Integral definida. Integral de Riemann

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Contenidos

Integral de Riemann. Conceptos previos.

Definición de *Partición*

Dados dos números reales tales que $a < b$, recibe el nombre de partición P del intervalo cerrado $[a, b]$ todo conjunto finito de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \ / \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

Definición de *Norma de una Partición*

Se llama norma de la partición P, designada cono $||P||$ a la longitud del subintervalo más largo, es decir:

$$||P|| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

Si todos los puntos de la partición son equidistantes, de habla de partición regular. En este caso, se cumple que $||P|| = \Delta x$

Integral de Riemann

Definición de *integrabilidad*

Una función f se dice que es integrable en un intervalo finito $[a, b]$ si existe el límite:

$$\lim_{\substack{||P|| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \quad \text{con} \quad x_k^* \in P$$

, y además éste no depende de la elección de las particiones o de los puntos x_k^* en cada uno de los subintervalos.

Definición: *Integral de Riemann* (o definida)

Si existe, se denota al límite de la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

que es la integral de Riemann (o integral definida) de la función f entre a y b.
a y b son los límites inferior y superior de integración respectivamente.

Interpretación geométrica de la integral de Riemann

Interpretación geométrica

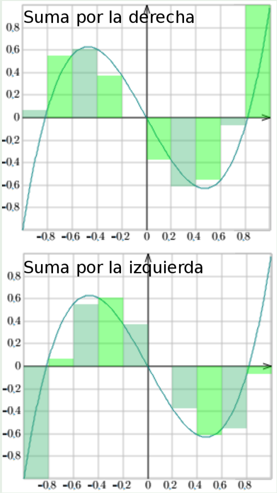
El valor de la integral de Riemann de una función $f(x)$ acotada y positiva en $[a,b]$ se puede interpretar como: "*El área de la región limitada por el eje horizontal, las rectas verticales $x=a$ e $y=b$ y la gráfica de $f(x)$*"

Ejemplo: $f(x) = 3x^2 - 2x$

$[a,b] = [-1,1]$ con $||P|| = \Delta x = 0{,}2$

Por la derecha: $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2x)dx \approx 0{,}2$

Por la izquierda: $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2x)dx \approx -0{,}2$



Condiciones de integrabilidad

Teorema (La continuidad implica integrabilidad):

Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es integrable en dicho intervalo.

Nota:

También es integrable en $[a, b]$ toda función acotada que tenga en este intervalo un número finito de puntos de discontinuidad

Teorema:

Toda función monótona en un intervalo cerrado $[a, b]$ es integrable en él.

Nota:

También es integrable en $[a, b]$ toda función no monótona y acotada que pueda descomponerse en un número finito de intervalos donde sea monótona

Propiedades de la integral de Riemann

Propiedad 1: Linealidad

Define el carácter lineal de la integral definida. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones integrables en $[a, b]$, también son integrables las funciones $f(x) \pm g(x)$ y $\lambda f(x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, cumpliéndose:

1. $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

2. $$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Propiedades de la integral de Riemann

Propiedad 2: Inversión de los límites de integración

Si se invierten los límites de una integral, ésta cambia de signo:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Propiedad 3

Para todo número real a se tiene:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Propiedades de la integral de Riemann

Propiedad 4: aditiva respecto del intervalo de integración

Si f es integrable en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$, entonces f es integrable en $[a, c]$, siendo:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Propiedad 5: positividad

Si f es integrable y no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Propiedades de la integral de Riemann

Propiedad 6: propiedad de monotonía

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y además $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Propiedad 7: acotación modular

Se verifica que:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Teorema del Valor Medio Integral

Definición: valor medio

Si f es una función integrable en $[a, b]$, entonces el valor medio de f en este intervalo se define como:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Nota:

El valor medio de una función de variable continua, constituye una generalización de la media aritmética de n números.

Teorema del Valor Medio Integral

Teorema del valor medio

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un número c comprendido entre a y b tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Interpretacion geométrica

El área limitada por la curva en el intervalo $[a, b]$ es igual a la de un rectángulo de base igual a la amplitud del intervalo y de altura igual a la ordenada de la curva en un punto de dicho intervalo

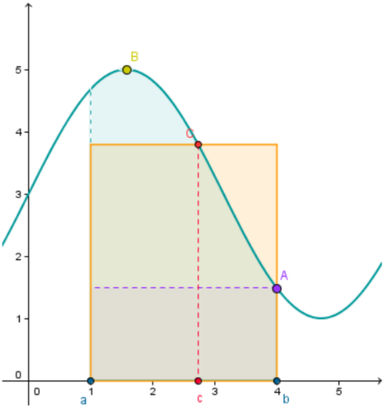


Imagen:
https://www.giematic.unican.es

Teorema fundamental del cálculo integral

Teorema:

Sea $f(t)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces, la función $F(x)$ definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{con} \quad x \in [a, b]$$

es derivable en dicho intervalo, verificándose

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Importancia de este teorema:

Este teorema relaciona estrechamente conceptos aparentemente tan dispares como el de primitiva e integral definida de una función continua y, a partir de él se obtiene un procedimiento sencillo para calcular integrales definidas sin usar límites de sumas. A partir de este teorema se puede probar la Regla de Barrow, que se estudia a continuación.

Regla de Barrow

La Regla de Barrow explica cómo utilizar las primitivas en el cálculo de integrales definidas de funciones continuas en el intervalo de integración.

Regla de Barrow:

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

donde $G(x)$ es cualquier primitiva de $f(x)$, es decir, cualquier función que verifique que $G'(x) = f(x)$

Regla de Barrow. Errores frecuentes

1. Al evaluar la integral I:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big]_{-1}^{1} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

El cálculo no es correcto, ya que al ser $f(x) > 0$ en $[-1, 1]$, debería resultar $I > 0$ (Propiedad 5). Deberá tomarse la rama continua de $\arctan x$, comprendida en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, y por lo tanto:

$$I = \arctan x \Big]_{-1}^{1} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

2. Peor aún:

$$\int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-3}^{1} = -\left[\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = -\frac{4}{3} < 0$$

Ya que $F(x) = 1/x$ no es continua en $[-3, 1]$ y además la función subintegral $f(x)$ no está acotada en el intervalo de integración, requisito de la integral de Riemann.

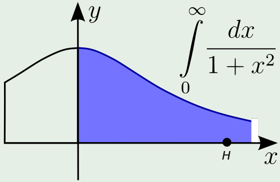
Integral impropia

Integral impropia:

La integral impropia presenta desviaciones respecto de la integral de Riemann (*singularidades*) ya que:

1. Presenta intervalos de integración infinitos (integral impropia de primera especie), o bien:
2. La función subintegral no es acotada (integral impropia de segunda especie). Además, se puede definir un tercer tipo, mezcla de los dos tipos anteriores:
3. Presenta un infinito en los extremos de integración y la función se hace infinito en uno o más puntos del intervalo de integración (impropia de tercera especie)

Ejemplos



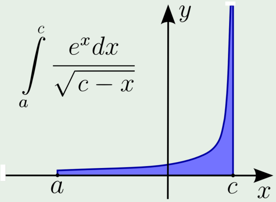


Image source: `https://es.wikipedia.org/wiki/Integral_impropia`

Integral impropia. Procedimiento de cálculo

Integral impropia: Cálculo

Para el cálculo de la integral impropia de primera especie del ejemplo anterior, se escribirá:

$$A_1 = \int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{H\to\infty} \int_0^{H} f(x)dx = \left[\lim_{H\to\infty} F(H)\right] - F(0)$$

En el segundo caso, impropia de segunda especie, se calculará:

$$A_2 = \int_a^{c} f(x)dx = \lim_{p\to c^-} \int_a^{p} f(x)dx = \left[\lim_{p\to c^-} F(p)\right] - F(a)$$

Convergencia/divergencia de la integral impropia de primera especie:

Se dirá que la integral es convergente, divergente o que no tiene sentido (también *oscilante*), si respectivamente el límite en el infinito existe y es finito, es infinito o no existe.

Integral impropia. Procedimiento de cálculo

Ejemplos:

1. $$\int_1^{\infty} \frac{6x}{3x^2+2}dx \qquad \left[\text{Sol.: } \infty \text{ (divergente)}\right]$$

2. $$\int_{-\infty}^{0} \pi a^{3x} dx \quad (a > 1) \qquad \left[\text{Sol.: } \frac{\pi}{3\log a}\right]$$

3. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \qquad \left[\text{Sol.: } \frac{\pi}{2}\right]$$

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}dx \qquad \left[\text{Sol.: } 2\right]$$

Procedimiento de cálculo con cambio de variable

En general, las integrales definidas se calculan mediante la regla de Barrow. En el caso de que se utilice un cambio de variable para obtener la primitiva, los límites de integración de la integral en la nueva variable, se ven modificados de la forma indicada por el siguiente teorema.

Cambio de variable en integrales definidas. Teorema:

Si la función $t = g(x)$ tiene derivada continua en $[a, b]$ y f es continua en el rango de g, entonces:

$$\int_a^b f\left[g(x)\right] g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Procedimiento de cálculo por partes

Procedimiento de cálculo por partes:

Si la integral indefinida se resuelve por partes, los límites de integración afectarán naturalmente tanto a la nueva integral que se debe calcular como a la parte ya calculada de la primitiva. Es decir:

$$\int_a^b u dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v du$$

Integración de funciones pares, impares y periódicas

En el caso de que las funciones del integrando tengan la propiedad de ser pares, impares o periódicas, las integrales pueden simplificarse de la forma que indica el siguiente teorema.

Sea f integrable en $\mathbb{R} \to$ Teorema:

1. Si f es una función par, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

2. Si f es una función impar, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

3. Si f es una función periódica con periodo T, entonces:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \quad ; \qquad \int_{0}^{nT} f(x)dx = n\int_{a}^{a+T} f(x)dx$$

Cálculo de areas planas

Teorema:

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces el área A de la región acotada por la gráfica de f, del eje x y de las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo:

Determinar el área encerrada entre la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ y el eje OX en el dominio de definición de f.

Área limitada por dos curvas planas

Área limitada por dos curvas planas

Sean las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$.

1. Se determinan los puntos de intersección de dichas curvas, mediante resolución del sistema
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$
2. Si los puntos obtenidos tienen abscisas a y b, suponiendo que en (a, b), $f(x) > g(x)$, el área viene dada por:
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Esto se generaliza en el caso de funciones arbitrarias f y g mediante la fórmula:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Ecuación paramétrica de una curva plana

Curva plana: definición

- Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I, entonces a las ecuaciones

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

se les llama ecuaciones paramétricas, siendo t el *parámetro*.

- Al conjunto de los puntos (x, y) que se obtiene al variar t sobre el intervalo I se le llama gráfica de las ecuaciones paramétricas.
- A las ecuaciones paramétricas y a la gráfica, consideradas conjuntamente, se les denomina curva plana.

Propiedades

Propiedades

- Una misma curva puede estar definida por *ecuaciones paramétricas* diferentes
- Al punto $\alpha(a)$ se le denomina punto inicial de la curva, y a $\alpha(b)$ punto final de la misma
- Toda curva lleva implícito un sentido de recorrido de la misma, que es el que la recorre desde su *punto inicial* hasta su *punto final*. Dicho de otra forma, el sentido lo marca el del crecimiento del parámetro t.

Curvas planas: ejemplos

Sea $y = f(x)$ una función definida en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dar una representación paramétrica de dicha función real.

Se observa que asignando al valor en el eje OX el valor de parámetro t, y sustituyendo el valor de t en y, la gráfica obtenida de $f(t)$ coincide con la de $f(x)$, siempre que el parámetro $t \in D_f$. Así, se obtiene la parametrización:

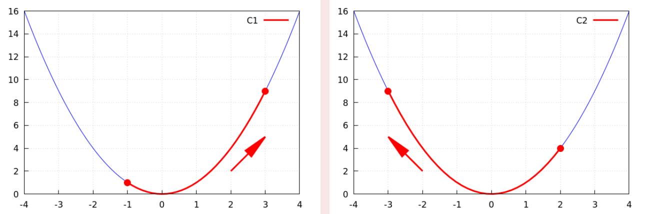
$$\vec{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad | \quad \vec{\alpha}(t) = (t, f(t))$$

Este tipo de parametrización se conoce como parametrización trivial.

Curvas planas: ejemplos

Ejemplo:

1. Obtener la ecuación paramétrica de la curva formada por la parábola $y = x^2$
2. Obtener la ecuación paramétrica del camino $C1$, desde $A = (-1, 1)$ hasta $B = (3, 9)$, siguiendo dicha parábola
3. Ídem para el camino $C2$, desde $C = (2, 4)$ hasta $D = (-3, 9)$



Área de la curva dada en paramétricas

Área de la curva en paramétricas. Fórmula:

El área limitada por la curva dada en paramétricas y el eje de abscisas, y las ordenadas $x = a$, $y = b$, viene dada por la fórmula:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Los límites de integración t_1, t_2 se obtienen a través de las ecuaciones $a = x(t_1), b = y(t_2)$

Área plana en paramétricas

Ejemplos de aplicación:

1. Hallar el área limitada por la elipse y las ordenadas $x = 0$, $x = 5$, dada su ecuación en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$$

Sol.: $[A = 5\pi]$

2. Dada la curva, expresada en coordenadas paramétricas por:

$$\begin{cases} x = 2\cos \varphi \\ y = \mathrm{sen}(2\varphi) \end{cases}$$

   a. Representar la curva gráficamente sobre el papel de forma aproximada
   b. Determinar el área encerrada dentro de la curva

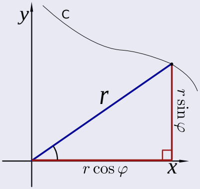
Sol.: $[A = 16/3]$

Área plana en polares

Coordenadas polares:

La curva C, si se opera en coordenadas polares, viene definida por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, de acuerdo con las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\}$$



Teniendo en cuenta que el área (A) de un sector circular de radio R y ángulo o amplitud θ, viene dada por:

$$A = \frac{1}{2}R^2\theta$$, observándose la relación $$\left(\frac{A}{\pi R^2} = \frac{\theta}{2\pi}\right)$$

Resulta que:

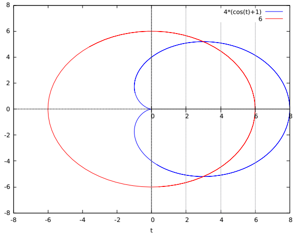
$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)d\theta$$

Área de la curva dada en polares

Ejemplo de aplicación

El gráfico las curvas cuya ecuación polar es de las formas $\rho = k(1 \pm \cos\theta)$,$\rho = k(1 \pm \operatorname{sen}\theta)$, tiene forma de corazón, por lo que recibe el nombre de *cardioide*. Dado el cardioide de ecuación $\rho = 4(1 + \cos\theta)$:

1. Calcular el área encerrada por la cardioide en el primer cuadrante
2. Calcular el área interior a esta cardioide, y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ [Sol.: $A = 18\sqrt{3} - 4\pi$]
3. Esbozar la curva y la circunferencia sobre el papel, de forma aproximada, indicando el área a calcular.



Longitud de un arco de curva

Longitud de arco

Sea la curva $f(x)$ definida y continua, así como $f'(x)$ en el intervalo $[a, b]$. La longitud (L) del arco de curva entre los puntos $x = a, x = b$ viene dada por la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

En paramétricas de la forma $x = x(t)$, $y = y(t)$, teniendo $x(t)$ e $y(t)$ derivada continua en el intervalo t_0, t_1 correspondiente a los puntos a, b, se tiene:

$$L = \int_{t0}^{t1} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{t0}^{t1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

En polares, siendo $\rho = \rho(\theta)$ la ecuación de la curva, la longitud viene dada por:

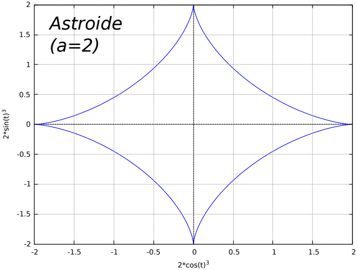
$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta$$

Ejemplos de aplicación:

Ejemplos:

Determinar la longitud de la curva cuya ecuación paramétrica viene dada por:

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\,\mathrm{sen}^3\theta \end{cases} \qquad [\text{Sol.: } 6a]$$



Volúmenes de cuerpos de revolución

Cálculo del volúmen de sólidos de revolución. Explícitas. Discos.

Sea la curva $y = f(x)$, definida y continua en el intervalo $[a, b]$. El volumen (V) engendrado por esta curva al girar alrededor del eje OX viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx \qquad (\textit{Método de los discos})$$

Análogamente, el volumen engendrado al girar sobre el eje OY viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Si en lugar de una arco de curva, se tiene una curva cerrada o un área plana limitada por dos arcos $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ el volumen generado viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx \qquad (\textit{Método de las arandelas})$$

Volúmenes de cuerpos de revolución

Ejemplos de aplicación

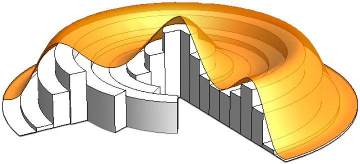
1. *Método de los discos*. Dada la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$, obtener el volumen de revolución engendrado al girar dicha región alrededor del eje OX [Sol.:8π]
2. Con el ejemplo anterior, calcular ahora el volumen de revolución alrrededor del eje OY [Sol.:$\frac{32\pi}{5}$]
3. *Método de las arandelas*. Calcular el volumen del sólido que se genera al girar la región encerrada por las curvas $y = x^4$, $y = 1$ alrededor del eje $y = 2$. [Sol.:$\frac{208\pi}{45}$]

Volúmenes de cuerpos de revolución

Cálculo del volúmen de sólidos de revolución. Explícitas. Capas cilíndricas.

El método de discos o arandelas puede ser muy costoso en determinadas ocasiones. El método de capas cilíndricas constituye una alternativa al de las arandelas para calcular el volumen de un sólido de revolución.

- El método implica considerar elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución
- Después, el área gira alrrededor del eje de revolución generando una *capa cilíndrica*, cuyo volumen viene dado por $V = 2\pi Rhw$, siendo R el *radio medio* del cilindro, h su altura, y w su *espesor* de pared (un diferencial).



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shell_integral_undergraph_-_around_y-axis.png

Volúmenes de cuerpos de revolución

Ejemplos de aplicación. Método de las capas

1. Determinar el volumen de un sólido de revolución engendrado por la parábola $y = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ y el eje OX, al girar alrededor del eje determinado por la recta $x = 4$. [Sol.: $\frac{67\pi}{6}$]
2. Hallar el volumen del sólido generado por la región acotada entre el eje $0X$, la parábola $y = 3x - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 3$, al girar alrededor del eje de revolución conformado por la recta $x = -1$. [Sol.: $\frac{45\pi}{2}$]

Volúmenes de cuerpos de revolución. Paramétricas y polares.

Cálculo del volumen de sólidos de revolución

El volumen engendrado por una curva en paramétricas girando sobre el eje OX:

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} y(t)^2 x'(t) dt$$

Y sobre el eje OY:

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} x(t)^2 y'(t) dt$$

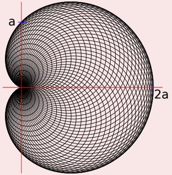
Mientras que el volumen de revolución de una curva en polares, viene dado por:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3(\theta) \operatorname{sen} \theta d\theta$$

Volúmenes de cuerpos de revolución. Paramétricas y polares.

Ejemplos de aplicación

1. Hallar el volumen del sólido que se obtiene al girar la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta) \quad , (a > 0)$ sobre el eje OX. [Sol.: $\frac{8\pi a^3}{3}$]



2. Determinar al volumen generado al girar la curva $\rho = a\cos^2\theta$ alrededor del eje OX. [Sol.: $\frac{4\pi a^3}{21}$]