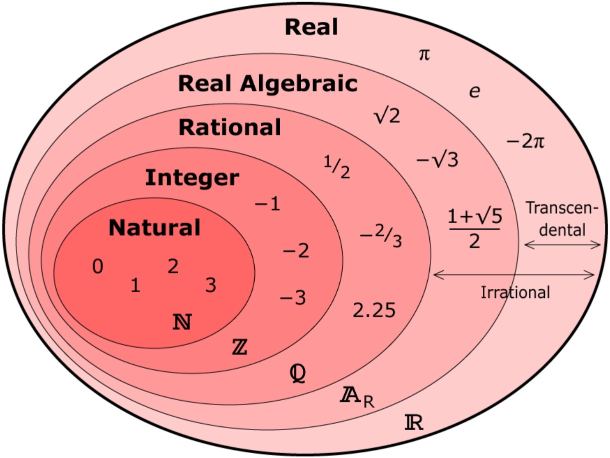
# Los números reales

$$\mathbb{R}$$

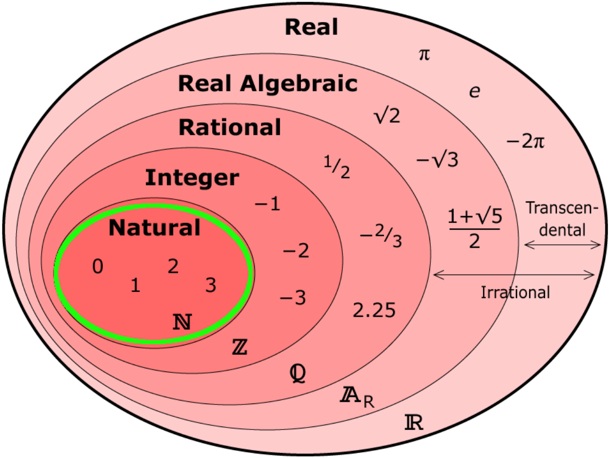
Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

# Contenidos


Real
Real Algebraic
Rational
Integer
Natural
0
1
2
3
$\mathbb{N}$
−1
−2
−3
$\mathbb{Z}$
1/2
−2/3
2.25
$\mathbb{Q}$
√2
−√3
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\mathbb{A}_R$
π
e
−2π
$\mathbb{R}$
Transcen-
dental
Irrational

# Números naturales ($\mathbb{N}$)



# Introducción

- Desde la antigüedad, las distintas civilizaciones han utilizado los números, motivados inicialmente por la necesidad de contar.
- Cada cultura ha empleado símbolos diferentes para su representación y normas diversas para trabajar con ellos.
- Estas normas son los llamados **sistemas de numeración**.

Relieve Jemer del S. VII con la cifra 605 resaltada
`http://elpais.com/elpais/2016/09/09/ciencia/1473436052_073929.html`

# Nuestro sistema de numeración

## El sistema decimal

- Utiliza **diez** dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9
- Es un sistema **posicional**
- El primer dígito a la derecha indica el número de **unidades**
- Cada posición hacia la izquierda indica el número de cierta potencia de diez.

## Ejemplos

- $528 = 500 + 20 + 8 = \mathbf{5} \times 10^2 + \mathbf{2} \times 10^1 + \mathbf{8} \times 10^0$
- $3671 = \mathbf{3} \times 10^3 + \mathbf{6} \times 10^2 + \mathbf{7} \times 10^1 + \mathbf{1} \times 10^0$

# El conjunto $\mathbb{N}$

## Definición

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

## Operaciones

Al conjunto $\mathbb{N}$ se le dota de dos operaciones:

- La suma $(+)$
- El producto $(\cdot$ ó $\times)$

## Propiedades

- $0 \in \mathbb{N}$
- Si $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$

# Propiedades de las operaciones en $\mathbb{N}$

| **Suma** | **Propiedad** | **Producto** |
|---|---|---|
| $(a+b)+c=a+(b+c)$ | Asociativa | $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ |
| $a+b=b+a$ | Conmutativa | $a\cdot b=b\cdot a$ |
| $a+0=0+a=a$ | Elem. neutro | $a\cdot 1=1\cdot a=a$ |
| | Elem. simétrico | |

**Distributiva del producto respecto de la suma:**

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

## Principio de inducción completa

*En matemáticas, la inducción es un razonamiento que permite demostrar proposiciones que dependen de una variable n que toma una infinidad de valores enteros.*

## Proposición:

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ proposiciones, una para cada número natural, tal que:

- $P_1$ es cierta
- $\forall n \in \mathbb{N} : P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Entonces $P_n$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$

**Ejemplo:**

**Demostrar por inducción que** $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

## Ejemplo:

**Demostrar por inducción que** $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

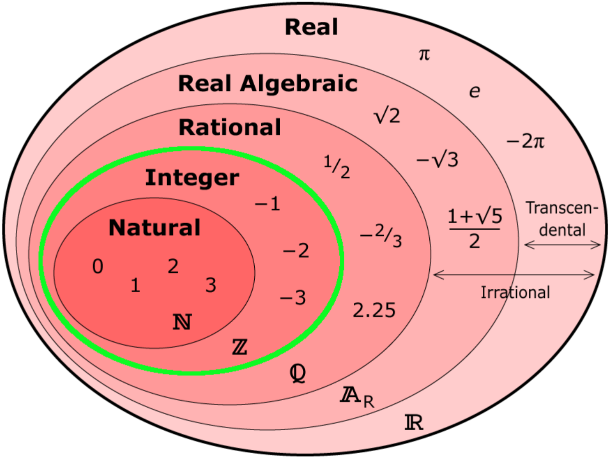
- Proposición $P_1, (n = 1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
- Proposición $P_2, (n = 2) : 1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$

Se cumple para los dos primeros valores. Supongamos que se cumple para $n$, y planteamos la suma hasta $n + 1$:

- Proposición $P_n, (n = n) : 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) \equiv \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \equiv \frac{(n+1)(n+2)}{2} \equiv \frac{[n+1]([n+1]+1])}{2}$

Y por lo tanto vemos que se cumple la expresión inicial para $n + 1$, por lo que queda demostrado por inducción.

# Números enteros ($\mathbb{Z}$)



# Definición y origen de $\mathbb{Z}$

**Problema:**

¿Cuál es la solución de la ecuación $1 + x = 0$?

**Solución:**

No se puede dar una respuesta sólo con $\mathbb{N}$

**Definición:**

- No nos falta, sino que nos sobra 1. Introducimos el **signo negativo**.
- Se define $x = -1$ como la solución de la ecuación

**Definición General:**

$$\mathbb{Z} := \{\pm a : a \in \mathbb{N}\}$$

# Propiedades de las operaciones en $\mathbb{Z}$

| **Suma** | **Propiedad** | **Producto** |
|---|---|---|
| $(a+b)+c = a+(b+c)$ | Asociativa | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ |
| $a+b = b+a$ | Conmutativa | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| $a+0 = 0+a = a$ | Elem. neutro | $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ |
| -a<br>Opuesto<br>$a+(-a) = 0$ | Elem. simétrico | |

**Distributiva del producto respecto de la suma**

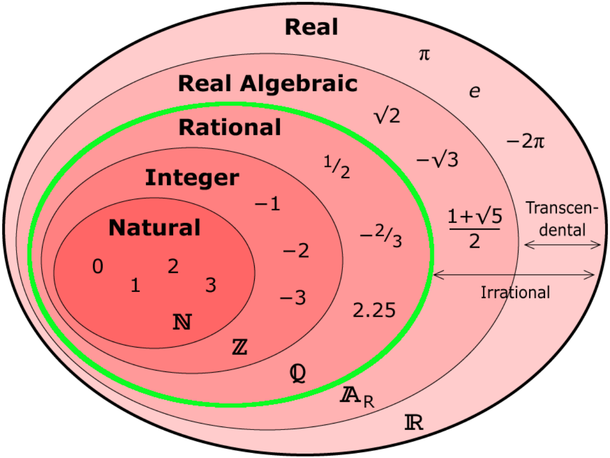
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

# Definición de Anillo

Decimos que $\mathbb{Z}$ es un **Anillo**

En álgebra moderna, un anillo es un sistema algebraico formado por un conjunto no vacío y dos operaciones internas, *suma* y *producto*, que cumplen ciertas propiedades.

# Números racionales ($\mathbb{Q}$)



# Definición y origen de $\mathbb{Q}$

## Definición

- El conjunto $\mathbb{Q}$ de los *números racionales* consta de los números expresables como cocientes $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$
- Por tanto, todo entero $n \in \mathbb{Z}$ es racional, ya que $n = \frac{n}{1}$

## Definición general

$$\mathbb{Q} := \{\tfrac{a}{b} : a, b_{(\neq 0)} \in \mathbb{Z}\}$$

# Equivalencia y fracción irreducible

## Criterio de equivalencia

- $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes $\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Todo racional admite por tanto infinitas expresiones como fracción.
- La **fracción irreducible** (o **canónica**) es la que tiene el denominador más pequeño posible

## Criterio de irreducibilidad

- Sea $b > 0$, entonces $\frac{a}{b}$ es irreducible *sii* $m.c.d.(a, b) = 1$, es decir, $a$ y $b$ son *coprimos*.

## Ejemplo:

$$0.26 = \frac{13}{50} = \frac{26}{100} = \frac{39}{150} = \ldots = \frac{13k}{50k}$$

# Expresiones decimales

## Situaciones:

Data la fracción $a/b$, pueden ocurrir dos situaciones distintas:

1. El cociente termina en un resto nulo
2. El cociente no termina y los restos se repiten cíclicamente

## Ejemplos:

1. Expresiones decimales **finitas**:

$$7/25 = 0.28 = 0.28\overline{0} = 0.27\overline{9}$$

Cabe clasificarlas por tanto como *expresiones de período* 0 *ó* 9

2. Expresiones **decimales periódicas**: se abrevia su escritura indicando con una barra horizontal su *período*:

- $1/6 = 0.16666666666667 = 0.1\overline{6}$ (período 6)
- $1/7 = 0.14285714285714 = 0.\overline{142857}$ (período 142857)

# Propiedades de las operaciones en $\mathbb{Q}$

| Suma | Propiedad | Producto |
|---|---|---|
| $(a+b)+c = a+(b+c)$ | Asociativa | $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ |
| $a+b = b+a$ | Conmutativa | $a\cdot b = b\cdot a$ |
| $a+0 = 0+a = a$ | Elem. neutro | $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ |
| -a<br>Opuesto<br>$a+(-a)=0$ | Elem. simétrico | $\frac{1}{a}$<br>Inverso<br>$a\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cdot a = 1$ |

## Distributiva del producto respecto de la suma

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

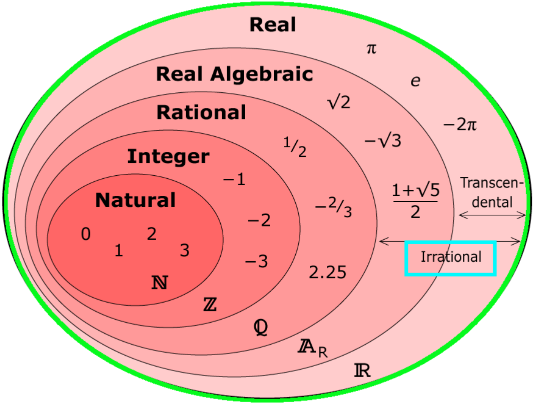
# Definición de Cuerpo

## Decimos que $\mathbb{Q}$ es un **Cuerpo**

En álgebra abstracta, un cuerpo (a veces llamado campo como traducción de inglés field) es una estructura algebraica en la cual las operaciones llamadas adición y multiplicación se pueden realizar y cumplen las propiedades: asociativa, conmutativa y distributiva de la multiplicación respecto de la adición, además de la existencia de inverso aditivo, de inverso multiplicativo y de un elemento neutro para la adición y otro para la multiplicación, los cuales permiten efectuar las operaciones de sustracción y división (excepto la división por cero)

# Números irracionales ($\mathbb{I}$)

A los números reales que no son racionales se les denomina irracionales ($\mathbb{I}$)



# Números irracionales ($\mathbb{I}$)

## Problema

- ¿Cuál es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1?:
$$L^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow L = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

## Definición

- Los números reales incluyen a los numeros racionales y a los irracionales
- Nos referiremos a $\mathbb{R}$ como el **cuerpo** de los números reales

## Definición formal

$$\mathbb{I} := \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

### Definición:

Si tenemos una ecuación del tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0$$

, tal que $a_n \neq 0$, $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0\} \subset \mathbb{Z}$ sus raíces reales, si existen, se denominan **números algebraicos**

### Ejemplos:

- $13x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{13} :\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ es algebraico
- $x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} :\Rightarrow x \in \mathbb{I}$ es algebraico. Por tanto, algunos números irracionales son algebraicos

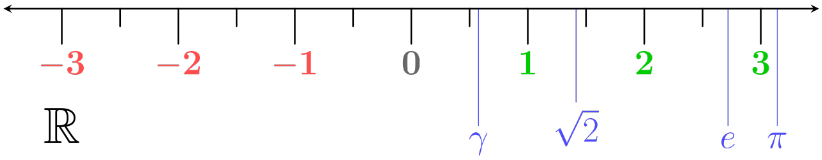
### Definición:

Los números reales que no son algebraicos son **trascendentes**

# La recta real

Los numeros reales están en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta en la que se define:

- Un **punto de origen** (0)
- **Una escala de medida de longitudes**, que asigna a otro punto distinto (1), situado a su derecha, **distancia unidad** con respecto del origen.



# Relación de orden y módulo

## Relación de orden

- La **relación de orden** usual en $\mathbb{R}$ queda reflejada en la recta real de modo muy simple:

$$a < b \Leftrightarrow a \text{ está a la izquierda de } b$$

- Un número $x$ es **positivo** si $x > 0$ y **negativo** si $x < 0$

## Módulo

- El módulo (o valor absoluto) de $x \in \mathbb{R}$ se define como:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- La **distancia** entre $a$ y $b$ se define como $|b - a|$

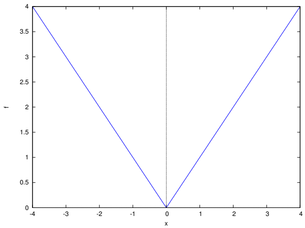
# Valor absoluto

Las propiedades del módulo se pueden generalizar para $|f(x)|$:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

## Ejemplo con MAXIMA

```
>>> f(x):=abs(x);
>>> plot2d(f,[x,-4,4]);
```



# Propiedades del orden y del módulo

## Propiedades del orden

$$a < b \Rightarrow \begin{cases} b > a \\ a + c < b + c, \forall c \\ ac < bc, \forall c > 0 \\ ac > bc, \forall c < 0 \\ -a > -b \end{cases}$$

## Propiedades fundamentales del módulo

| | |
|---|---|
| $\lvert a \rvert \geq 0$ | No negatividad |
| $\lvert a \rvert = 0 \iff a = 0$ | Definición positiva |
| $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$ | Propiedad multiplicativa |
| $\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ | Desigualdad triangular |
| $-\lvert a \rvert \leq a \leq \lvert a \rvert$ | |

# Propiedades adicionales del módulo

## Propiedades adicionales

$|a| = |-a| \geq 0$ Simetría

$|a-b| = 0 \iff a = b$ Identidad de indiscernibles

$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$ Desigualdad triangular

$|a-b| \geq ||a| - |b||$

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \forall b \neq 0$ Preservación de la división

### Inecuaciones útiles:

- $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$
- $|a| \geq b \iff a \geq -b \wedge b \leq a$

Que son de utilidad en la resolución de inecuaciones, p. ej.:

$$|x-2| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-2 \leq 4$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 6$$

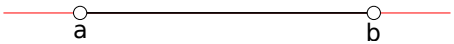
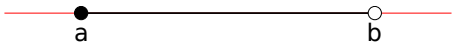
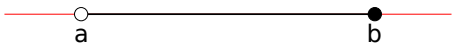
# Ejemplos

**Resolver las siguientes ecuaciones:**

1. $1 - |2 - x| = -6$
2. $|x| + |x - 1| = -3$
3. $|1 - x| = |3x - 1|$

# Notación de intervalos finitos

Dados dos números reales $a \leq b$, definimos:

| Intervalo | Símbolo | Definición | Representación |
|---|---|---|---|
| abierto | $(a, b)$ | $\{\forall x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ |   |
| cerrado | $[a, b]$ | $\{\forall x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ |   |
| semiabierto | $[a, b)$ | $\{\forall x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ |   |
| semiabierto | $(a, b]$ | $\{\forall x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ |   |

Al número $b - a$, se le llama longitud del intervalo

# Entorno (abierto) de un número real

- Si $x_0 \in (a, b)$, todo conjunto que contenga a $(a, b)$ se llama un **entorno** de $x_0$
- **Entorno de centro** $a$ y **radio** $r$:

$$E(a, r) = (a - r, a + r) \;\mid\; r \in \mathbb{R}^+$$

- **Entorno reducido** de centro $a$ y radio $r$:

$$E^*(a, r) = (a - r, a + r) - \{a\} \;\mid\; r \in \mathbb{R}^+$$

- Entorno por la **derecha** de centro $a$ y radio $r$:

$$E^+(a, r) = (a, a + r) \;\mid\; r \in \mathbb{R}^+$$

- Entorno por la **izquierda** de centro $a$ y radio $r$:

$$E^-(a, r) = (a - r, a) \;\mid\; r \in \mathbb{R}^+$$

Esta idea se generaliza para entornos cerrados

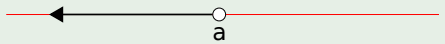
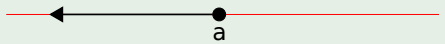
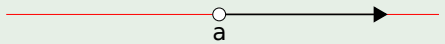
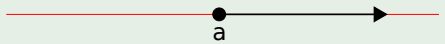
# La recta real extendida ($\overline{\mathbb{R}}$)

## Definición

$\overline{\mathbb{R}}$ es un espacio métrico que se obtiene a partir de $\mathbb{R}$ por la añadidura de dos elementos: $+\infty$ y $-\infty$. $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty)$

- $(-\infty, 0)$ : todos los números reales **negativos**
- $(0, +\infty)$ : todos los números reales **positivos**

## Notación de intervalos infinitos

| Nombre | Símbolo | Definición | Representación |
|---|---|---|---|
| Semirrecta abierta | $(-\infty, a)$ | $\{\forall x \in \mathbb{R} : x < a\}$ |   |
| Semirrecta cerrada | $(-\infty, a]$ | $\{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ |   |
| Semirrecta abierta | $(a, \infty)$ | $\{\forall x \in \mathbb{R} : x > a\}$ |   |
| Semirrecta cerrada | $[a, \infty)$ | $\{\forall x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ |   |

# Operaciones aritméticas en $\overline{\mathbb{R}}$

Las propiedades aritméticas de $\mathbb{R}$ pueden extenderse parcialmente a $\overline{\mathbb{R}}$ del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
a+\infty = +\infty + a &= +\infty, && a \neq -\infty \\
a-\infty = -\infty + a &= -\infty, && a \neq +\infty \\
a\cdot(\pm\infty) = \pm\infty\cdot a &= \pm\infty, && a \in (0,+\infty] \\
a\cdot(\pm\infty) = \pm\infty\cdot a &= \mp\infty, && a \in [-\infty,0) \\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0, && a \in \mathbb{R} \\
\frac{\pm\infty}{a} &= \pm\infty, && a \in \mathbb{R}^+ \\
\frac{\pm\infty}{a} &= \mp\infty, && a \in \mathbb{R}^-
\end{aligned}
$$

# Ejemplos

**Describir explícitamente los siguientes conjuntos:**

1. $\frac{x-1}{x+2} > 0$
2. $\frac{(x+3)(x-4)}{X^3-2x^2-3x} < 0$
3. $\frac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1$

# Propiedades de potencias y raíces

## Notación de potencias

$$
\begin{aligned}
x^p \cdot x^q &= x^{p+q} \\
(x^p)^q &= x^{pq} \\
x^p y^p &= (xy)^p \\
x^{-p} &= \frac{1}{x^p}
\end{aligned}
$$

$$
p > q \Rightarrow \begin{cases} x^p > x^q & \text{si} \quad x > 1 \\ x^p < x^q & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}
$$

$$
x > y \Rightarrow \begin{cases} x^p > y^p & \text{si} \quad p > 0 \\ x^p < y^p & \text{si} \quad p < 0 \end{cases}
$$

## Transcripción a las raíces

$(p = 1/n, q = 1/m)$

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} &= \sqrt[nm]{x^{n+m}} \\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} &= \sqrt[mn]{x} \\
\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} &= \sqrt[n]{xy}
\end{aligned}
$$

**Nota:**

Estas relaciones son válidas siempre que $x, y > 0$, y las potencias y raíces se interpreten como positivas. Los símbolos $xp$, $\sqrt[p]{x}, \ldots$ tendrán esta interpretación, de no indicarse lo contrario.

# Logaritmos

## Definición

- Si $x = b^n$, se dice que $n$ es el *logaritmo de $x$ en base $b$*: $\log_b x = n$
- La base $b$ es positiva y mayor que 1 ($b > 0$, $b \neq 1$)

## Ejemplos

$log_7 49 = 2$ $log_{10} 0.001 = -3$ $log_2 10 = 3.3219281$

## Logaritmos más comunes

- Base 10 (logaritmos **decimales**, o de Briggs). ($log_{10}$)
- Base $e = 2.71828\ldots$ (**naturales** o informalmente *neperianos*). $\log(:= \log_e, := Ln)$

# Propiedades generales de los Logaritmos

1. $log_b b = 1$
2. $log_b 1 = 0$
3. $log_b xy = log_b x + log_b y$
4. $log_b x/y = log_b x - log_b y \Rightarrow log_b 1/y = -log_b y$
5. $log_b x^c = c \cdot log_b x$
6. $log_{b'} x = \frac{log_b x}{log_b b'}$ (relación bajo cambio de la base)

## Ejemplos

Calcular el valor de

$$\frac{1}{2}\log_{10}(12 - 2\sqrt{11}) + \frac{1}{2}\log_{10}(12 + 2\sqrt{11})$$

## Logaritmos en MAXIMA

- La función **log(x)** representa el logaritmo natural
- Maxima no tiene definida una función para el logaritmo de base 10 u otras bases. El usuario puede utilizar el **cambio de base**:

```
>>> log10(x) := log(x) / log(10);
```

# Espacio métrico

## Definición

Se considera un conjunto cualquiera $E = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$, a cuyos elementos llamaremos puntos, y una aplicación $d$ definida por:

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P_1, P_2) & \longrightarrow & d(P_1, P2) \end{array}$$

que cumple los siguientes axiomas $\forall P_1, P_2, P_3 \in E$:

1. Positividad: $d(P_1, P_2) \geq 0$
2. Simetría: $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$
3. Triangularidad: $d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$

Toda aplicación $d$ que verifica los anteriores axiomas recibe el nombre de distancia o *métrica*. Al conjunto $E$ dotado de dicha métrica, simbólicamente $(E, d)$, se le denomina espacio métrico.

# Distancia euclídea

- En $\mathbb{R}$, la aplicación que asigna a cada par $x, y \in \mathbb{R}$ el número

$$d(x, y) = |x - y|$$

  se denomina distancia euclídea.

- En $\mathbb{R}^2$ esta distancia euclídea se define para $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ como:

$$d(P, Q) = d\left[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\right] = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

- Este concepto se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$, de modo que la distancia euclídea entre $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $Q = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$d(P, Q) = [(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)] =$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

# Bola abierta y bola cerrada

## Bola abierta. Definición:

Se denomina bola abierta (o simplemente *bola*) de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ d(x, a) < r\}$$

## Bola cerrada. Definición:

Se denomina bola cerrada de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ d(x, a) \leq r\}$$

# Bola abierta y bola cerrada

## Bolas. Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea, $B(a,r)$ es lo mismo que el entorno $E(a,r)$ antes visto, es decir, el intervalo $(a-r, a+r)$. Si la bola es cerrada, entonces $\overline{B}(a,r), a \in \mathbb{R} \equiv [a-r, a+r]$.
2. En $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea, $B(a,r)$ es el círculo de centro $a$ y radio $r$ (si la bola es cerrada, se tomaría el círculo junto con su borde –la circunferencia–)
3. En $\mathbb{R}^3$ con la distancia euclídea, $B(a,r)$ es el interior de la esfera de centro $a$ y radio $r$ (si la bola es cerrada, se tomaría la esfera completa, incluída su superficie).

# Conjunto acotado

Sea A un conjunto ordenado $(A, \leq)$ y sea $B \subset A, \ B \neq \emptyset$

- Se denominan cotas superiores, o mayorantes de $B$ a los elementos $z \in A$ tales que $y \leq z \ \ \forall y \in B$

Si un conjunto tiene mayorantes se dice que está acotado superiormente

- Se denominan cotas inferiores, o minorantes de $B$ a los elementos $z \in A$ tales que $y \geq z \ \ \forall y \in B$

Si un conjunto tiene minorantes se dice que está acotado inferiormente

# Conjunto acotado

**Ejemplos:**

- Dado el intervalo $(-2, 5]$, son cotas superiores todos los reales $x \in \mathbb{R} \geq 5$
- $\mathbb{Z}$ no está acotado ni superiormente ni inferiormente
- $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, y sí inferiormente.
- $\{3, 5, 7, 9\} \subset \mathbb{N}$, está acotado superiormente por los elementos del conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 9\}$, y acotado inferiormente por $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$

# Elementos máximo y mínimo

## Definición

Dado el conjunto ordenado $(A, \leq)$:

- Un elemento $a \in A$ es el máximo de $A$ si cualquier otro elemento de $A$ es menor o igual que él, es decir, se verifica que: $x \leq a, \ \forall \ x \in A$. Se denota como $max(A)$
- Un elemento $a \in A$ es el mínimo de $A$ si cualquier otro elemento de $A$ es mayor o igual que él, es decir, se verifica que: $x \geq a, \ \forall \ x \in A$. Se denota como $min(A)$

# Extremos: elementos supremo e ínfimo

## Supremo. Definición:

Si el conjunto $A$ se encuentra acotado superiormente, entonces se dice que una cota superior es un supremo (también *mínima cota superior*, o *extremo superior*) si es menor que cualquier cota superior de $A$. Se denota como $sup(A)$

## Ínfimo. Definición:

Si el conjunto $A$ se encuentra acotado inferiormente, entonces se dice que una cota inferior es un ínfimo (también *máxima cota inferior*, o *extremo inferior*) si es menor que cualquier cota superior de $A$. Se denota como $inf(A)$

**Propiedades:**

- Si el supremo(ínfimo) existe, entonces éste es único.
- Un conjunto tiene máximo(mínimo) si y solamente si el supremo(ínfimo) es un elemento de dicho conjunto.

**Axioma del supremo(ínfimo):**

Todo conjunto acotado superiormente(inferiormente) tiene supremo(ínfimo)

**Ejemplo:**

- Los extremos de un intervalo acotado son el supremo e ínfimo de dicho intervalo independientemente de si pertenecen o no a dicho intervalo
- En el caso particular de que alguno de ellos esté en dicho intervalo serán, además, máximo o mínimo, según corresponda.

## Ejemplo:

Dado el conjunto $A$, hallar el extremo superior, el extremo inferior, y el máximo y el mínimo si los tiene.

$$A = x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + 5x - 6 \leq 0$$