Función real de una variable real. Integración indefinida

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Función primitiva

Definición

- Se dice que $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si y sólo si se verifica que:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D_{f(x)}$$

siendo $D_{f(x)}$ el dominio de la función $f(x)$

- El proceso de cálculo de primitivas se denomina *integración* y se denota con el "símbolo integral" $\int$:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Se observa que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también se verificará que $dF(x) = f(x)dx$

Integral indefinida

Definición

Dada un función $f(x)$, continua en un intervalo I, se llama integral indefinida de $f(x)$, representada como

$$\int f(x)dx$$

al conjunto de funciones que tienen por derivada $f(x)$ (tienen por diferencial $f(x)dx$), es decir:

$$\int f(x)dx + C$$

donde $f(x)$ se denomina *integrando* o *función subintegral* y C constante de integración, debiendo verificarse que:

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+C\right] = f(x)$$

Integral indefinida

Propiedades:

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo abierto I. Se verifica que:

1. $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \text{ siendo } k \text{ una constante}$$

2. $$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Estas propiedades confieren al operador $\int$ carácter lineal.

Función primitiva

Término constante. Proposición:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también serán primitivas de $f(x)$ todas aquellas funciones $G(x)$ que verifiquen $G(x) = F(x) + C$ y sólo esas

Teorema:

Los operadores de integración $\int$ y diferenciación d son *inversos*, si bien cuando se aplican en el orden $\int \; d$ debe añadirse una constante arbitraria, como se ha visto.

Existencia de la primitiva. Teorema:

La condición *necesaria y suficiente* para que $f(x)$ tenga función primitiva en un intervalo I, es que sea continua en I

Integral indefinida. Ejemplo.

Ejemplo:

Dada la función

$$f(x) = \frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^3 x}$$

, estudiar si las funciones

$$F_1(x) = \frac{1}{cos^2 x} \quad , \quad F_2(x) = tan^2 x$$

son primitivas de ella

Integrales inmediatas

Definición

Informalmente, se denominarán integrales inmediatas (o primitivas elementales) a todas aquellas cuya solución puede escribirse sin más recursos que el recuerdo de las *reglas de derivación*.
Se muestran en las siguientes diapositivas algunas de las integrales inmediatas más frecuentes

Tabla de integrales inmediatas (1 de 2)

1. $\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
2. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C;$ si $a = e \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \frac{dx}{x+a} = \log|x+a| + C$
5. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \quad (a \neq 0)$
6. $\int k^{ax} dx = \frac{k^{ax}}{a \log k} \quad (k > 0,\ a \neq 0)$
7. $\int \cos ax dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$
8. $\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$
9. $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \log|\cos ax| + C \quad (a \neq 0)$

Tabla de integrales inmediatas (2 de 2)

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{|a|} + C \quad (a \neq 0)$
11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$
12. $\int \operatorname{senh} ax dx = \frac{\cosh ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$
13. $\int \cosh ax dx = \frac{\sinh ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$
14. $\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \log(\cosh ax) + C \quad (a \neq 0)$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{argsinh} \frac{x}{|a|} + C = \log\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C \quad (a \neq 0)$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{argcosh} \frac{x}{|a|} + C = \log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C \quad (a \neq 0)$
17. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{argtanh} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0)$

Nota:

Todos los métodos de integración se basan en reducir la integral planteada a una forma inmediata, como las aquí indicadas

Integrales inmediatas por observación

Ejemplos:

Comprobar los siguientes resultados:

1. $$\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}dx = \frac{3}{4}(x^2+6x)^{\frac{2}{3}} + C$$
2. $$\int \frac{x+3}{x^2+6x+5}dx = \frac{1}{2}\log\left|x^2+6x+5\right| + C$$
3. $$\int \sqrt{x^2+2x^4}dx = \frac{1}{6}\sqrt{(1+2x^2)^3} + C$$
4. $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4x^3+5}} = \frac{1}{6}\sqrt{4x^3+5}+C$$
5. $$\int (e^x+2)^3 e^x\,dx = \frac{1}{4}(e^x+2)^4+C$$
6. $$\int e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2} = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

Descomposición o transformación de $f(x)$

Definición

La técnica de descomposición o transformación de la función $f(x)$ se basa generalmente en aplicar la linealidad del operador integral, escribiendo:

$$\int f(x)dx = \int \left(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x)\right) dx =$$
$$= a_1 \int f_1(x)dx + a_2 \int f_2(x)dx + \cdots + a_n \int f_n(x)dx$$

cuando éstas últimas integrales sean de más simple resolución que la inicialmente dada

Descomposición o transformación de $f(x)$

Ejemplos:

1. Efectuando una simple descomposición de los términos:

$$I_1 = \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x} dx = \int \left(2x^2 + 3x + \frac{4}{x} \right) dx =$$

$$= 2 \int x^2 dx + 3 \int x dx + 4 \int \frac{1}{x} dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4 \log |x| + C$$

2. En este caso, se aplica una identidad trigonométrica:

$$I_2 = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \tan x - \operatorname{cotan} x + C$$

Completación de cuadrados

Descripción del método:

- Cuando hay funciones cuadráticas en el integrando, completar el cuadrado ayuda a resolver la integral.
- La expresión $x^2 + bx + c$ puede reescribirse como diferencia de dos cuadrados, sumando y restando el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

Notas:

- Si el coeficiente director no es 1, conviene sacarlo como factor común del cuadrado:
$$2x^2 - 8x + 10 = 2(x^2 - 4x + 5) = 2\left[(x-2)^2 + 1\right]$$
- Cuando el coeficiente director es negativo, el mismo proceso de factorización sirve, observando el signo.

Completación de cuadrados

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 7} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$

Identidades trigonométricas

Las siguientes expresiones resultan de utilidad para transformar funciones trigonométricas y obtener, en ocasiones, primitivas de más sencilla resolución. Conviene memorizarlas, aunque aprenderemos a deducir de forma sencilla la mayor parte de ellas.

- Identidad trigonometrica fundamental:
  - $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\;,\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$
- Identidades del ángulo doble:
  - $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$
  - $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\operatorname{sen}^2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
  - $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Identidades trigonométricas

Ángulo mitad

- $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
- $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
- $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Identidades trigonométricas

Paso de suma a producto

- $$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
- $$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$
- $$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
- $$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Identidades trigonométricas

Paso de producto a suma

- $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$
- $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$
- $\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$
- $\cos\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$

Transformaciones trigonométricas

Ejemplos:

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int (1-\cos^2 x) dx = \int dx - \int \cos^2 x dx$$ (ya resuelta en el ejemplo anterior)
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x dx = \int \operatorname{sen} x dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx =$$
$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Integrales por descomposición o transformación

Ejemplos:

Comprobar los siguientes resultados:

1. $$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x - \arctan x + C$$

2. $$\int (x-1)(x+4)^7 dx = \frac{1}{9}(x+4)^9 - \frac{5}{8}(x+4)^8 + C$$

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{2x-3}{3} + C$$

4. $$\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}dx = -\sqrt{4-x^2} + 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} + C$$

Integración por partes

Justificación

Resulta inmediato obtener la relación de la integración por partes, recordando la fórmula de la derivada del producto:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

, y por lo tanto:

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Integrando esta última relación, se obtiene la expresión de la integral por partes:

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

Este método resulta eficaz cuando se elija acertadamente u y dv, de modo que la integral del segundo término de la expresión anterior $\int vdu$ sea más simple que $\int udv$.

Integración por partes. Ejemplos

Ejemplos:

1. $$\int udv = \int \log x dx \left\{ \begin{array}{l} u = \log x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\int udv = x \log x - \int dx = x \log x - x + C$$

2. $$\int udv = \int x \operatorname{sen} x dx \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\int udv = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Integración por partes. La regla “ALPES”

Origen

- Se trata de un método que ayuda a decidir qué parte del integrando pasa a ser u y qué parte dv
- Presentado por Herbert Kasube (1983[a]), bajo las siglas en inglés “LIATE”, se castellaniza a través del acrónimo “ALPES”:

A: funciones **A**rco (arco seno, arco coseno arco tangente)

L: funciones **L**ogarítmicas

P: **P**otencias (de exponente numérico)

E: **E**xponenciales

S: **S**eno y coseno

[a] Kasube, H.E., 1983. A Technique for Integration by Parts. *The American Mathematical Monthly* **90**, 210. `https://doi.org/10.2307/2975556`

Integración por partes. La regla “ALPES”

Aplicabilidad y casos:

Se aplica integración por partes cuando se tiene una integral de una función arco solamente, un logaritmo solamente o un producto de dos funciones que pertenezcan a dos de los cinco tipos “ALPES”:

1. Si sólo hay una función arco, llamaremos u a esa función y dv al resto ($dv = dx \Rightarrow v = x$)
2. Si sólo hay un logaritmo, llamaremos u al logaritmo y dv al resto (como en el caso anterior)
3. Si el integrando es un producto $f(x) \cdot g(x)$, se llama u a la función cuyo tipo aparezca primero en “ALPES” y dv al resto (la otra función por dx)

Integración por partes. Ejemplos regla ALPES:

Ejemplo

$$\int x \log x dx \left\{ \begin{array}{l} u = \log x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2 dx}{2x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C$$

Caso especial

En algunas ocasiones, la regla puede fallar si se aplica de forma directa. Por ejemplo, si en la integral $\int x^3 \cdot e^{x^2} dx$ se toma $u = x^3$ y $dv = e^{x^2} dx$, no se podrá resolver la integral, ya que ésta no tiene primitiva elemental. Sin embargo, tomando $u = x^2$ y $dv = xe^{x^2}$:

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = xe^{x^2} dx \Rightarrow v = \frac{e^{x^2}}{2} \end{array} \right\} = xe^{x^2} - \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C$$

Cambio de variable

Teorema:

Se considera la integral $\int f(x)dx$ y el cambio de variable $x = g(t)$. Si f y g verifican:

1. f es continua en el intervalo I_1
2. g tiene derivada continua en el intervalo I_2
3. $g(I_2) \subseteq I_1$

entonces:

$$\int f(x)dx = \int f\left[g(t)\right] g'(t)dt \text{ con } x \in I_1,\ t \in I_2$$

El cambio de variable es una técnica muy utilizada para obtener la primitiva de una función. De esta forma se obtiene una nueva integral en la variable t, que debe ser más sencilla de resolver que la integral de partida.

Cambio de variable

Ejemplos:

1. Se efectúa el cambio: $4x^3 + 5 = t^2 \Rightarrow 12x^2 dx = 2tdt$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4x^3+5}} = \frac{1}{12}\int \frac{2tdt}{t} = \frac{1}{6}\int \frac{tdt}{t} = \frac{t}{6} + C = \frac{1}{6}\sqrt{4x^3+5} + C$$

2. Se efectúa el cambio: $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\operatorname{sen} x^6}{6} + C$$

3. Se efectúa el cambio: $e^{\frac{1}{x}} = t \Rightarrow \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = \frac{-dt}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{-dt}{t}$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2} = \int t \frac{-dt}{t} = -\int tdt = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

Ejercicios propuestos:

Resolver mediante cambio de variable (inmediatas):

1. $$I = \int \sqrt{2x+3}dx \qquad [Sol: \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + C)]$$

2. $$J = \int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}dx \qquad [Sol: \log(\operatorname{sen} x - \cos x) + C]$$

3. $$H = \int \sec^2 x \sqrt{\tan x}dx \qquad [Sol: \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + C]$$

4. $$K = \int \frac{xdx}{x^4+1} \qquad [Sol: \frac{1}{2}\arctan x^2 + C]$$

Integración por recurrencia

Fórmula de recurrencia (o reducción)

A menudo, al integrar por partes, se obtiene un integral similar a la inicialmente propuesta. Las fórmulas de recurrencia permiten su cálculo.

Obténgase I_3 hallando una fórmula de recurrencia dada la integral I_n

$$I_n = \int \log^n x dx \text{ (Caso II de la regla ALPES) } \left\{ \begin{array}{l} u = \log^n x \Rightarrow du = \frac{n}{x} \log^{n-1} x dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = x \log^n x - n \int \log^{n-1} x dx \quad \rightarrow \text{(Fórmula de recurrencia)}$$

Por lo tanto: $I_3 = x \log^3 x - 3 \int \log^2 x dx = x \log^3 x - 3 \left(x \log^2 x - 2 \int \log x dx \right)$

[...], y así de forma recursiva, hasta llegar a la solución final:

$$x(\log^3 x - 3 \log^2 x + 6 \log x - 6) + C$$

Integración de funciones racionales

Función racional

Cualquier función racional $R(x)$ puede expresarse como cociente de polinomios $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Esta sección se dedica al cálculo de integrales de funciones de este tipo, es decir, de la forma $\int \frac{p(x)}{q(x)}$, siendo $p(x)$ y $q(x)$ polinomios. Se distinguen dos casos:

1. grado de $p(x) \geq q(x)$. Aquí, se efectúa el cociente $p(x)/q(x)$, obteniéndose:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}$$

, siendo $\int c(x)dx$ la integral de un polinomio (por tanto inmediata), y $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ una integral racional del Caso 2.

2. grado de $p(x) < q(x)$ (funciones racionales propiamente dichas). Estas integrales se resuelven mediante descomposición en fracciones simples.

Descomposición en fracciones simples

Descomposición en fracciones simples:

- El método de descomposición en fracciones simples consiste en descomponer una fracción propia en una suma de fracciones de polinomios de menor grado.
- Se utiliza principalmente en cálculo integral, aunque puede ser una técnica de utilidad en otros contextos.
- De forma general, pueden calcularse los factores lineales o cuadráticos resolviendo un sistema de ecuaciones.

Importante:

Sólo se aplicará el método de descomposición en fracciones simples en funciones racionales propiamente dichas, con

$$grado\ de\ p(x) < grado\ de\ q(x)$$

Descomposición en fracciones simples

Casos:

1. Factores lineales únicos. Todas las raíces de $q(x)$ reales y simples
2. Factores lineales repetidos. Todas las raíces de $q(x)$ reales, algunas repetidas
3. Factores cuadráticos únicos. Hay raíces reales, simples o múltiples, y complejas simples (la ecuación cuadrática resultante no tiene raíces reales).
4. Factores cuadráticos repetidos. Hay raíces reales y complejas, tanto simples como múltiples.

Nótese que si una ecuación tiene como raíz $z \in \mathbb{C}$, también tiene como raíz a su conjugado $\bar{z}$ (recuérdese el Teorema Fundamental del Álgebra). En la descomposición en factores, aparecerá un término de la forma:

$$[x-(a+bi)]\,[x-(a-bi)] = \left[(x-a)^2+b^2\right]$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo Caso 1: Factores de $q(x)$ lineales únicos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{5(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{5}\left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-1 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2)$$

En la igualdad anterior, se hace sucesivamente $x=-1$, $x=2$ y $x=3$, obteniéndose el valor de A, B y C:

- $x=-1 \Rightarrow -1-1 = A(-1-2)(-1-3) \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$
- $x=2 \Rightarrow 2-1 = B(2+1)(2-3) \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$
- $x=3 \Rightarrow 3-1 = C(3+1)(3-2) \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{5}\left[\frac{-1}{6(x+1)} - \frac{1}{3(x-2)} + \frac{1}{2(x-3)}\right]$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo Caso 2: Factores de $q(x)$ lineales repetidos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{5(x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{5}\left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\right] \rightarrow$$
$$\rightarrow x-1 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

En la igualdad anterior, se hace sucesivamente $x=-1$ y $x=2$, obteniéndose el valor de A y C:

- $x=-1 \rightarrow -1-1 = A(-1-2)^2 \rightarrow A = -\frac{2}{9}$
- $x=2 \rightarrow 2-1 = C(2+1) \rightarrow C = \frac{1}{3}$

Resta por determinar B, que puede obtenerse conocidos A y C

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{5}\left[\frac{-2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)} + \frac{1}{3(x-2)^2}\right]$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo Caso 3: Factores de $q(x)$ cuadráticos únicos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x-0} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x^2+1) + (Mx+N)x \Rightarrow$$

En la igualdad anterior, se hace sucesivamente $x = 0$ y $x = 1$ y $x = -1$, obteniéndose el valor de A, M y N:

- Si $x = 0 \Rightarrow 1 = A$
- Si $x = 1 \Rightarrow M + N = -1$
- Si $x = -1 \Rightarrow M - N = -1$

Resolviendo, se obtiene que $A = 1$, $M = -1$, $N = 0$, y por lo tanto:

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-1}$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplo Caso 4: Factores de $q(x)$ cuadráticos repetidos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3+x^2+5x+4}{(x^2+4)^2} = \frac{Mx+N}{x^2+4} + \frac{Px+Q}{(x^2+4)^2} \Rightarrow$$

Operando: $x^3+x^2+5x+4 = (Mx+N)(x^2+4)+Px+Q$

$$\Rightarrow x^3+x^2+5x+4 = Mx^3+4Mx+Nx^2+4N+Px+Q$$

Igualando términos, se obtiene:

$$\Rightarrow \begin{cases} Mx^3 = x^3 \Rightarrow M=1 \\ Nx^2 = x^2 \Rightarrow N=1 \\ 4Mx+Px = 5x \Rightarrow P=1 \\ 4N+Q=4 \Rightarrow Q=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x+1}{x^2+4} + \frac{x}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{x^2+4} + \frac{x}{x^2+4} + \frac{x}{(x^2+4)^2}$$

Descomposición en fracciones simples

Ejemplos con MAXIMA

La función `partfrac` (*"partial fractions"*) se utiliza para la descomposición en fracciones simples:

- Ejemplo 1:

```
(%i1) (x-1)/(5*(x+1)*(x-2)*(x-3));
(%i2) partfrac(%, x);
```

- Ejemplo 2:

```
(%i3) (x-1)/(5*(x+1)*(x-2)^2);
(%i4) partfrac(%, x);
```

Ejercicios propuestos:

Verificar los siguientes resultados:

1. $$\int \frac{x^3+3x-5}{x^2+2x+5}\,dx = \log\left|x^2+2x+5\right| + \frac{3}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}(x^2-4x) + C$$

2. $$\int \frac{x^5+9x^3+5x^2+17x+12}{x^4+x^3+4x^2+4x}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+4) + 2\log|x+1| + 3\log|x| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \frac{x^2-2x}{2} + C$$

3. $$\int \frac{x^3+x^2+5x+4}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log(x^2+4) + \arctan\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2+4}\right] + C$$

4. $$\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C$$

Integración de funciones racionales de e^x, $R(e^x)$

Estrategia de integración

Las funciones racionales de e^x, que se representan como $\int R(e^x)dx$, se resuelven mediante el cambio de variable $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

Ejemplo de aplicación:

Verificar el siguiente resultado:

$$\int \frac{e^{3x} + e^{2x} + 1}{e^x - e^{-x}} dx = \frac{e^{2x}}{2} + e^x - \frac{1}{2} \log |e^x + 1| + \frac{3}{2} \log |e^x - 1| + C$$

Funciones trigonométricas racionales $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$

Son integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$, donde R indica una función racional. Se resuelven mediante un cambio de variable. El cambio de variable 4 es universal, pero a veces simplifica los cálculos aplicar otros cambios, en función de la naturaleza de la paridad de seno y coseno:

1. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = R(-\operatorname{sen} x, -\cos x)$ ("par en seno y coseno"), se aplica el cambio $\tan x = t$, con lo que:
$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$
2. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, -\cos x)$ ("impar en coseno"), el cambio es $\operatorname{sen} x = t$
3. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(-\operatorname{sen} x, \cos x)$ ("impar en seno"), el cambio es $\cos x = t$
4. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ no presenta ninguna de las paridades anteriores, entonces el cambio general aplicable es $\tan \frac{x}{2} = t$, con lo que:
$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Ejemplos de aplicación

Verificar los siguientes resultados:

1. Transformación universal, $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\int \frac{dx}{4+5\cos x} = \frac{1}{3}\log\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

2. $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ par en seno y coseno $\Rightarrow t = \tan x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x) + C$$

3. $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ impar en coseno $\Rightarrow t = \operatorname{sen} x$

$$\int \frac{dx}{(1+\operatorname{sen} x)\cos x} = -\frac{1}{4}\log|1-\operatorname{sen} x| + \frac{1}{4}\log|\operatorname{sen} x + 1| - \frac{1}{2\operatorname{sen} x + 2} + C$$

Productos de senos y cosenos

Integrales de funciones de productos de senos y cosenos

Son integrales de la forma:

$$I = \int \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen} mx \\ \cos mx \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen} nx \\ \cos nx \end{array} \right\} dx \quad \text{con} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Las integrales que se producen como resultado de las diferentes combinaciones posibles se resuelven aplicando las fórmulas trigonométricas de paso de producto a suma, que transforman las integrales en inmediatas.

Productos de senos y cosenos

Identidades para el paso de suma a producto

La aplicación de las siguientes fórmulas transforma el integrando de las integrales de este tipo, transformándolas en inmediatas

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2} \\ \cos\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \end{array}\right.$$

Ejemplos de aplicación

Verificar los siguientes resultados:

1. $$\int \operatorname{sen}(3x+4)\cos(x+2)dx = -\frac{1}{8}\cos(4x+6) - \frac{1}{4}\cos(2x+2) + C$$

2. $$\int \frac{\cos(3x+4)}{\sqrt{1+\tan^2(x+2)}}dx = \frac{\operatorname{sen}(4x+6)}{8} + \frac{\operatorname{sen}(2x+2)}{4} + C$$

Funciones irracionales $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$

Estrategia de integración

Son integrales irracionales cuadráticas que pueden transformarse en trigonométricas mediante diferentes cambios de variable. Se extraerá un *cuadrado perfecto* del trinomio del radicando:

$$ax^2+2bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{a}+c=(px+q)^2\pm m^2$$

Siempre podrá expresarse dicho trinomio (según sean a y $c-\frac{b^2}{a}$ positivos o negativos), por algunas de las siguientes formas:

$$ax^2+2bx+c=\begin{cases}\text{Caso I: } (px+q)^2+m^2 & (\text{a}>0,\ \text{y raíces complejas})\\ \text{Caso II: } (px+q)^2-m^2 & (\text{a}>0,\ \text{y raíces reales})\\ \text{Caso III: } m^2-(px+q)^2 & (\text{a}<0,\ \text{y raíces reales})\end{cases}$$

Funciones irracionales $R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})$

Estrategia de integración

La función irracional se transformará en una función trigonométrica conocida, realizando los cambios de variable apropiados en cada caso:

Caso I:

$$px + q = m \tan t \rightarrow \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = \frac{m}{\cos t}$$

Caso II:

$$px + q = \frac{m}{\cos t} \rightarrow \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = m \tan t$$

Caso III:

$$px + q = m \operatorname{sen} t \rightarrow \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = m \cos t$$

Nota:

Dado que la finalidad de estos cambios es destruir la raíz cuadrada, también serán aplicables cuando el trinomio en cuestión esté elevado a exponentes de la forma $\frac{n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}$

Ejemplos de aplicación

Verificar los siguientes resultados:

1. Irracional del caso I:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

2. Irracional del caso II:

$$\int \frac{1}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{1}{9}\frac{x-3}{\sqrt{4x^2-24x+27}} + C$$

Integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Estrategia de integración (*método alemán*):

Las funciones de este tipo, siendo $P_n(x)$ un polinomio entero en x de grado n, se resuelven mediante la aplicación del método alemán, descomponiéndose el integrando en la siguiente forma:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

, siendo $Q_{n-1}(x)$ un polinomio un grado menor que $P_n(x)$. Todos estos parámetros se determinan siguiendo los pasos:

1. Se derivan ambos miembros
2. Se eliminan denominadores
3. Se hallan los parámetros mediante el método de los coeficientes indeterminados

Por último, se calcula la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Método alemán. Ejemplo de aplicación

Ejemplo: Calcular $I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{a^2+x^2} + K \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Derivando:

$$\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{a^2+x^2} + \frac{x(Ax^2+Bx+C)}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{K}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Se eliminan denominadores:

$$x^3 = (2Ax+B)(a^2+x^2) + x(Ax^2+Bx+C) + K$$

Obteniéndose, por aplicación del método de coeficientes indeterminados, que $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$, $C = -\frac{2}{3}a^2$ y $K = 0$. En este ejemplo, al ser $K = 0$, se anula la última integral, y la solución es por lo tanto inmediata:

$$I = \frac{1}{3}(x^2 - 2a^2)\sqrt{a^2+x^2} + C$$

Ejemplos de aplicación:

Verificar los siguientes resultados:

1. $$\int \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{x^2+4} - 19\sqrt{x^2+4}\right) + C$$

2. $$\int \frac{x^4 - 3x^2 + 6x - 1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x^3\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{9x\sqrt{1-x^2}}{8} - 6\sqrt{1-x^2} - \frac{17 \operatorname{arc\,sen} x}{8} + C$$

Funciones hiperbólicas $\int R(\operatorname{senh} x, \cosh x)dx$

Estrategia de integración

Resulta útil recordar las siguientes expresiones:

- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$; $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$
- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$; $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$; $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$
- $\tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$; $\tanh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{\cosh 2x + 1}$

Ejemplo de aplicación:

Calcular $\int \frac{dx}{\sinh x}$. Se aplica el cambio $\cosh x = t \Rightarrow \operatorname{senh} x dx = dt$:

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = -\int \frac{dt}{1 - t^2} = -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \cosh x}{1 - \cosh x} \right| + C$$