Función de varias variables
Límite y Continuidad

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Contenidos

Función de varias variables. Introducción

Introducción

Hasta ahora, se ha trabajado con funciones de la forma, p.ej., $f(x) = x^2$, donde $x \in \mathbb{R}$, y que se denotan como:

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

Puede generalizarse esta idea a funciones de más de una variable:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

Ejemplos:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2y, x+y, 2x) \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \mapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (xyz, x+y) \end{array}$$

Función de varias variables. Introducción

Casos:

Por lo tanto, dada la expresión general $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, se dan los siguientes casos:

- $n = 1, m = 1$ Función real de una variable real
- $n > 1, m = 1$ Función real de variable vectorial, o función real de varias variables reales, o función escalar de varias variables.
- $n > 1, m > 1$ Función vectorial de variable vectorial

Dominio e imagen

- $X = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \in \mathbb{R}^m\}$, es el campo o dominio de definición
- $Y = \{y \in \mathbb{R}^m \ / \ y = f(x), \ x \in \mathbb{R}^n\}$, es el conjunto imagen

Nota:

En lo sucesivo en este tema, trabajaremos de forma casi exclusiva con funciones escalares definidas en $\mathbb{R}^2$, resultando inmediata su generalización a $\mathbb{R}^n$

Campo de definición

Definición

El campo de definición de una función se define como el conjunto de puntos que tienen imagen

Cálculo del campo de definición. Ejemplos:

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2 - 4}$
3. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
4. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{4 - y^2}$
5. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{\log x^2}$

Campo de definición en funciones vectoriales

Estrategia de cálculo:

El dominio de una función vectorial se calcula como la intersección de los dominios

Ejemplo:

Obtener el dominio de definición de

$$f:\ X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ ,\ f = \left(\frac{x^2+y^2}{1+x+y}, \sqrt{x^2+y^2}\right) \equiv (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

Se determinan los dominios de f_1 y f_2 por separado:

- $Df_1 = \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x+y \neq -1$
- $Df_2 = \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ Por lo tanto, el campo de definición de la función:

$$Df = \mathbb{R}^2 \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x+y \neq -1\right\}$$

Campo escalar

Función o campo escalar. Definición:

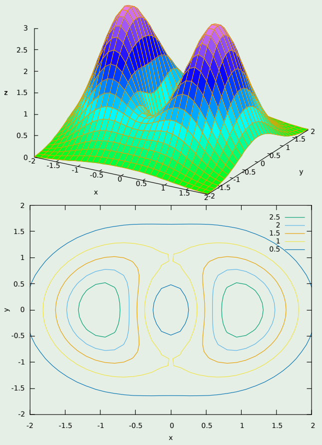
Se denomina función escalar (o campo escalar) real de n variables reales, a cualquier $f : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tal que a cada $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \; D$ se le asocia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Gráfica del campo escalar. Definición:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z = f(x, y) \in \mathbb{R},\; (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

Si se corta dicha superficie por planos $z = k_i$ se obtienen curvas de nivel $k_i = f(x, y)$, que se representan en el plano $z = 0$.

$z = (3x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$



Entornos en el plano: Discos

Disco en $\mathbb{R}^2$. Definición:

Aplicando la ecuación de la distancia entre dos puntos (x, y), (x_0, y_0) en el plano, se define el entorno δ de (x_0, y_0) como un disco con radio $\delta > 0$ centrado en (x_0, y_0):

Disco abierto: $\left\{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$

Disco cerrado: $\left\{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta\right\}$

Región abierta/cerrada. Puntos interiores y puntos frontera

- Un punto (x_0, y_0) en una región R del plano es un punto interior de R si existe un entorno δ de (x_0, y_0) que esté contenido completamente en R
- Si todo punto de R es interior de R, entonces R es una región abierta
- Un punto (x_0, y_0) es un punto frontera de R si todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos dentro de R y puntos fuera de R.
- Por definición, R debe contener sus puntos interiores, pero no necesariamente sus puntos frontera.
- Si una región contiene a todos sus puntos frontera, R es una región cerrada
- Una región que contiene algunos de sus puntos frontera, pero no todos, no es ni abierta ni cerrada

Definición del límite de una función de 2 variables

Definición:

Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto posiblemente en x_0, y_0, y sea L un número real. Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

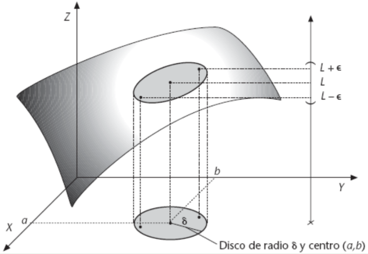
$$\left| f(x,y) - L \right| < \epsilon$$

siempre que:

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

Gráficamente:

La definición implica que para todo punto $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ en el disco de radio δ, el valor de $f(x,y)$ está entre $L-\epsilon$ y $L+\epsilon$



La existencia del límite en una variable requiere la aproximación a dicho límite por dos direcciones. En dos variables la idea es similar, pero ahora la aproximación a un punto (x_0, y_0) puede realizarse a lo largo de muchas direcciones. Al igual que en una variable, el límite en un punto siguiendo cualquier trayectoria posible debe coincidir

Límites reiterados

Límites reiterados. Ejemplo 1:

Se procede al cálculo del límite de la función dada en el origen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

1. Se comienza *fijando* una de las dos variables, por ejemplo x, y se calcula el límite en la y:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

2. A continuación, se fija la otra variable (y), y se calcula el límite en x:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

El valor de los límites reiterados es distinto, por lo que puede afirmarse que el límite doble no existe. Sin embargo, el límite reiterado puede no existir, y sí existir el límite doble, o bien coincidir y no existir el doble

Límites reiterados

Límites reiterados. Ejemplo 2:

Se procede al cálculo del límite de la función dada en el origen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1. $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}=0$$
2. $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{\sqrt{y^2}}=0$$

El valor de los límites reiterados coincide. Sin embargo NO puede afirmarse que exista el límite doble. *Los límites reiterados no son equivalentes al cálculo del límite doble*. Se puede afirmar que en caso de existir el límite, éste valdrá cero.

Límites direccionales

Límite direccional

El límite direccional responde a la pregunta "*¿de cuántas formas es posible aproximarse al punto* (a,b) *en* $\mathbb{R}^2$*?*". Obviamente, existen infinitas trayectorias para acercarse a a,b sobre el plano. En el siguiente ejemplo probaremos algunas posibles.

Ejemplo 3:

Se escoge una *trayectoria rectilínea*, determinada por cualquiera de las rectas de la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, de modo que se sustituye y por la ecuación de la recta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow [y = mx] \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(mx)^2}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}(1-m^2)}{\cancel{x}\sqrt{1+m^2}} = 0$$

O bien el límite direccional con una *parábola* del tipo $y - y_0 = m(x - x_0)^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \left[y = mx^2\right] \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(mx^2)^2}{\sqrt{x^2+(mx^2)^2}} = 0$$

Aunque el valor de los límites coincida, quedan por probar infinitas direcciones. Por lo tanto, NO puede afirmarse que el valor del límite doble sea cero.

Cambio a coordenadas polares

Paso a coordenadas polares

Se basa en el cambio de la función cuyo límite doble quiere calcularse a su forma polar, conocido que:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \quad \text{donde} \quad \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Ejemplo 4:

Por lo tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow [\text{cambio a polares}] \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) = 0$$

Ahora sí puede afirmarse que el límite doble existe, y su valor es cero. NOTA: Un análisis más profundo requiere la comprobación de que la función no depende del valor de θ, usando la propia definición de límite. Se verá un ejemplo a continuación [⇒diapositiva 15].

Límite doble. Procedimiento general de cálculo

Procedimiento general para el cálculo del límite doble

Sea $\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right. \quad (\rho > 0,\ \theta \in (0, 2\pi])$

Es $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = I \Leftrightarrow \exists F(\rho)\ /\ \lim\limits_{\rho\to 0} F(\rho) = 0$, siendo

$$|f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - I| \leq F(\rho)$$

Por lo tanto, pasos:

1. Se calculan los límites reiterados. Si existen y son iguales se pasa a
2. Se calculan los direccionales, existen y son iguales
3. ¿existe el límite doble? De existir, ha de valer lo mismo que los reiterados y direccionales anteriormente calculados. Para ello, se hace el cambio a coordenadas polares. Si el límite resultante aún depende de θ,
4. Aplicación de la definición de límite

Aplicación de la definición de límite

Ejemplo 5:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$ se aplica la definición con $L = 0$.

Definición: si $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, entonces: $\left|f(x,y) - L\right| < \epsilon$

Nos apoyamos además en que: $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, y del mismo modo $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - L| &= \left|\tfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \\
&\leq \left|\tfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \quad \leftarrow \text{ Esta expresión es } \epsilon \\
&\leq \tfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|x| \\
&\leq |x| \\
&\leq \sqrt{x^2 + y^2} \\
&< \delta \Rightarrow \epsilon = \delta \quad \text{Y por lo tanto se puede elegir } \delta = \epsilon \Rightarrow L = 0
\end{aligned}$$

Se demuestra que al disminuir δ también lo hace ϵ, quedando así demostrado que el límite propuesto vale cero.

Ejemplos:

Calcular el valor de los siguientes límites:

1. $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$ [Sol.: 1]
2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$ [Sol.: $\nexists$ lim]
3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$ [Sol.: 1]
4. $$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$$ [Sol.: 4]
5. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+2y^2)\log(x^2+y^2)}$$ [Sol.: 0]

Continuidad de una función de dos variables. Definición

Definición:

- Una función $f(x,y)$ es continua en el punto (x_0,y_0) de una región abierta R si $\exists f(x_0,y_0)$, y es igual al límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)$, es decir:

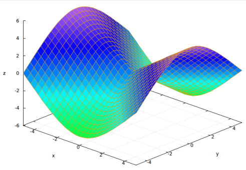
$$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

- Una función $f(x,y)$ es continua en la región abierta R si es continua en todo punto de R

Continuidad: ejemplos

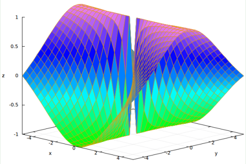
Ejemplo A:

Como se ha visto en el Ejemplo 5 [⇒diapositiva 15], el límite de $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ existe, y vale cero, aunque el punto $(0,0)$ queda fuera del campo de definición de la función. $f(x,y)$ no es continua en (0,0), aunque se trata de una discontinuidad evitable, que se puede eliminar definiendo el valor de $f(x)$ en $(0,0)$.



Ejemplo B:

La función $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ del Ejemplo 1 [⇒diapositiva 10] tampoco está definida en el origen. Sin embargo, en este caso la discontinuidad es inevitable, ya que tampoco existe el límite en el origen, como se ha visto.



Función continua de dos variables

Función continua de dos variables. Teorema:

Sean f y g funciones continuas en (x_0, y_0), y k un número real. Entonces, las siguientes funciones también serán continuas en (x_0, y_0):

1. Múltiplo escalar: kf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0 \neq 0)$

Consecuencias:

El teorema anterior establece la continuidad de las funciones polinómicas y racionales en todo punto de su dominio. La continuidad de otros tipos de funciones puede extenderse de manera natural de una a dos variables.

Continuidad de una función compuesta

Continuidad de una función compuesta. Teorema:

Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0), es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(h(x,y)) = g(h(x_0, y_0))$$

Nota:

En el teorema anterior, debe observarse que h es una función de dos variables, mientras que g es una función de una variable

Continuidad. Propiedades

Propiedades:

- Una función es continua en un conjunto cuando lo es en todos y cada uno de los puntos del conjunto
- Sea $f: \ X \subset \mathbb{R}^n \ \mapsto \ Y \subset \mathbb{R}^m$, siendo $Y = f(X)$, que es continua en X. Entonces, si X es cerrado y acotado, también $Y = f(x)$ es cerrado y acotado.

Teorema de Weierstrass

Sea $f: \ X \subset \mathbb{R}^n \ \mapsto \ \mathbb{R}$ continua en X, siendo X un conjunto cerrado y acotado. Entonces, el conjunto $Y = \left\{ f(x)/x \in X \right\} \subset \mathbb{R}$ posee un máximo y un mínimo, es decir, existen dos puntos x_1 y x_2 pertenecientes a X tales que:

$$\forall x \in X \Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

El Teorema de Weierstrass permitirá determinar la existencia de máximos y mínimos de funciones reales de variable vectorial o de variable real

Continuidad de una función de 2 variables. Ejemplos.

Estudiar la continuidad de las funciones en el origen:

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y^2 + x^4} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$ [Sol.: no es continua en $(0,0)$]

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$ [Sol.: continua en $(0,0)$]