Aplicaciones de las derivadas

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Contenidos

Pasos generales para el análisis gráfico de una función:

1. Indicar los puntos de corte con el eje X (raíces) siempre que sea posible calcularlas de forma sencilla.
2. Marcar en el eje vertical el punto de coordenadas $(0, f(0))$, si existe.
3. Comprobar si f es par o impar. En el primer caso, basta estudiar el gráfico en $x \geq 0$
4. Hallar $f'(x)$. Con el criterio de la primera derivada y los puntos críticos, estudiar el crecimiento y los extremos.
5. Hallar $f''(x)$. Con el criterio de la segunda derivada, estudiar la concavidad y los puntos de inflexión.
6. Buscar asíntotas horizontales, verticales y oblicuas para f
7. Marcar unos cuantos puntos $(x_k, f(x_k))$ de la gráfica estratégicamente distribuídos, y un pequeño trazo recto en la dirección de la tangente (pendiente $f'(x_k)$)
8. Dibujar una curva suave que respete las anteriores indicaciones.

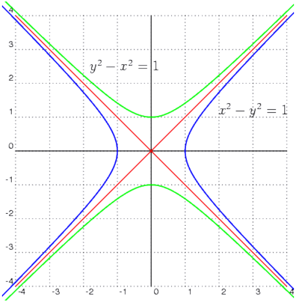
Recordatorio: asíntotas oblicuas

Definición

Las asíntotas oblicuas son rectas, de la forma $y = mx + b$, donde:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$



Nota:

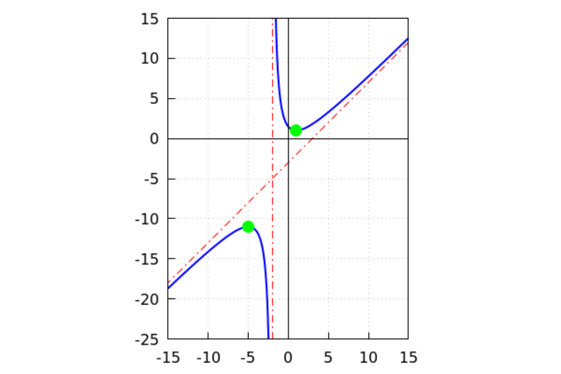
Sólo se buscarán asíntotas oblicuas cuando no existan asíntotas horizontales

Ejercicio

Realizar el estudio de la función $f(x) = \frac{x^2-x+3}{x+2}$ y representar su gráfica sobre el papel.

Ejercicio

Realizar el estudio de la función $f(x) = \frac{x^2-x+3}{x+2}$ y representar su gráfica sobre el papel.



Problemas de optimización

Para la mayoría de ejercicios de optimización, se puede aplicar el siguiente esquema general que ayuda a resolver los problemas:

1. Asignar símbolos a todas las cantidades y si es posible, representar gráficamente el problema
2. Escribir la función objetivo que hay que optimizar (maximizar/minimizar), que en general tendrá más de una variable en un primer momento.
3. Escribir la restricción del problema, que es la que relaciona las distintas variables
4. Obtener a partir de la restricción, la función objetivo con una sola variable
5. Cálcular el máximo/mínimo buscado mediante derivación
6. Comprobar la validez de la solución (es decir, que efectivamente es un máximo/mínimo lo que hemos encontrado) aplicando por ejemplo el criterio de la segunda derivada
7. Presentar la solución final de manera clara

Problemas de optimización. Ejemplos

Ejercicios de optimización:

1. Un orificio en una estructura de hormigón tiene la forma de un rectángulo vertical con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del orificio es de 50 m, encontrar las dimensiones del orificio para que tenga el área máxima.
2. Hallar los puntos de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al punto $P(4, 0)$ sea mínima.
3. Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros se colocan verticalmente sobre el terreno, con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcular la longitud mínima de un cable que vaya desde la punta de uno de los postes hasta un punto de anclaje en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

Aproximación local de funciones. Polinomio de Taylor

Problema:

Aproximar, sin calculadora, el valor de $e^{0.4}$, utilizando polinomios

Polinomio de grado 1

Buscamos $P_1(x) = a + bx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, que aproxime a $f(x) = e^x$ en un entorno de $x = 0$ (pues e^0 es un valor conocido)

Planteamiento:

Dos incógnitas (a, b) y dos condiciones:

1. $P_1(0) = f(0)$, es decir, que el polinomio y la función coinciden en $x = 0$
2. $P_1'(0) = f'(0)$ es decir, que el polimonio y la función tengan la misma pendiente de la recta tangente en $x = 0$ (condición de *suavidad*)

Aproximación local de funciones. Polinomio de Taylor

Resolución

Obtenemos un sistema de ecuaciones muy sencillo:

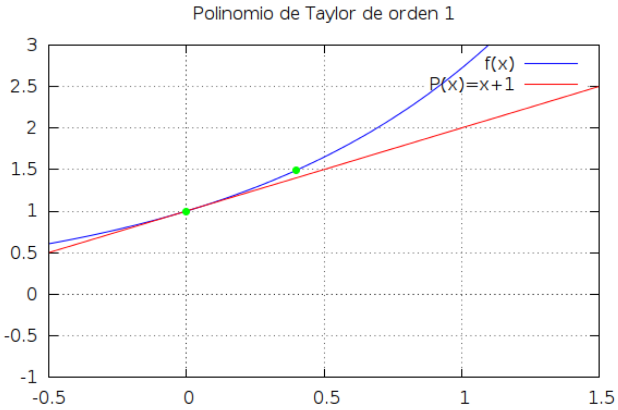
$$
\begin{aligned}
P_1(0) = f(0) &\Rightarrow a + b(0) = e^0 && \Rightarrow a = 1 \\
P_1'(0) = f'(0) &\Rightarrow b = e^0 && \Rightarrow b = 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la recta $y = x + 1$ es el polinomio de grado 1 que aproxima $f(x) = e^x$ en un pequeño entorno del punto $x = 0$ (Nótese que ésta es la recta tangente a la curva e^x en $x_0 = 0$)

Comprobación

- $P_1(0.4) = 0.4 + 1 = 1.4$
- $e^{0.4} = 1.491824698$ (con calculadora)

Por lo tanto, el error absoluto cometido en la estimación es de $E_a = |1.4 - 1.491824698| = 0.091824698$



Por lo tanto, el polinomio de orden 1 que aproxima localmente el valor de la función e^x en x_0 es la recta tangente a la función en x_0, como ya se ha visto anteriormente

Aproximación local de funciones. Polinomio de Taylor

Polinomio de grado 2

Buscamos $P_1(x) = a + bx + cx^2$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, que aproxime a $f(x) = e^x$ en un entorno de $x = 0$ (pues e^0 es un valor conocido)

Planteamiento:

Tres incógnitas a, b, c y tres condiciones:

1. $P_2(0) = f(0)$, es decir, que el polinomio y la función coinciden en $x = 0$
2. $P_2'(0) = f'(0)$ es decir, que el polimonio y la función tengan la misma pendiente de la recta tangente en $x = 0$ (condición de *suavidad*)
3. $P_2''(0) = f''(0)$ además, las derivadas segundas también coinciden en 0

Resolución

Obtenemos un sistema de ecuaciones sencillo:

$$P_2(0) = f(0) \Rightarrow a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 = e^0 \qquad \Rightarrow a = 1$$

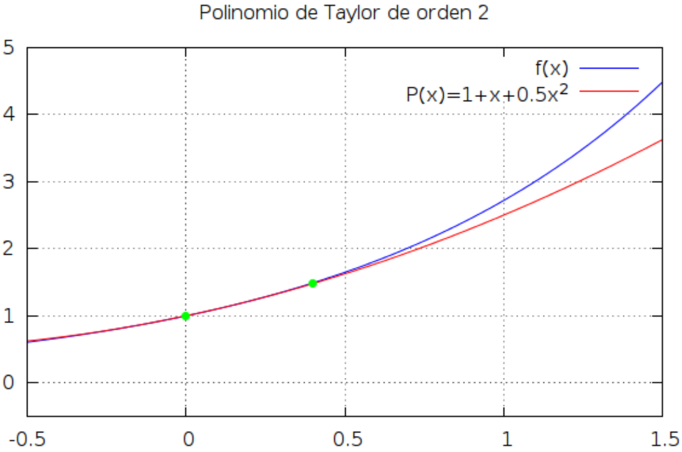
$$P_2'(0) = f'(0) \Rightarrow b + 2c \cdot 0 = e^0 \qquad \Rightarrow b = 1$$

$$P_2''(0) = f''(0) \Rightarrow 2c = e^0 \qquad \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la parábola $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ es el polinomio de grado 2 que aproxima $f(x) = e^x$ en un pequeño entorno del punto $x = 0$

Comprobación

- $P_2(0.4) = 1 + 0.4 + 0.4^2/2 = 1.48$
- $e^{0.4} = 1.491824698$ (con calculadora)
- Por lo tanto, el error absoluto cometido en la estimación es de $E_a = |1.48 - 1.491824698| = 0.011824698$


Polinomio de Taylor de orden 2
f(x)
P(x)=1+x+0.5x2
5
4
3
2
1
0
-0.5
0
0.5
1
1.5

Polinomio de Taylor de grado n

Fórmula de Taylor

Sea $f(x)$ una función $n-veces$ derivable en un punto $x=a$. Definimos el Polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado n, centrado en $x=a$, como:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Fórmula de MacLaurin

En el caso especial en que $a=0$, es decir, intentamos aproximar el valor de la función en cero, hablamos de la serie de MacLaurin.

Se habla del punto a como el *punto de centrado*, siendo el punto x el punto en el entorno de a cuyo valor $f(x)$ se quiere estimar, es decir, el *punto de estimación*

Polinomio de Taylor de grado n. Ejemplo.

Ejercicio:

1. Aproximar el valor de $\log(1.2)$ mediante un polinomio de Taylor de orden 5
2. Expresar el término general de la serie de potencias obtenida
3. Determinar a partir de qué termino se satisface que el error absoluto de la estimación sea menor que 0.0005

(Ver *ejemplo1_taylor.wxmx*, en Moodle)

Análisis del error. Forma del resto de Lagrange

Dado que al aproximar $f(x)$ por Taylor siempre cometemos un error de estimación, podemos decir que:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

La expresión del resto del polinomio es la siguiente:

$$Rn(x) = \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ donde } a < \alpha < x \text{ o bien } x < \alpha < a$$

Aunque el parámetro α es desconocido, puede acotarse. Por lo tanto, podemos escribir la fórmula de Taylor completa junto con el resto como:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Pol. de Taylor de orden n}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{Resto}$$

Análisis del error. Forma del resto de Lagrange

La acotación del error mediante el resto de Lagrange permite:

- Determinar el error máximo que se comete en la estimación de $f(x)$ para un número de términos del polinomio, ó bien
- Calcular cuántos términos del polinomio son necesarios para realizar la estimación por debajo de una cota de error dada

Acotación del error. Nota

Dado que a menudo utilizaremos la expresión del resto de Lagrange para aproximarnos al valor de la función por debajo de una cota de error dada, suele aplicarse esta definición como valor absoluto:

$$Error = \left| \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right|$$

Ejemplo

Determinar el desarrollo del polinomio de Taylor de la función $y = e^x$ centrado en el punto $x_0 = 0$, hasta grado 6

Las primeras 6 derivadas en este caso son iguales a e^x:

$y' = y'' = y''' = y^{iv} = y^{v} = y^{vi} = e^x$ que al evaluar en $x_0 = e^0 = 1$

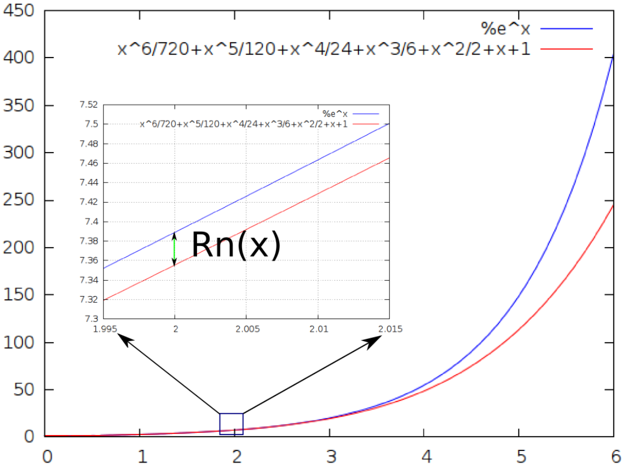
Y por lo tanto llegamos se llega a la siguiente serie de McLaurin:

$$P_6(x) = \sum_{n=0}^{6} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6$$

Aproximar ahora el valor de e^2:

$$P_6(x) = \sum_{n=0}^{6} \frac{f^n(0)}{n!} 2^n = 7.3556$$

Ejemplo (continuación)



Ejemplo (continuación)

Utilizar la expresión del resto para determinar el error de la estimación

$$Rn(x) = \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \Rightarrow R_6(x) = \frac{f^{(7}(\alpha)}{7!}x^7 = \frac{e^{\alpha}}{7!}2^7$$

No conocemos ni e ni α, pero podemos dar cotas superiores:

- No sabemos el valor exacto de e, pero podemos tomar un valor próximo conocido. Tomamos $e = 3$ (sabemos que e no llega a este valor). Se trata de establecer la cota superior más pequeña conocida.
- α debe estar entre 0 y 2 (entre el punto de centrado $(a = 0)$ y el de estimación $(x = 2)$. Tomamos $\alpha = 2$

$$\text{como } e < 3 \text{ y } \alpha < 2 \Rightarrow \frac{e^{\alpha}}{7!}2^7 < \frac{3^2}{7!}2^7 \rightarrow R_6(2) < \frac{3^2}{7!}2^7 \simeq 0.2286$$

Por lo tanto $e^2 = 7.3556 \pm 0.2286 \Rightarrow 7.127 < e^2 < 7.5842$

Ejemplo (continuación)

Determinar el número de términos necesarios para cometer un error < 0.01

Conocemos la expresión del resto $Rn(x) = \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, y los valores $\alpha = 2$ y $e = 3$ indicados anteriormente. Por lo tanto:

$$\frac{e^2}{(n+1)!}2^{(n+1)} = \frac{3^2}{(n+1)!}2^{(n+1)} < 0.01$$

Dado que no se puede despejar el valor de n, se prueba por tanteo. Es sencillo, ya que $n \in \mathbb{N}$:

- Para $n = 7$: $\frac{3^2}{(7+1)!}2^{(7+1)} = \frac{3^2}{8!}2^8 \approx 0.057 > 0.01$, por lo tanto no sirve
- Para $n = 8$: $\frac{3^2}{9!}2^9 \approx 0.013 > 0.01$ (sigue por encima del error deseado)
- Para $n = 9$: $\frac{3^2}{10!}2^10 \approx 0.0025 < 0.01$, por lo que el polinomio debe tener 10 términos para alcanzar el orden 9 de aproximación, quedando por debajo del error indicado:

$$P_{10}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{9!}x^9$$

Polinomio de Taylor. Análisis del error

Ejercicio:

Dada la función $f(x) = \log \ x$, se pide:

1. Desarrollar el polinomio de Taylor de $f(x)$ hasta grado 5, con el fin de estimar el valor de $\log(1.4)$
2. Estimar el error cometido en la estimación empleando la fórmula del resto de Lagrange.
3. Determinar el número de términos del polinomio de Taylor para estimar $\log(1.4)$ con un error menor de 10^{-6}

(Ver *ejemplo2_taylor_lagrange.wxmx*, en Moodle)