# Integrales de Línea

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

# Integral curvilínea. Definición

## Definición:

Sea $f$ definida en una región que contiene a una curva $\mathcal{C}$, *regular a trozos* y de longitud finita. Se define la integral curvilínea de $f$ sobre $\mathcal{C}$, y se simboliza por $\int_c f(x,y)ds$, al valor del siguiente límite, si existe:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i \quad \text{si C es una curva plana}$$

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i \quad \text{si C es una curva alabeada}$$

# Integral curvilínea. Propiedades

## Propiedades

Por lo expuesto, Las propiedades de la integral curvilínea son similares a las de la *integral de Riemann*. La monotonía o la continuidad de $f$ a lo largo de $\mathcal{C}$ son *condiciones que aseguran* la existencia de estas integrales.

1. $\int_{AB} f\ ds = \int_{BA} f\ ds$
2. $\int_c (f+g) ds = \int_c f\ ds + \int_c g\ ds$
3. $\int_c k \cdot f\ ds = k \int_c f\ ds \quad , \quad \int_c k\ ds = k \int_c\ ds = k \int_0^L\ ds = k \cdot L$
4. $\int_c f\ ds = \int_{c_1} f\ ds + \int_{c_2} f\ ds \quad (\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$
5. Si en $\mathcal{C}$ es $f \leq g$, entonces $\int_c f\ ds \leq \int_c g\ ds$
6. $\left| \int_c f\ ds \right| \leq \int_c |f| ds$

# Integral curvilínea. Procedimiento de cálculo

Sea $f$ una función continua en un conjunto que contiene a una curva regular $\mathcal{C}$.

- Si $\mathcal{C}$ está definida por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ con $a \leq t \leq b$, entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

- Si $\mathcal{C}$ está definida por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ con $a \leq t \leq b$, entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

Se observa que si el integrando es $f(x,y) = 1$, entonces la integral nos da la longitud de la curva $C$ desde $\vec{r}(a)$ hasta $\vec{r}(b)$. Análogamente se cumple si $f(x,y,z) = 1$

$$\int_{\mathcal{C}} 1 ds = \int_a^b ||r'(t)|| dt = \text{Longitud de arco de la curva } \mathcal{C}$$

# Integral de línea. Ejemplos de cálculo

## Ejemplos:

1. Calcular la integral de línea de la función $f(x,y,z) = x^2 - y + 3z$, siendo $\mathcal{C}$ el segmento recto que une el origen de coordenadas con el punto $(1,2,1)$ [Sol: $\frac{5}{\sqrt{6}}$]
2. Calcular $\int_c x ds$, siendo $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1$ es el segmento recto que une el origen con el punto $(1,1)$ y $\mathcal{C}_2$ el arco parabólico de $y = x^2$ que une el punto $(1,1)$ con el origen. [Sol: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{5}-1}{12}$]
3. Sea un muelle en forma de hélice circular definido por $\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t \cdot \vec{i} + \operatorname{sen} t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k}) \quad , \quad 0 \leq t \leq 6\pi$. Calcular su masa sabiendo que la densidad de masa viene dada por $\rho(x,y,z) = 1 + z$. [Sol: $6\pi + 9\sqrt{2}\pi^2$]

# Integral de línea de una función vectorial

## Definición

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave $\mathcal{C}$ dada por $r(t), \quad a \leq t \leq b$. La integral de línea de $\vec{F}$ sobre $\mathcal{C}$ está dada por:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) dt$$

## Aplicaciones:

Una de las aplicaciónes físicas más habituales de la integral de línea es hallar el trabajo $W$ realizado en un campo de fuerzas $\vec{F}$ sobre una partícula que se desplaza a lo largo de una curva $C$.

# Integral de línea de una función vectorial

## Propiedades:

1. El valor de esta integral es *independiente de la parametrización* que se utilice de la curva $C$.
2. La *orientación de la curva* es muy importante porque si se invierte el sentido de recorrido el vector tangente unitario será el opuesto y entonces se cumple que:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

# Integral de línea de un campo vectorial

## Ejemplos:

1. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial en el plano dado por $\vec{F}(x,y) = \sqrt{y} \cdot \vec{i} + (x^3 + y) \cdot \vec{j}$. Calcular la integral de línea de $\vec{F}$ que va del punto $(0,0)$ al $(1,1)$ a través de los siguientes caminos:
   a. El camino de ecuación paramétrica $x = t,\ y = t, \quad t \in [0,1]$ [Sol: $\frac{17}{12}$]
   b. El camino de ecuación paramétrica $x = t^2,\ y = t^3, \quad t \in [0,1]$ [Sol: $\frac{59}{42}$]
2. Hallar el trabajo realizado por la fuerza variable $\vec{F}(x,y) = (xy, 1)$ al desplazarse desde el punto $A(0,0)$ hasta el $B(1,1)$:
   a. Por el camino $\mathcal{C}_1 :\ y = x^2$ [Sol: $\frac{5}{4}$]
   b. Por el camino $\mathcal{C}_2 :\ y = x$ [Sol: $\frac{4}{3}$]
   c. A lo largo de la *curva cerrada* $\mathcal{C}$ compuesta por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en sentido horario [Sol: $\frac{-1}{12}$]

# Teorema fundamental de las integrales curvilíneas

## Teorema:

Sea $\mathcal{C}$ una curva regular a trozos situada en una región $Q$ que viene definida por $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} \quad , \quad a \leq t \leq b$. Sea $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z) \cdot \vec{i} + N(x,y,z) \cdot \vec{j} + P(x,y,z) \cdot \vec{k}$ un campo conservativo en $Q$ y tal que sus componentes $M$, $N$ y $P$ sean continuas en $Q$. Entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))$$

donde $f(x,y,z)$ es la función potencial asociada al campo vectorial $\vec{F}$.

## Corolario:

- Si el campo $\vec{F}$ es conservativo el valor de la integral es independiente del camino seguido.
- Si el campo $\vec{F}$ es conservativo y la curva $\mathcal{C}$ es cerrada, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

# Teorema fundamental de las integrales curvilíneas

## Ejemplo de aplicación:

Evaluar la integral de línea

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{F}(x,y,z) = 2xy \cdot \vec{i} + (x^2 + z^2) \cdot \vec{j} + 2yz \cdot \vec{k}$, y $\mathcal{C}$ es una curva suave a trozos que va desde el punto $(1,1,0)$ hasta $(0,2,3)$ de acuerdo con:

1. El segmento recto que une ambos puntos [Sol: 17]
2. La trayectoria determinada por la quebrada que une los puntos $A(1,1,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,3)$ [Sol: 17]
3. Comentar el resultado, verificar que $\vec{F}$ es efectivamente un campo conservativo y aplicar en su caso el Teorema fundamental de las integrales curvilíneas.

# Integral de línea de un campo vectorial

## Forma diferencial

Considerando una función vectorial $\vec{F} = M(x,y) \cdot \vec{i} + N(x,y) \cdot \vec{j}$ definida sobre la curva plana $\mathcal{C}$ previamente definida, como $\vec{F}(M,N)$, $d\vec{r}(dx,dy)$, resulta:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} (M,N) \cdot (dx,dy) =$$

$$= \int_{\mathcal{C}} (Mdx + Ndy), \quad \text{siendo} \begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \end{cases}$$

Esta expresión del integrando recibe el nombre de forma diferencial

# Formas diferenciales

## Ejemplos:

1. Calcular el valor de
$$\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$
siendo $\mathcal{C}$ una circunferencia de radio 3 centrada en el origen
[Sol: $\frac{243\pi}{4}$]

2. Calcular el valor de
$$\oint_C y^2 dx + (xy + y^2) dy$$
a lo largo del contorno cerrado en sentido positivo formado por una semicircunferencia de centro en el origen y radio 2 y su diámetro sobre el eje $OX$
[Sol: $\frac{16}{3}$]

# Forma diferencial exacta

## Conjunto conexo. Definición

Un conjunto $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es conexo si dados dos puntos cualesquiera $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, existe algún camino regular a trozos contenido en $\mathcal{A}$ que los une.

## Forma diferencial exacta. Definición

Una forma diferencial se dice que es exacta si existe una función

$$U \; : \; \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

siendo $\mathcal{S}$ un conjunto *conexo* de $\mathbb{R}^n$. Dicha función $U$ recibe el nombre de función potencial (por lo tanto $\vec{F}$ será un campo gradiente).

Por lo tanto, en regiones abiertas y *conexas*, la independencia de la trayectoria de $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es equivalente a la condición de que $\vec{F}$ sea conservativo.

## Conjunto convexo. Definición

Un conjunto $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es convexo si dados dos puntos cualesquiera $a_1$,$a_2$ de $\mathcal{A}$, el segmento que los une está contenido en $\mathcal{A}$.

# Forma diferencial exacta

## Ejemplo:

Sabiendo que $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ es una forma diferencial exacta en cualquier conjunto *convexo* que no contenga al origen, calcular

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

siendo $\mathcal{C}$ la curva:

1. $(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ [Sol: $0$]
2. $x^2 + y^2 = 4$ [Sol: $2\pi$]