gráfica de f es:

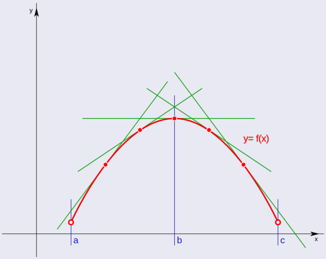
Cóncava hacia arriba

(o *convexa*) en (a, b), si la gráfica de f queda por encima de las rectas tangentes en (a, b)



Cóncava hacia abajo

(o *cóncava*) en (a, b), si la gráfica de f queda por debajo de las rectas tangentes en (a, b)



Teorema: Criterio de concavidad

Sea $f(x)$ una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto (a, b):

1. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo
2. Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo

Para aplicar el teorema, seguimos estos pasos:

1. Localizamos los x donde $f''(x) = 0$ o bien $\nexists f''(x)$.
2. Determinamos los intervalos de prueba
3. Estudiamos el signo de $f''(x)$ en cada intervalo

Definición

Denominaremos puntos de inflexión a aquellos puntos en los que la concavidad cambia de sentido (y existe recta tangente)

Teorema

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces:

- o bien $f''(c) = 0$
- o bien f no es derivable en $x = c$

Nota:

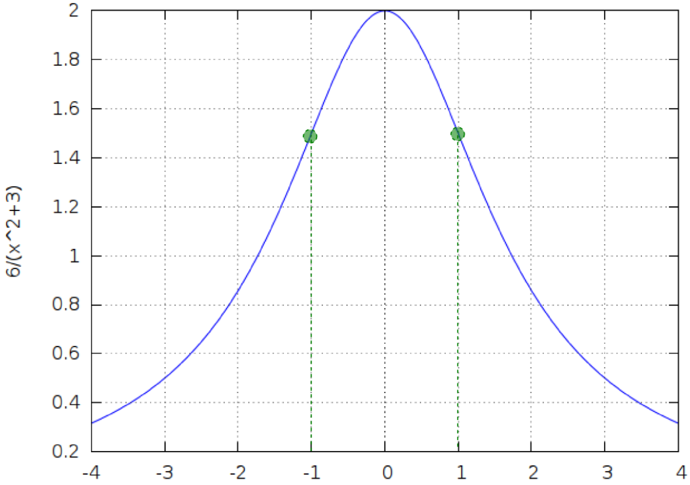
El recíproco del teorema no es cierto en general. La segunda derivada también puede ser 0 en puntos en los que no existe un cambio en la concavidad de la función.

Ejemplo: Estudiar la concavidad de $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

1. $f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$ $\quad f''(x) = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$
2. Igualamos $f''(x) = 0 \Rightarrow 36(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Nótese que en este caso no existen valores de x que anulen a la segunda derivada.
3. Representamos los intervalos resultantes y estudiamos el signo de f'':

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Valor de prueba x_0	$x_0 = -2$	$x_0 = 0$	$x_0 = 2$
Signo $f''(x_0)$	> 0	< 0	> 0
Cóncava hacia	arriba	abajo	arriba

Además, encontramos puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$


6/(x^2+3)
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4