Función de varias variables: Máximos, mínimos y puntos de silla Extremos condicionados

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Contenidos

1. Extremos relativos y absolutos
   - Extremos absolutos. Definición
   - Extremos relativos. Definición
2. Puntos críticos
   - Definición
   - Puntos de silla
3. Extremos relativos: procedimiento de cálculo
   - Procedimiento de cálculo
   - Ejemplos
4. Extremos condicionados
   - Definición
   - Multiplicadores de Lagrange
   - Ejemplos

Extremos absolutos

Extremos absolutos. Definición:

Sea $f(x,y)$ una función definida en una región D y sea $(x_0,y_0) \in D$. Se dice que:

- $f(x_0,y_0)$ es una valor máximo absoluto de f en D si:

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y)\ \forall (x,y) \in D$$

- $f(x_0,y_0)$ es una valor mínimo absoluto de f en D si:

$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y)\ \forall (x,y) \in D$$

Extremos relativos

Extremos relativos. Definición:

Sea $f(x,y)$ una función definida en una región D y sea $(x_0,y_0) \in D$. Se dice que:

- $f(x_0,y_0)$ es una valor máximo relativo de f en D si existe un entorno $B(x_0,y_0)$ tal que:

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y)\ \forall (x,y) \in B$$

- $f(x_0,y_0)$ es una valor mínimo relativo de f en D si:

$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y)\ \forall (x,y) \in B$$

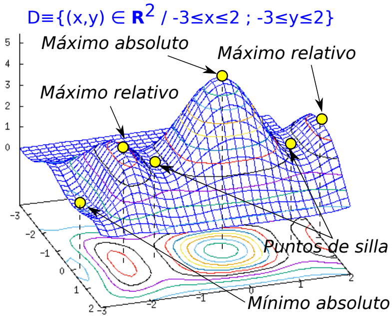
Extremos relativos

Teorema de Weierstrass

Sea $f:\ X \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ continua en X, siendo X un conjunto cerrado y acotado. Entonces, el conjunto $Y = \{f(x)/x \in X\} \subset \mathbb{R}$ posee un máximo y un mínimo, es decir, existen dos puntos x_1 y x_2 pertenecientes a X tales que:

$$\forall x \in X \Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

El Teorema de Weierstrass garantiza la existencia de extremos absolutos para funciones continuas definidas en conjuntos cerrados y acotados



Puntos críticos

Punto crítico. Definición:

Sea $z = f(x, y)$ una función definida en una región D y sea un punto $P(x_0, y_0) \in D$. Se dice que P es un punto crítico si se cumple alguna de las afirmaciones siguientes:

1. $P(x_0, y_0)$ es un *punto de frontera*, es decir, está situado en el contorno de D
2. $P(x_0, y_0)$ es un *punto estacionario*. Por lo tanto, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$, es decir $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$
3. $P(x_0, y_0)$ es un *punto singular*, es decir $\nexists \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ o bien $\nexists \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$

Puntos críticos

Teorema:

Si $f(x_0, y_0)$ es un extremo relativo de f en una región abierta D, entonces el punto (x_0, y_0) es un punto crítico de f.

Condición necesaria para la existencia de extremos de funciones diferenciables. Teorema:

Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable en D. Es condición necesaria para la existencia de un extremo relativo de f en $(x_0, y_0) \in D$ que (x_0, y_0) sea *punto estacionario*, es decir, que verifique que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = 0$$

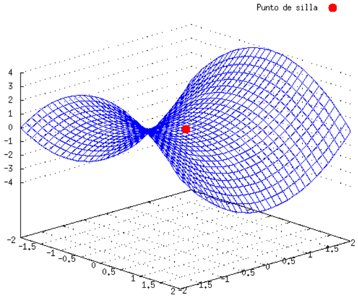
Nota:

El Teorema anterior da una condición necesaria pero no suficiente. Existen puntos estacionarios que no son máximos ni mínimos: *puntos de silla*.

Puntos de silla

Ejemplo:

Es condición necesaria pero no suficiente que el punto $P(x_0, y_0)$ sea estacionario para que P sea un extremo relativo. En la figura, se ilustra un ejemplo. La función $f(x,y) = y^2 - x^2$ determina una superficie en la que el punto $P(0,0)$ es estacionario, y sin embargo no es un extremo relativo (ni máximo ni mínimo).



Punto de silla:

A este tipo de puntos, que son a la vez máximos relativos en una dirección y mínimos relativos en la dirección ortogonal a la primera, se les denomina *puntos de silla*

Extremos relativos. Procedimiento de cálculo por pasos:

1. Cálculo de los puntos críticos, mediante resolución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\}$$

2. Si el punto (x_0, y_0) es un punto crítico, se estudia el valor del determinante *hessiano* (particularizadas las derivadas parciales en (x_0, y_0)):

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

3. El valor del hessiano permite concluir:
   - Si $H > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es *mínimo relativo*
   - Si $H > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es *máximo relativo*
   - Si $H < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es *punto de silla*.
   - Si $H = 0$ el criterio del hessiano *no permite concluir nada*, y será necesario recurrir a otro método (análisis de la gráfica...) para estudiar el comportamiento en el entorno del punto

Cálculo de extremos: Ejemplos

Extremos relativos. Ejemplos:

Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$
2. $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy$
3. $f(x, y) = x^2y^2$
4. $f(x, y) = xye^{x+2y}$
5. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$

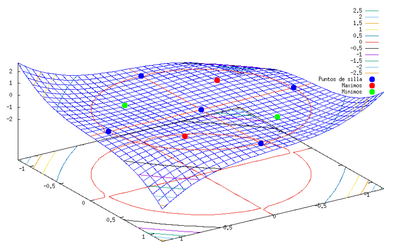
Cálculo de extremos: Ejemplos

Extremos relativos y absolutos. Ejemplo:

Sea $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$

1. Hallar sus extremos relativos en $\mathbb{R}^2$
2. Hallar sus extremos relativos y absolutos en el dominio

$$D \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\right\}$$

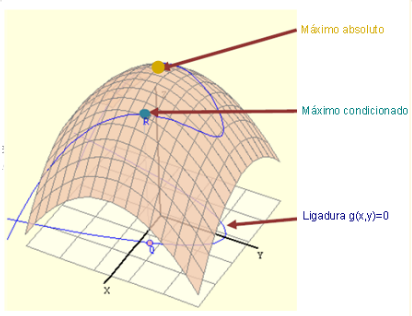


Extremos condicionados

El objetivo es la obtención y clasificación de los *puntos críticos* de una función $f(x, y)$ (un campo escalar de dos variables en este caso), *sujetos a una restricción*.

Extremo relativo condicionado a una curva en el plano:

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donde U es un conjunto abierto y sea $g(x, y) = 0$ una curva definida en U. Sea (x_0, y_0) un punto de la curva tal que $g(x_0, y_0) = 0$
Se dice que f alcanza un *extremo relativo condicionado* a $g(x, y) = 0$ si existe un entorno de (x_0, y_0) de modo que para todo punto (x, y) perteneciente a dicho entorno tal que $g(x, y) = 0$ se verifica que:



Fuente: Elena Álvarez (2013)
`https://personales.unican.es/alvareze/Descartes/ExtremosCondicionados-JS/index.html`

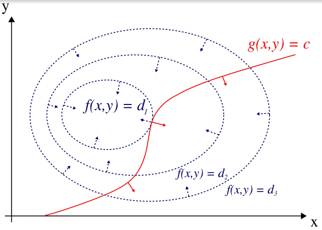
$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (Máximo relativo), o bien $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ (Mínimo relativo)

Multiplicadores de Lagrange

Para encontrar la curva adecuada se usa la idea de que dos curvas son tangentes en un punto si y sólo si *sus vectores gradiente son paralelos*, y por lo tanto:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

Al escalar λ se le conoce como multiplicador de Lagrange



Source: `https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier#/media/File:LagrangeMultipliers2D.svg`

Teorema de Lagrange

Sean f y g funciones con primeras derivadas parciales continuas (tipo C^1), y tales que f tiene un extremo en un punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de restricción $g(x,y) = c$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

Multiplicadores de Lagrange

Método de los multiplicador es de Lagrange

Sean f y g funciones que satisfacen las hipótesis del Teorema de Lagrange, y sea f una función que tiene un máximo o un mínimo sujeto a la restricción $g(x, y) = c$. Para hallar el mínimo o el máximo de f, se siguen los siguientes pasos:

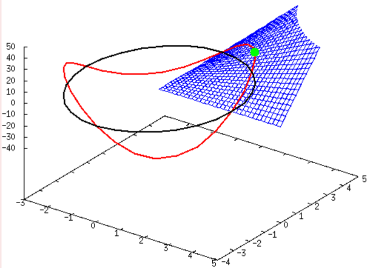
1. Resolver simultáneamente las ecuaciones $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ y $g(x, y) = c$, resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{rcl} f_x(x,y) & = & \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) & = & \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) & = & c \end{array}$$

2. Evaluar f en cada punto solución obtenido en el primer paso. El valor mayor da el máximo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$, y el valor menor da el mínimo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$

Ejemplos

1. Hallar el valor máximo de $f(x,y) = 4xy$ donde $x > 0$ y $y > 0$, sujeto a la restricción $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$



2. Encuentra los extremos de la función $f(x,y) = 49 - x^2 - y^2$ sujetos a la condición $x + 3y - 10 = 0$