

Función Real de una Variable Real

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria



Contenidos

1 Introducción

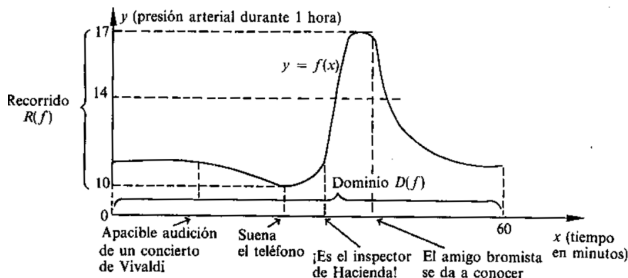
- Variables y funciones
- Operaciones con funciones
- Otras propiedades de funciones

2 Funciones elementales

- Función racional
- Función exponencial
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas circulares y sus inversas
- Funciones hiperbólicas y sus inversas

Función real

- Se llama función real de variable real a toda función definida de un subconjunto $D \subset \mathbb{R}$, en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, tal que a cada elemento de una variable $x \in D$ le corresponde *uno y sólo un* elemento $y \in \mathbb{R}$.
- $f : C \mapsto \mathbb{R}$. Suele denotarse como $y = f(x)$
- Decimos que y es función de la variable x , con *Dominio* o *Campo de Definición* $D(f) := D$.
- La **gráfica** de f consta de los pares ordenados $(x, f(x))$, $x \in D$, representados en un plano de coordenadas cartesianas x, y



*Abellanas, L. y Galindo, A. (1990).
Métodos de Cálculo. 1ª Ed.
McGraw-Hill.
414pp.

Concepto de *aplicación*

Decimos que:

$$\begin{aligned} f &: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \in A &\rightarrow f(x) \in B \end{aligned}$$

es una **función real de variable real** si:

① $\forall x \in A \exists y \in B \mid y = f(x)$

Todos los elementos de A tienen su correspondiente en B

② $x_1 \in A \longrightarrow \nexists y_1 \neq y_2 \mid y_1 = f(x_1); y_2 = f(x_1)$

La imagen es única

$$\begin{aligned} f &: x \in A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y = \pm\sqrt{x} \end{aligned}$$

f no es una función real de variable real a no haber **unicidad de imagen**. Se trata de una *función multiforme* o *multivaluada*.

Definiciones

Dominio $D(f)$

Conjunto $A \subset \mathbb{R}$ en el que se define la aplicación

Imagen $Im(f)$ ó $R(f)$

Conjunto $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$

Imagen $\equiv$ Rango $\equiv$ Recorrido

Gráfica $G(f)$

Conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\}$

Igualdad

Igualdad de funciones

Sean dos funciones f y g :

$$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

$$g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = g(x)$$

- se dice que **son iguales** ($f = g$), si $\forall x \in A \Rightarrow f(x) = g(x)$
- Han de tener el mismo dominio de definición ($D_f \equiv D_g$) y el mismo rango ($Im_f \equiv Im_g$).

Suma y diferencia

Definición

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \text{con dominio} \quad D(f) \cap D(g)$$

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$:

- 1 Definir $f + g$

$$f + g = f(x) + g(x) = \frac{3}{x-2} + \sqrt{x}$$

- 2 Estudiar su dominio:

$$D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D(g) = [0, \infty)$$

$$\Rightarrow D(f + g) = D(f) \cap D(g) = [0, 2) \cup (2, \infty)$$

Producto

Definición

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \text{con dominio} \quad D(f) \cap D(g)$$

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$:

- 1 Definir $f \cdot g$

$$fg = f(x)g(x) = \frac{3\sqrt{x}}{x-2}$$

- 2 Estudiar su dominio:

$$D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D(g) = [0, \infty)$$

$$\Rightarrow D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = [0, 2) \cup (2, \infty)$$

Cociente

Definición

$$(f/g)(x) := f(x)/g(x) \quad \text{con dominio} \quad D(f) \cap D(g) - \{\text{ceros de } g(x)\}$$

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$:

- 1 Definir f/g

$$f/g = f(x)/g(x) = \frac{\frac{3}{x-2}}{\sqrt{x}}$$

- 2 Estudiar su dominio:

$$D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D(g) = [0, \infty)$$

$$g(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 0$$

$$\Rightarrow D(f/g) = D(f) \cap D(g) - \{2\} = (0, 2) \cup (2, \infty)$$

Composición

Definición

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad \text{con dominio} \quad \{x \in D(g) \text{ t.q. } g(x) \in D(f)\}$$

La composición de funciones **no es conmutativa**, pero **sí asociativa**

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$:

- 1 Definir $f \circ g$

$$f \circ g = f(g(x)) = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$$

- 2 Estudiar su dominio:

$$D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D(g) = [0, \infty)$$

$$D(f \circ g) = [0, \infty) - \{4\}$$

Ejercicios

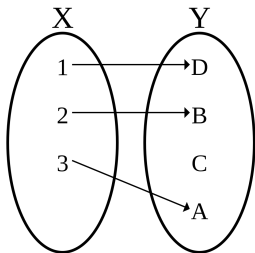
- 1 Determinar el dominio de definición de las funciones:
 - a $f(x) = \arccos \frac{x+1}{x^2+1}$
 - b $g(x) = \log \left(\sqrt[5]{\frac{x^2+x+3}{x^2+1}} - 1 \right)$
- 2 Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \log x$ y $k(x) = \tan x$
 - a Hallar las expresiones explícitas de: $(g \circ k)(x)$, $(h \circ f \circ f)(x)$, $(k \circ f \circ g)(x)$
 - b Expresar las siguientes funciones como composición de alguna de las funciones f , g , k , h :
 e^{x^2} , $\tan(\log x^2)$, $e^{\tan x^2}$
- 3 Dadas $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ y $g(x) = \sin x$, determinar $f \circ g$ y su dominio, considerando el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$

Función inyectiva

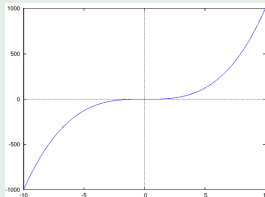
Definición

Una función $f : X \mapsto Y$ es **inyectiva** si a elementos distintos del conjunto X (dominio, $D(f)$) les corresponden elementos distintos en el conjunto Y (recorrido, $R(f)$) de f . Simbólicamente:

$$\forall a, b \in X, f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$



Ejemplo: $f(x) = x^3$

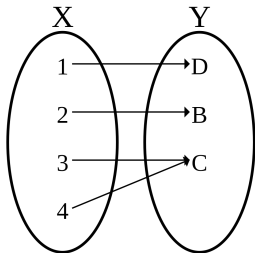


Función sobreyectiva (*sin*: epiyectiva, suprayectiva, suryectiva)

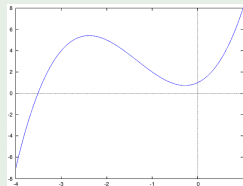
Definición

Una función $f : X \mapsto Y$ es **sobreyectiva** si está aplicada sobre todo el recorrido, es decir, cuando cada elemento de Y es la imagen de como mínimo un elemento de X . Simbólicamente:

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{t.q.} \quad f(x) = y$$



Ejemplo: $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

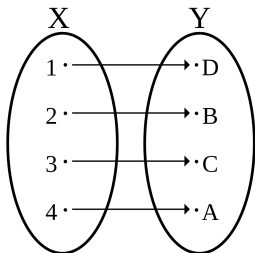


Función biyectiva

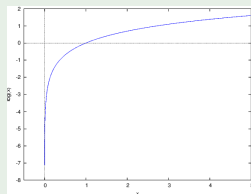
Definición

Una función $f : X \mapsto Y$ es **biyectiva** si es al mismo tiempo **inyectiva** y **sobreyectiva**; es decir, si todos los elementos del conjunto X tienen una imagen distinta en el conjunto Y , y a cada elemento del conjunto Y le corresponde al menos un elemento del conjunto X . Simbólicamente:

$$\forall y \in Y : \exists ! x \in X \text{ t.q. } f(x) = y$$



Ejemplo: $f(x) = \log x$



Función inversa

Definición

La función inversa de una función **inyectiva** f en un dominio D es una función que se denotará como f^{-1} , que cumple:

$$\forall y \in Im(f) \quad f^{-1}(y) = x, \text{ siendo } f(x) = y$$

Propiedades

- 1 $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x$
- 2 Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante
- 3 $D(f^{-1}) = Im(f)$ y $Im(f^{-1}) = D(f)$
- 4 Si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, lo mismo ocurrirá con f^{-1}

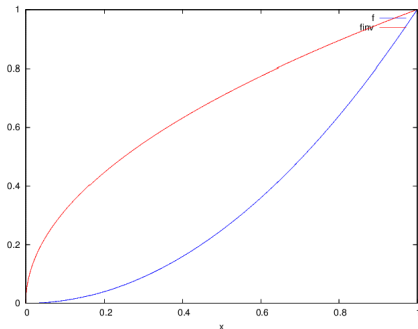
Ejemplo

La función $f(x) = x^2$ (definida en $[0, +\infty)$) tiene por función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ($\forall x \in [0, \infty)$), ya que se verifica que:

- $(f \circ f^{-1})(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(x^2) = (\sqrt{x^2}) = x$

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=x**2;  
--> finv(x):=sqrt(x);  
--> plot2d([f,finv],[x,0,1])
```



Ejercicios

- 1 Estudiar si $f(x) = |x|$ es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva en los siguientes casos:
 - a $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - b $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 - c $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 - d $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
- 2 Sea la función $f(x) = \frac{2x+3}{5x-1}$. Se pide:
 - Determinar la existencia de f^{-1}
 - Calcular en su caso f^{-1}
 - Demostrar la validez del resultado anterior mediante composición de funciones

Función acotada superiormente

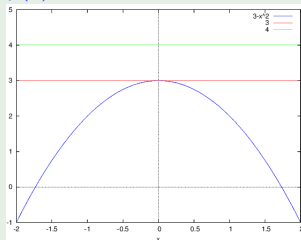
Definición

f es una función **acotada superiormente** si existe un número real K tal que $f(x) \leq K$

- Al valor K se le denomina **cota superior** de $f(x)$.
- Cualquier número $K' \geq K$, también es una cota superior de $f(x)$ (forma parte del conjunto de cotas superiores de la función).
- Si lo interpretamos geométricamente, quiere decir que toda la gráfica de la función se encuentra debajo de la recta $y = K$

Ejemplo

$$f(x) = -x^2 + 3 \quad K = 3 \quad K' = 4$$



Función acotada inferiormente

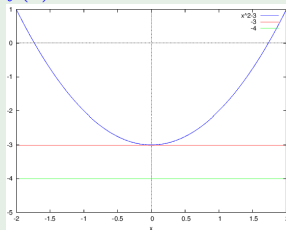
Definición

f es una función **acotada inferiormente** si existe un número real k tal que $f(x) \geq k$

- Al valor K se le denomina **cota inferior** de $f(x)$.
- Cualquier número $k' \leq k$, también es una cota inferior de $f(x)$. es decir, forma parte del conjunto de cotas inferiores de la función.
- Si lo interpretamos geométricamente, quiere decir que toda la gráfica de la función se encuentra debajo de la recta $y = k$

Ejemplo

$$f(x) = x^2 - 3 \quad k = -3 \quad k' = -4$$



Función acotada

Definición

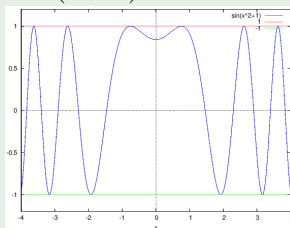
f es una función **acotada** cuando está acotada inferior y superiormente, es decir, cuando

$\exists(k, K) \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq f(x) \leq K, \forall x \in D(f)$

- k/K son cota inferior/superior de $f(x)$.
- Si lo interpretamos geométricamente, quiere decir que toda la gráfica de la función se encuentra entre las rectas $y = K$ e $y = k$

Ejemplo

$f(x) = \sin(1 + x^2)$ $k = -1$ $K = 1$



Extremo relativo o local

Definición

- Si existe

$$\{E(x_1, r_1) \setminus E(x_2, r_2)\} \quad \text{tal que es:}$$

$$f(x) \leq f(x_1) \setminus f(x) \geq f(x_2) \quad \forall x \in \{E^*(x_1, r_1) \setminus E^*(x_2, r_2)\}$$

se dice que la función tiene un **máximo** $\setminus$ **mínimo** relativo o local en $\{x_1 \setminus x_2\}$ en sentido *amplio*.

- Si en vez de ser $\{\leq \setminus \geq\}$ es $\{< \setminus >\}$, entonces se dice que la función tiene un **máximo** $\setminus$ **mínimo** relativo en sentido *estricto*.

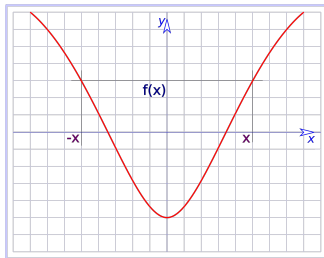
Función par

Definición

Una **función par** satisface la relación $f(x) = f(-x)$, y si x es del dominio de f , entonces $-x$ también. Formalmente, una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, es par para $x \in \mathbb{R}$ si cumple:

$$f(-x) = f(x)$$

- Desde un punto de vista geométrico, una función par es simétrica con respecto al eje y
- Ejemplos típicos son la función valor absoluto, x^n , para n entero y par ...



Función impar

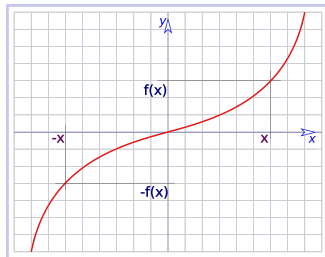
Definición

Una **función impar** satisface la relación

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f) \quad \text{o dicho de otro modo:}$$

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D(f)$$

- Desde un punto de vista geométrico, una función impar posee una *simetría rotacional* con respecto al origen de coordenadas.
- Ejemplos típicos son la función $\sin x$, x^n para n entero e impar ...



Álgebra de funciones pares/impares

Propiedades

- La suma de dos funciones pares es otra función par
- La suma de dos funciones impares es otra función impar
- El producto de dos funciones pares es otra función par
- El producto de dos funciones impares es otra función par
- El cociente de dos funciones pares es otra función par
- El cociente de dos funciones impares es otra función par
- El producto o el cociente de dos funciones, una par y la otra impar, es otra función impar

Simetría

Ejemplos:

Estudiar la simetría de las siguientes funciones:

- $y = \tan x - x$
- $y = \cos x + \sen^2 x$
- $y = |\sen x|$
- $y = \frac{x^3+x+2}{x^4+1}$

Función periódica

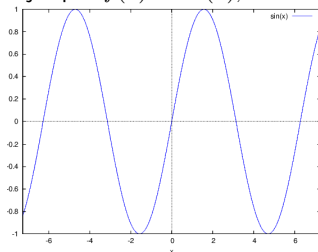
Definición

Es aquella que vuelve a tomar el mismo valor, cuando la variable aumenta o disminuye en una cantidad constante, que se llama **período** (T):

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \dots = f(x + nT), \quad n \in \mathbb{N}$$

- Generalmente, se llama período al menor número real positivo T que satisface la condición.
- Si es periódica de período $T \in \mathbb{R}$, también lo es de período $k \times T$, $k \in \mathbb{N}$

Ejemplo: $f(x) = \sin(x)$, $T = 2\pi$



Ejemplo:

Sea una función real de variable real definida en todo $\mathbb{R}$, y tal que 1 no pertenece al conjunto imagen. Además, $\exists a \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

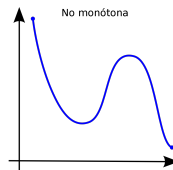
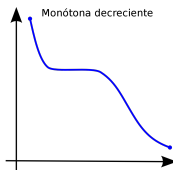
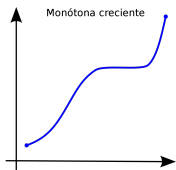
Se pide demostrar que es periódica, y calcular su periodo.

Función monótona

Definiciones

Sea una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

- f es **monótona** si y sólo si $x_1 \leq x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$, es decir, la función es **creciente**, o bien si $x_1 \leq x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$ es decir, la función es **decreciente**. En otras palabras, *una función es monótona si conserva el orden*.
- f es **estrictamente creciente** si $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$
- f es **estrictamente decreciente** si $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$



Funciones definidas a trozos

Determinar dominio e imagen. Representar gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

MAXIMA tip:

Definiremos las funciones a tramos utilizando estructuras if-then-else:

```
f(x):= if x<=-1 then x^2 + 2*x else if x<=1 then sqrt(x) else -1
```

Función elemental. Definición:

Llamaremos **funciones elementales** (reales) a las construibles mediante un número finito de operaciones de suma, diferencia, producto, cociente y composición a partir de las siguientes familias:

- 1 Polinómicas
- 2 Racionales
- 3 Potenciales
- 4 Exponenciales
- 5 Logarítmicas
- 6 Algebraicas
- 7 Trigonométricas (o circulares)
- 8 Trigonométricas inversas
- 9 Hiperbólicas
- 10 Hiperbólicas inversas

Veremos a continuación algunos ejemplos de funciones elementales y sus propiedades

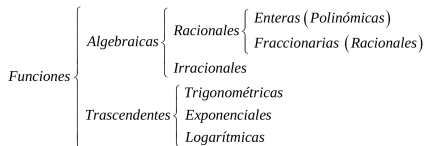
$$\text{Ejemplo: } F(x) = \frac{e^{\tan x}}{1-x^2} \operatorname{sen} \left(\sqrt{1 + \log^2 x} \right)$$

Se trata de una **función elemental**, porque puede obtenerse recursivamente a partir de funciones elementales:

- $f_1(x) = \tan x$
- $f_3(x) = x^2$
- $f_5(x) = \sqrt{x}$
- $f_2(x) = e^x$
- $f_4(x) = \log x$
- $f_6(x) = \sin x$

Aplicando suma, diferencia, cociente, producto y composición:

- ① $g_1(x) = f_1(x) = \tan x \rightarrow g_2(x) = (f_2 \circ f_1)(x) = e^{\tan x}$
- ② $g_3(x) = \frac{g_2(x)}{1-f_3(x)} = \frac{(f_2 \circ f_1)(x)}{1-f_3(x)} = \frac{e^{\tan x}}{1-x^2}$
- ③ $h_1(x) = f_4(x) \rightarrow h_2(x) = f_3(h_1(x)) = (f_3 \circ f_4)(x) = \log^2 x$
- ④ $h_5(x) = f_6(h_4(x)) = (f_6 \circ h_4)(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1 + \log^2 x})$
- ⑤ $F(x) = g_3(x) \cdot h_5(x)$



- **Algebraicas:** La variable x está afectada por alguna de las operaciones con funciones
- **Polinómicas**(o *racionales enteras*), son de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \\ a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$$

- **Racionales**(o *racionales fraccionarias*), son cociente de dos funciones polinómicas:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

- **Irracionales:** La x aparece bajo una raíz o elevada a exponente racional no entero.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad , \quad g(x) = \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{2 + 2x}}$$

- **Trascendentes** : Aquellas que no son algebraicas (trigonómicas, exponenciales, logarítmicas. . .)

$$f(x) = \sin x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = e^{3x} \quad , \\ h(x) = \log x^2 - 4 \quad , \dots$$

Definición

- Son funciones racionales aquellas que son **cociente de dos polinomios**: $\frac{p(x)}{q(x)}$
- Se habla de **racional propiamente dicha**, o **fracción propia** si el grado del polinomio del numerador **es menor** que el grado del polinomio del denominador.
- Las funciones racionales no están definidas en aquellos puntos en los que la función del denominador se anula, es decir, en las raíces de $q(x)$.

Solo se estudiarán las funciones racionales propiamente dichas, con
 $\text{grado de } p(x) < \text{grado de } q(x)$

Descomposición en fracciones simples

Descomposición en fracciones simples:

- El método de descomposición en fracciones simples consiste en descomponer una **fracción propia** en una suma de fracciones de polinomios de menor grado.
- Se utiliza principalmente en cálculo integral, aunque puede ser una técnica de utilidad en otros contextos.
- De forma general, pueden calcularse los factores lineales o cuadráticos resolviendo un sistema de ecuaciones.

Importante:

Sólo se aplicará el método de descomposición en fracciones simples en funciones racionales propiamente dichas, con

$$\text{grado de } p(x) < \text{grado de } q(x)$$

Descomposición en fracciones simples

Casos:

- 1 Factores lineales únicos. Todas las raíces de $q(x)$ reales y simples
- 2 Factores lineales repetidos. Todas las raíces de $q(x)$ reales, algunas repetidas
- 3 Factores cuadráticos únicos. Hay raíces reales, simples o múltiples, y complejas simples (la ecuación cuadrática resultante no tiene raíces reales).
- 4 Factores cuadráticos repetidos. Hay raíces reales y complejas, tanto simples como múltiples.

Nótese que si una ecuación tiene como raíz $z \in \mathbb{C}$, también tiene como raíz a su conjugado $\bar{z}$ (recuérdese el Teorema Fundamental del Álgebra). En la descomposición en factores, aparecerá un término de la forma:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a)^2 + b^2]$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo Caso 1: Factores de $q(x)$ lineales únicos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{5(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{5} \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2)$$

En la igualdad anterior, se hace sucesivamente $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$, obteniéndose el valor de A , B y C :

- $x = -1 \Rightarrow -1 - 1 = A(-1 - 2)(-1 - 3) \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$
- $x = 2 \Rightarrow 2 - 1 = B(2 + 1)(2 - 3) \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$
- $x = 3 \Rightarrow 3 - 1 = C(3 + 1)(3 - 2) \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{5} \left[\frac{-1}{6(x+1)} - \frac{1}{3(x-2)} + \frac{1}{2(x-3)} \right]$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo Caso 2: Factores de $q(x)$ lineales repetidos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{5(x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{5} \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \right] \rightarrow$$
$$\rightarrow x-1 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

En la igualdad anterior, se hace sucesivamente $x = -1$ y $x = 2$, obteniéndose el valor de A y C :

- $x = -1 \rightarrow -1 - 1 = A(-1 - 2)^2 \rightarrow A = -\frac{2}{9}$
- $x = 2 \rightarrow 2 - 1 = C(2 + 1) \rightarrow C = \frac{1}{3}$

Resta por determinar B , que puede obtenerse conocidos A y C

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{5} \left[\frac{-2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)} + \frac{1}{3(x-2)^2} \right]$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo Caso 3: Factores de $q(x)$ cuadráticos únicos

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 0} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 = A(x^2 + 1) + (Mx + N)x \Rightarrow\end{aligned}$$

En la igualdad anterior, se hace sucesivamente $x = 0$ y $x = 1$ y $x = -1$, obteniéndose el valor de A , M y N :

- Si $x = 0 \Rightarrow 1 = A$
- Si $x = 1 \Rightarrow M + N = -1$
- Si $x = -1 \Rightarrow M - N = -1$

Resolviendo, se obtiene que $A = 1$, $M = -1$, $N = 0$, y por lo tanto:

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 1}$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo Caso 4: Factores de $q(x)$ cuadráticos repetidos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 + x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Mx + N}{x^2 + 4} + \frac{Px + Q}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\text{Operando: } x^3 + x^2 + 5x + 4 &= (Mx + N)(x^2 + 4) + Px + Q \\ \Rightarrow x^3 + x^2 + 5x + 4 &= Mx^3 + 4Mx + Nx^2 + 4N + Px + Q\end{aligned}$$

Igualando términos, se obtiene:

$$\Rightarrow \begin{cases} Mx^3 = x^3 \Rightarrow M = 1 \\ Nx^2 = x^2 \Rightarrow N = 1 \\ 4Mx + Px = 5x \Rightarrow P = 1 \\ 4N + Q = 4 \Rightarrow Q = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x + 1}{x^2 + 4} + \frac{x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{x^2 + 4} + \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{x}{(x^2 + 4)^2}$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplos con MAXIMA

La función `partfrac` (*"partial fractions"*) se utiliza para la descomposición en fracciones simples:

- Ejemplo 1:

```
(%i1) (x-1)/(5*(x+1)*(x-2)*(x-3));
```

```
(%i2) partfrac(%, x);
```

- Ejemplo 2:

```
(%i3) (x-1)/(5*(x+1)*(x-2)^2);
```

```
(%i4) partfrac(%, x);
```


Función exponencial: propiedades

$$y = e^x$$

Dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$

Imagen $Im(f) = (0, \infty)$

Cotas Acotada inferiormente
por 0

Injectividad No es sobreyectiva

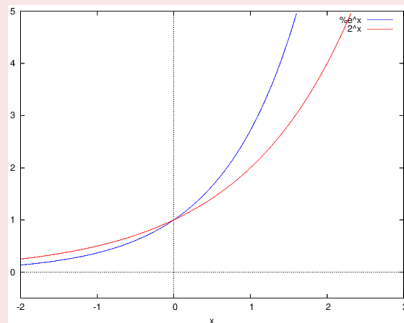
Simetría No es par ni impar

Periodicidad No es periódica

Crecimiento Monótona,
estrictamente creciente

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=exp(x);  
--> f1(x):=2**x;  
--> plot2d([f(x),f1(x)],  
           [x, -2, 3],[y,-.5,5])
```



Función logarítmica: propiedades

$$y = \ln x$$

Dominio $Dom(f) = (0, \infty)$

Imagen $Im(f) = \mathbb{R}$

Cotas No acotada

Injectividad biyectiva (inyectiva y sobreyectiva)

Inversa $y = e^x$

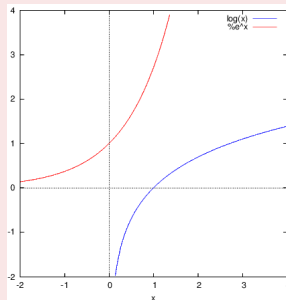
Simetría No es par ni impar

Periodicidad No es periódica

Crecimiento Monótona,
estrictamente creciente

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=log(x);  
--> f1(x):=exp(x);  
--> plot2d([f(x),f1(x)],  
           [x,-2,4], [y,-2,4],  
           [same_xy]);
```



Ejercicio

Sean a, b, c tres números reales positivos, distintos de la unidad. Considérense las dos funciones definidas para $x > 0$ mediante:

$$f_1(x) = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} \quad , \quad f_2(x) = \frac{1}{\log_{abc} x}$$

¿Son la misma función?

Función seno: propiedades

$$y = \sin x$$

Dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$

Imagen $Im(f) = [-1, 1]$

Cotas Acotada (inferiormente por -1, sup. por 1)

Inyectividad No inyectiva, no sobreyectiva

Simetría impar

Periodicidad periódica ($T = 2\pi$)

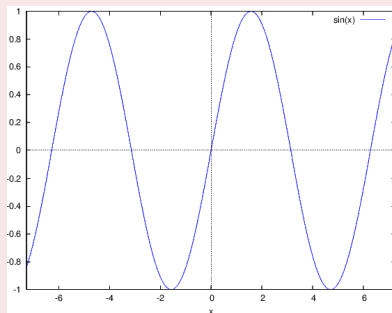
Crecimiento No monótona

Nota:

Restringiéndose al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, si es inyectiva ($\Rightarrow$ se puede definir su inversa) y es monótona estrictamente creciente

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=sin(x);  
--> plot2d(f(x), [x,-2*%pi,2*%pi],  
           [y,-1,1]);
```



Función arcoseno: propiedades

$$y = \arcsin x$$

Dominio $Dom(f) = [-1, 1]$

Imagen $Im(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Cotas Acotada (inferiormente por $-\frac{\pi}{2}$, sup. por $\frac{\pi}{2}$)

Injectividad Es inyectiva, no es sobreyectiva

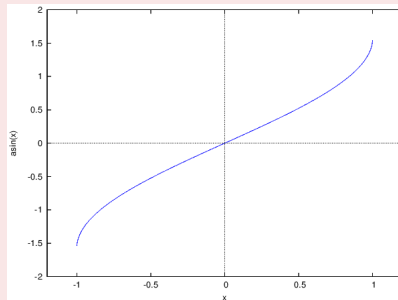
Simetría impar

Crecimiento Monótona estrictamente creciente

Periodicidad No es periódica

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=asin(x);  
--> plot2d(f(x), [x,-1.2,1.2])
```



Función coseno: propiedades

$$y = \cos x$$

Dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$

Imagen $Im(f) = [-1, 1]$

Cotas Acotada inferiormente
por -1, sup. por 1

Inyectividad No inyectiva, no
sobreyectiva

Simetría impar

Periodicidad Periódica ($T = 2\pi$)

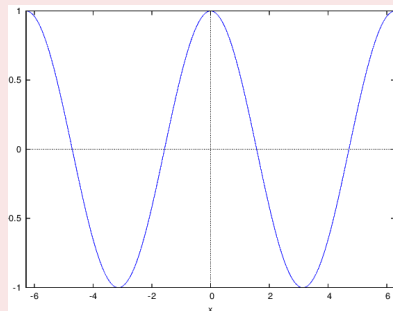
Crecimiento No monótona

Nota:

Restringiéndose al intervalo $[0, \pi]$, si es
inyectiva ($\Rightarrow$ se puede definir su inversa)
y es monótona estrictamente decreciente

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=cos(x);  
--> plot2d(f(x), [x, -2*%pi, 2*%pi]);
```



Función arcocoseno: propiedades

$$y = \arccos x$$

Dominio $Dom(f) = [-1, 1]$

Imagen $Im(f) = [0, \pi]$

Cotas Acotada (inferiormente por 0, sup. por π)

Injectividad Inyectiva, no sobreyectiva

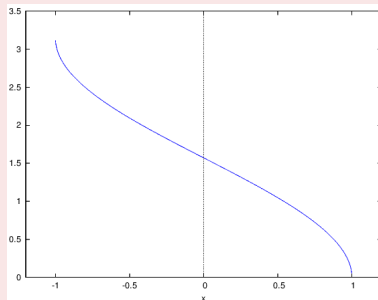
Simetría Es impar

Periodicidad No es periódica

Crecimiento Monótona estrictamente decreciente

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=acos(x);  
--> plot2d(f(x), [x,-1.2,1.2])
```



Función tangente: propiedades

$$y = \tan x$$

Dominio $Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Imagen $Im(f) = \mathbb{R}$

Cotas No está acotada

Inyectividad No es inyectiva. Es suprayectiva.

Simetría Es impar.

Periodicidad Es periódica ($T = \pi$)

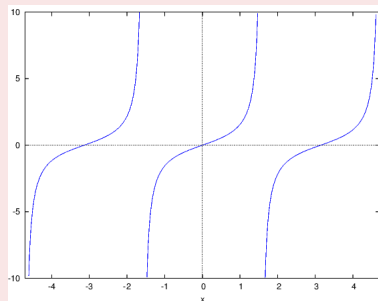
Crecimiento No es monótona

Nota:

Restringiéndose al intervalo $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, si es inyectiva ($\Rightarrow$ se puede definir su inversa) y es monótona estrictamente creciente

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=tan(x);  
--> plot2d(f(x),  
           [x,-3*%pi/2,3*%pi/2],  
           [y,-10,10])
```



Función arcotangente: propiedades

$$y = \arctan x$$

Dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$

Imagen $Im(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Cotas Acotada, inferiormente por $-\frac{\pi}{2}$ y sup. por $\frac{\pi}{2}$

Inyectividad inyectiva, no suprayectiva.

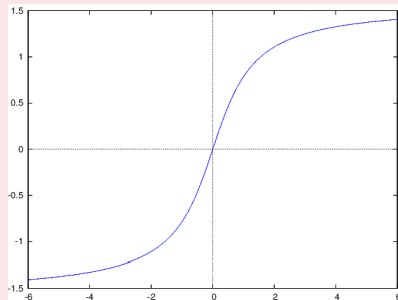
Simetría Es impar.

Periodicidad no periódica

Crecimiento Monótona estrictamente creciente

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=atan(x);  
--> plot2d(f(x), [x,-6,6])
```



Ejercicio:

Calcular los ángulos que satisfacen la ecuación:

$$3 \tan x + 5 \cos^2 x = 7$$

Función seno hiperbólico: propiedades

$$y = \sinh x$$

Dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$

Imagen $Im(f) = \mathbb{R}$

Cotas No Acotada

Inyectividad Biyectiva

Simetría impar

Periodicidad No es periódica

Crecimiento Monótona
estrictamente creciente

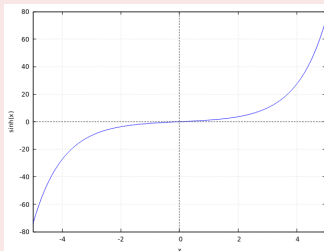
Nota:

Se define como la siguiente combinación lineal de la **función exponencial**:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=sinh(x);  
--> plot2d(f(x), [x,-5,5]);
```



Función coseno hiperbólico: propiedades

$$y = \cosh x$$

Dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$

Imagen $Im(f) = [1, +\infty)$

Cotas $k = 1$

Inyectividad No es inyectiva ni
sobreyectiva

Simetría par

Periodicidad No es periódica

Crecimiento No es monótona

Nota:

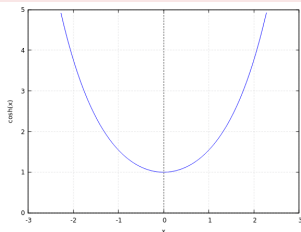
Se define como la siguiente combinación
lineal de la **función exponencial**:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=cosh(x);
```

```
--> plot2d(f(x), [x, -3, 3], []);
```



Función tangente hiperbólica: propiedades

$$y = \tanh x$$

Dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$

Imagen $Im(f) = (-1, 1)$

Cotas $k = -1, K = 1$

Inyectividad Inyectiva, no
suprayectiva

Simetría Impar

Periodicidad No es periódica

Crecimiento Monótona e. c.

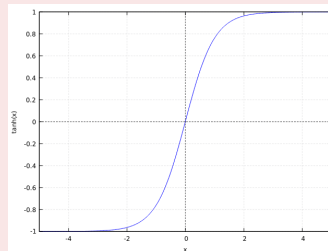
Nota:

Se define como la siguiente combinación lineal de la **función exponencial**:

$$y = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Ejemplo con MAXIMA

```
--> f(x):=tanh(x);  
--> plot2d(f(x), [x,-5,5]);
```



Funciones hiperbólicas recíprocas

- Cotangente hiperbólica (recíproca de $\tanh x$):

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

- Cosecante hiperbólica (recíproca de $\sinh x$): $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$

- Secante hiperbólica (recíproca de $\cosh x$): $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$

Relaciones fundamentales

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(a \pm b) = \sinh a \cdot \cosh b \pm \cosh a \cdot \sinh b$
- $\cosh(a \pm b) = \cosh a \cdot \cosh b \pm \sinh a \cdot \sinh b$
- $\cosh^2 a = \frac{1 + \cosh 2a}{2}$, $\sinh^2 a = \frac{\cosh 2a - 1}{2}$
- $\tanh a \pm b = \frac{\tanh a \pm \tanh b}{1 \pm \tanh a \cdot \tanh b}$

Nótese resaltadas
en rojo aquellas
diferencias
reseñables con las
fórmulas
trigonométricas

Funciones hiperbólicas inversas

Formas alternativas:

- $\operatorname{argsenh} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$
- $\operatorname{argcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- $\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Las funciones trigonométricas inversas presentan formas analíticas alternativas.

Ejemplo: $\operatorname{argsenh}(x)$

Por ejemplo, en el caso del $\sinh x$, operando se tiene que:

$$y = \sinh x \Rightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^{2x}} \quad \text{Despejando } x:$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Ejercicio

Calcular $\cosh 3x$ en función de $\cosh x$ y de $\sinh x$