Función real de variable real: Límites y continuidad

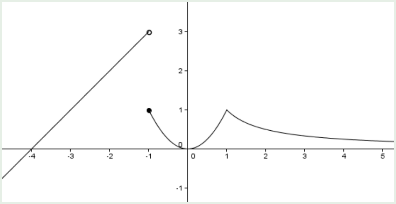
Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Representación gráfica

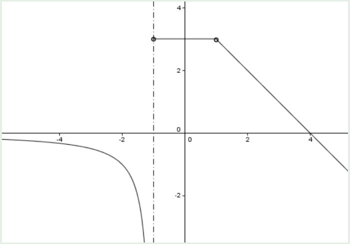
Leer los valores a partir de los gráficos de las funciones:

Ejemplo 1



- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$
- $f(-1)$

Ejemplo 2



- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

Límite de una función en un punto

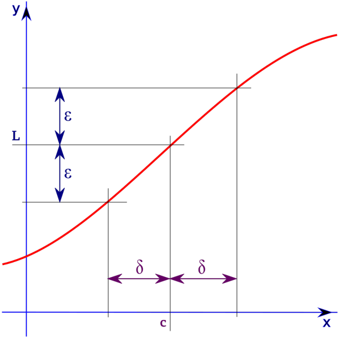
Definición

Intuitivamente, el hecho de que una función f alcance un límite L en un punto c significa que, tomando puntos *suficientemente próximos* a c, el valor de f puede ser tan *cercano* a L como se desee. La cercanía de los valores de f y L **no depende** del valor que adquiere f en dicho punto c.

Definición formal

El límite de una función $f(x)$, cuando x tiende a c es L si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo número real x en el dominio de la función $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Se representa como:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



Ejemplo:

Apoyándose en la definición de límite, demostrar que:

$$\lim_{x \to 4} (2x + 3) = 11$$

Límites laterales

Límite por la derecha

$f: \quad X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite por la derecha en el punto c, si dado $\epsilon > 0$, tal que $0 < x - c < \delta, \quad x \in X$ es $|f(x) - L_d| < \epsilon$, y escribimos: $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_d$ o bien $f(c^+) = L_d$

Límite por la izquierda

$f: \quad X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite por la izquierda en el punto c, si dado $\epsilon > 0$, tal que $0 < c - x < \delta, \quad x \in X$ es $|f(x) - L_i| < \epsilon$, y escribimos: $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_i$ o bien $f(c^-) = L_i$

La condición necesaria y suficiente para que una función tenga límite en un punto x_0 es que existan sus límites laterales, y además

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Límites finitos

Limites finitos. Propiedades.

Sean $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$, ambos finitos. Entonces:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$, donde $k = cte$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = L_1/L_2$, si $L_2 \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = L_1^{L_2}$, si $f(x) > 0$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L_1 + \beta L_2$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
7. $\lim\limits_{x\to x_0} [\log_a f(x)] = \log_a \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]$ Si $a > 0$ y $f(x) > 0$

Límites finitos

Propiedades de los límites finitos. Ejemplos de aplicación

Sabiendo que:

- $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$
- $\lim_{x\to 1} g(x) = 7$
- $f(1) = 0$
- $g(1) = 7$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -5$
- $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 1$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$
- $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$
- $f(2) = 0$
- $g(2) = 2$

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 1} [f(x) + 2g(x)]^2$
2. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{g(x)+3}{f(x)}\right)$
3. $\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{f(x)}{6(x-g(x))}\right)$

1. Unicidad: El límite de una función, si existe, es único
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, excepto si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, y $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$, o viceversa.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(k\cdot f)(x)=k\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, con $k\in\mathbb{R}$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, excepto si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, y $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$, o viceversa.
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, si $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$ excepto si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, o bien $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, excepto si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ o bien $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ o bien $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, y $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$
7. Si $f(x)$ es una función acotada en un entorno de x_0 y $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=0$

Indeterminaciones

En los casos en los que la aplicación directa de las propiedades de los límites no permite calcular el límite (excepciones de las propiedades), se dice que hay una indeterminación y es necesario calcular el límite de otra manera.

Operación	**Supuesto**	**Indeterminación**
Suma	$f(x) \to +\infty; g(x) \to -\infty$	$\infty + (-\infty)$
Producto	$f(x) \to 0; g(x) \to \pm\infty$	$0 \cdot \infty$
Cociente	$f(x) \to 0\,[\infty]\,; g(x) \to 0\,[\infty]$	$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$
Potencia*	$f(x) \to \infty; g(x) \to 0$	∞^0
	$f(x) \to 0; g(x) \to 0$	0^0
	$f(x) \to 1; g(x) \to \infty$	1^∞

En estos casos hay que efectuar operaciones particulares para resolver cada una de las indeterminaciones.

$^{(*)}$En el caso de indeterminaciones de tipo potencial-exponencial, típicamente tomaremos logaritmos: $f(x)^{g(x)} \Rightarrow g(x)\log(f(x)) \sim g(x)(f(x)-1))$

Infinitésimos

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, decimos que $f(x)$ es un infinitésimo en el entorno de $x = a$. Por ejemplo:

- $\lim\limits_{x \to a} (x-a)^2$
- $\lim\limits_{x \to 0} = \sin x$
- $\lim\limits_{x \to 1} = \frac{\log x}{x}$

Proposición:

- La suma, diferencia y producto de infinitésimos para $x = a$ es un infinitésimo para $x = a$
- El producto de un infinitésimo para $x = a$ por una función acotada en un entorno del punto a es un infinitésimo para $x = a$

Límites infinitos

- $f: \ X \subset \mathbb{R} \ \rightarrow \ \mathbb{R}$ tiene límite ∞ cuando $x \rightarrow a$, si para cada $k > 0$, existe un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que si $0 < |x - a| < \delta, \ x \in X$, es $|f(x)| > k$, y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x - 3}$$

- Podemos precisar más según sea $\pm\infty$ o si alguno de los límites laterales es $\infty(\pm\infty)$.
- En todos los casos decimos que $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Límites en el infinito

- $f: \quad X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite L cuando $x \rightarrow \infty$ si para cada $\epsilon > 0$, existe un $h \in \mathbb{R}^+$ tal que si $|x| > h, \quad x \in X$, es $|f(x) - L| < \epsilon$, y escribimos $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, que podemos precisar más según $x \rightarrow \pm\infty$.
- En todos los casos decimos que $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

Infinitésimos

Orden de los infinitésimos

Dadas $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$, infinitésimos en el entorno de x_0, y el límite $L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, se tiene que:

- $L = 0$, cuando el orden de $f(x) >$ orden de $g(x)$
- $L = +\infty$ o $L = -\infty$, cuando el orden de $f(x) <$ orden de $g(x)$
- $L = k, \quad t.q. \quad k \neq 0, \neq \infty$, $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos del mismo orden. En este caso, se escribe $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$
- $\nexists L$. No son comparables.

Infinitésimos equivalentes. Definición

Los infinitésimos son equivalentes si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Infinitos

Orden de los infinitos

Dadas $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$, infinitos en el entorno de x_0, y el límite $L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, se tiene que:

- $L = 0$, cuando el orden de $f(x) <$ orden de $g(x)$
- $L = +\infty$ o $L = -\infty$, cuando el orden de $f(x) >$ orden de $g(x)$
- $L = k, \quad t.q. \quad k(\neq 0, \neq \infty)$, cuando son del mismo orden
- $\nexists L$. No son comparables.

Infinitos equivalentes. Definición

Los infinitos son equivalentes si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Órdenes de infinitud más usuales si $x \to +\infty$

Orden de $log_a x$ $a > 1$	$<$	Orden de x^b $b > 0$	$<$	Orden de c^x $c > 1$	$<$	Orden de x^{dx} $d > 0$

Infinitos

Reglas de comparación

1. Dadas dos potencias de x, la de mayor exponente es un infinito de orden superior.
2. Dadas dos funciones exponenciales de base mayor que 1, la de mayor base es un infinito de orden superior.
3. Cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier potencia de x.
4. Las potencias de x son infinitos de orden superior a las funciones logarítmicas.
5. Dos polinomios del mismo grado o dos exponenciales de la misma base son infinitos del mismo orden.

Reglas de comparación

Comparación entre infinitos. Ejemplos

- $\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{x^7-10}}{x^3-3}\right)\right)=\infty$, por la Regla 1, ya que $x^{\frac{7}{2}}>x^3$
- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{5x^3}}{2^{x^3}}\right)=\infty$, por la Regla 2, ya que $e>2$
- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5e^x}{x^{32}+5x^2-1}\right)=\infty$, por la Regla 3.
- $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{log(x^{82}-9)}{3x^2}\right]=0$, por la Regla 4
- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^{4.5}-3x^2+1}{\sqrt{9x^9+2x^5-3x^3-5}}\right)=\frac{5}{3}$, por la Regla 5

Resolución analítica de límites. Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x \to 0} x \left(e^x - \frac{1}{x}\right)$ Sol.: -1
2. $\lim\limits_{x \to 3^-} \left(\frac{|2x^2-5x-3|}{x^2-9}\right)$ Sol.: -7/6
3. $\lim\limits_{x \to 4} \left(\frac{|x-4|}{x-4}\right)$ Sol.: $\nexists\ lim$
4. $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{x-a}{x^3-a^3}\right)$ Sol.: $1/3a^2$
5. $\lim\limits_{t \to 4} \left(\frac{t^2-16}{2-\sqrt{t}}\right)$ Sol.: -32

Límites en el infinito. Ejemplo:

Estudiar la existencia de asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{8-3^x}{2+3^x}$$

Resolución mediante aproximaciones alternativas

Ejemplos

En ocasiones encontraremos límites que no podremos resolver con simples operaciones algebraicas como las vistas hasta ahora. Sin embargo, aún tenemos otros recursos disponibles, como por ejemplo:

Aproximación gráfica al límite $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ Sol.: 1

Tablas de valores $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ Sol.: 1/2

Aplicación de las propiedades de los límites $\lim_{x \to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x}$ Sol.: 2.

Estas propiedades, entre las que se incluye el *principio de sustitución* por expresiones equivalentes, se estudiarán a continuación

Principio de sustitución. Infinitésimos equivalentes

Principio de sustitución

Si tenemos expresiones del tipo $f(x) \cdot g(x)$ o bien $\frac{f(x)}{g(x)}$ y estamos calculando su límite cuando $x \to a$, podemos sustituir $f(x)$ o $g(x)$ por una expresión equivalente.

Equivalencias más usuales cuando $\mathbf{f(x) \to 0}$

- $\operatorname{sen} f(x) \sim \operatorname{arc\,sen} f(x) \sim \tan f(x) \sim \arctan f(x) \sim \log\left(1 + f(x)\right) \sim f(x)$
- $1 - \cos f(x) \sim \frac{(f(x))^2}{2}$
- $a^{f(x)} - 1 \sim f(x) \cdot \log a$. En particular: $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$
- $\log\left(1 + f(x)\right) \sim f(x)$. Esta equivalencia se puede expresar de la siguiente manera: si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1 \Rightarrow \log f(x) \sim f(x) - 1$

Límites equivalentes en el infinito

Equivalencias útiles cuando $\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty$:

- $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n$
- $\log\left(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0\right) \sim \log x^n;\ a_n > 0$

Principio de sustitución

Ejemplo de aplicación INCORRECTA

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{x^3} \nsim \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} = 0$. No debe aplicarse la sustitución en sumandos o restandos.

Aplicación CORRECTA

Sin embargo, al ser:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{x^3} = \operatorname{sen} x \frac{1-\frac{1}{\cos x}}{x^3} = \sin x \frac{\cos x - 1}{x^3 \cos x}$$

Ahora sí es posible aplicar equivalencias, y por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{sen} x \frac{\cos x - 1}{x^3\cos x}\right) \sim \lim_{x\to 0}\left(x\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^3\cdot 1}\right) = -\frac{1}{2}$$

Resolución analítica de límites. Ejemplos:

Ejemplo de resolución de indeterminaciones del tipo 1^{∞}:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{4x^2+1}$ Sol.: e^{-4}

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[x]{\left(\frac{x^2-2}{x^2+x-1}\right)^{3x^2+1}}$ Sol.: e^{-3}

Ejemplos de aplicación de infinitésimos equivalentes:

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\tan x}\right)^{\frac{1}{x \cdot \operatorname{cosec} x}}$ Sol.: 1

4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}$ Sol.: 1/2

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(e^x-1)^2 \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$ Sol.: 0

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{3 \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^5 x}$ Sol.: $\frac{1}{12}$

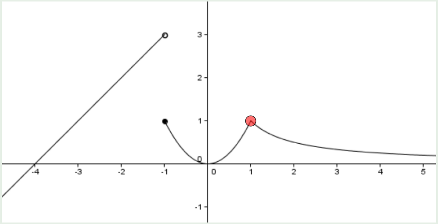
Definición

Dada $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, se dice que f es continua en un punto $x_0 \in Df$ si se verifica que:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Implicaciones:

1. $\exists\ f(x_0)$
2. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
3. $f(x_0) = \lim_{x \to x_0}$

Ejemplo



Tipos de discontinuidades

Dada $f(x)$, evaluada en un punto $x_0 \in Df$, se tiene:

- Discontinuidad evitable

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

- Discontinuidad de primera especie (o de *salto finito*)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^+} = L_2 \quad \textit{siendo } L_1 \neq L_2$$

  En este caso, se determina el salto de la función en x_0 como:

$$\left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right|$$

  Si el salto es finito, es finita. De lo contrario, infinita. Si los dos límites laterales de la función en el punto x_0 son infinitos, en ocasiones se habla de discontinuidad asintótica.

- Discontinuidad de segunda especie. En este caso, no existe alguno de los límites laterales.

Tipos de discontinuidades

Discontinuidades. Clasificación.

El siguiente cuadro resume los diferentes tipos de discontinuidades descritos:

$$\text{Función}\begin{cases}\text{continua}\\[2ex] \text{discontinua}\begin{cases}\text{evitable}\\[2ex] \text{no evitable}\begin{cases}\text{de primera especie}\begin{cases}\text{de salto finito}\\ \text{de salto infinito}\\ \text{asintótica}\end{cases}\\[2ex] \text{de segunda especie}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Fuente: `https://wikimedia.org/api/rest_v1/media/math/render/svg/724ab3fd31480cfa9a7d7efab5ab79be64b1c1f2`

Ejemplos de aplicación

Ejercicios de continuidad. Ejemplos:

1. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$$

2. Estudiar la continuidad de la función según los valores de a y b:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ bx + 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2e^{x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Continuidad en un intervalo cerrado. Teoremas.

Teorema de Weierstrass

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a $[a, b]$ donde f alcanza valores extremos absolutos, es decir:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \text{ para cualquier } x \in [a, b]$$

Este teorema equivale a decir que si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada en dicho intervalo

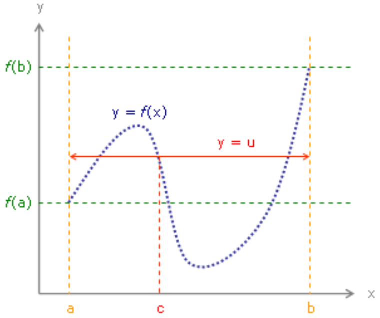
Teorema de Bolzano

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y f toma valores de signos opuestos en los extremos de dicho intervalo tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe al menos un punto interior c en el que $f(c) = 0$

Continuidad en un intervalo cerrado. Teoremas.

Teorema de los valores intermedios (regla de Darboux)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y u un numero real tal que $f(a) < u < f(b)$, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = u$.



Por lo tanto, $f(a)$ pasa a $f(b)$ tomando todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

Continuidad. Teoremas

Ejercicio:

Dada la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \log\left(\operatorname{sen}^2(x+a)+1\right) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad de $f(x)$ considerando los posibles valores de a,
2. Discutir la aplicabilidad del teorema de Bolzano en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Pendiente de la recta tangente en un punto

Cociente diferencial

El siguiente límite es especial: permite determinar la pendiente de la recta tangente en un punto dado x_0 de la función $f(x)$ (*punto de tangencia*):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esto permite avanzar el concepto de derivada, que se tratará a continuación.

Ejemplo aplicado:

Determina la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = 2\sqrt{x}$ en el punto $x_0 = 4$ [Sol.: 1/2]