Series numéricas

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Tabla de Contenidos

Definición: serie numérica

Serie numérica. Definición

Dada una sucesión infinita de números reales $\{a_n\}$, se denomina *serie numérica* a la suma de sus infinitos términos, denotada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

- a_n es el término general de la serie
- La suma parcial enésima de la serie es $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- El resto enésimo de la serie es: $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$$

Carácter de una serie numérica

Serie numérica. Carácter:

Dependiendo del carácter de la sucesión de sumas parciales se definirá el carácter de la serie.

- Si $\{a_n\}$ es convergente, entonces se dirá que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$$

  , siendo S en este caso la suma de la serie

- Si $\{a_n\}$ es divergente, entonces se dirá que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, y se denota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$
- Si $\{a_n\}$ es oscilante, entonces se dirá que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es oscilante.

Series notables

Serie geométrica

La series geométricas son de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, siendo $a \neq 0$ el primer término de la serie y r la razón. Se cumple:

- Si $|r| < 1$ la serie converge, y además

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}. \quad \text{En general,} \quad \sum_{n=k}^{\infty} ar^n = \frac{ar^k}{1-r}$$

- Si $r \geq 1$ la serie diverge
- Si $r \leq -1$ la serie es oscilante

Series notables

Series armónicas generalizadas

Son de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Se cumple que

- Si $\alpha \leq 1$ la serie diverge
- Si $\alpha > 1$ la serie converge

Ejemplo:

La serie cuyo término general viene dado por $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente, ya que es una serie armónica generalizada en la que $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

Condición necesaria de convergencia

Condición necesaria de convergencia. Teorema:

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente, entonces } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Se trata de una condición necesaria pero no suficiente. Además:

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es divergente}$$

Ejemplo:

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ cumple la condición necesaria de convergencia y sin embargo, es divergente, ya que se trata de la serie armónica (con $\alpha = 1$).

Ejemplos

Comprobar la condición necesaria de convergencia en las siguientes series y razonar, en consecuencia, cuál será su carácter:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^5}+2}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n$

Series de términos positivos

Las series de términos positivos son las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{con} \quad a_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ es de términos positivos.

Una serie de términos positivos no puede ser oscilante, es decir, debe ser convergente, o divergente a $+\infty$

Criterio del cociente

Criterio del cociente (o criterio de d'Alembert)

Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos, cumpliendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \quad \text{ó} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- Si $L > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente
- Si $L = 1$ es un caso dudoso. En este caso, sólo se puede asegurar que la serie diverge si existe un n_0 tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para $n > n_0$

Criterio del cociente

Ejemplo:

Determinar la convergencia de las series:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{\left((n+1)!\right)^2}$$

Criterio de la raíz

Criterio de la raíz (o criterio de Cauchy). Teorema:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, y

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \text{Entonces:}$$

- Si $\lambda < 1$ la serie converge
- Si $\lambda > 1$ la serie diverge
- Si $\lambda = 1$ es un caso dudoso, en el que sólo se puede decir que $\sqrt[n]{a_n} > 1$ para infinitos términos de a_n

El criterio de la raíz es especialmente adecuado para series que involucran n-ésimas potencias

Criterio de la raíz

Ejemplos

Determinar el carácter de las series:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n+2}\right)^n$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{n^n}$$

Criterio de Raabe

Criterio de Raabe

Sea $\{a_n\}$ una serie de términos positivos. Si existe el límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

con $L \in \mathbb{R}$, entonces:

- Si $L > 1$ la serie converge
- Si $L < 1$ la serie diverge

El criterio de Raabe puede resultar útil cuando el criterio del cociente no permite determinar el carácter de la serie

Criterio de Raabe

Ejemplo:

Determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n+1}$$

Series mayorantes y minorantes

Series mayorantes y minorantes. Definición

Dadas dos series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si $a_n \geq b_n \quad \forall n > n_0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si $a_n \leq b_n \quad \forall n > n_0$

Criterio de comparación

Se consideran la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos positivos:

- Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente.
- Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también es divergente.

Series de términos positivos. Criterio de comparación

Comparación de series. Ejemplo

Se consideran las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \quad (divergente)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n$$

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, se puede concluir que ésta es divergente.

Criterio de comparación por paso al límite

Se consideran las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Entonces, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$ ambas series tienen el mismo carácter

es decir, ambas convergen o divergen. Además, puede afirmarse que:

- Si $\lambda = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces a_n es convergente
- Si $\lambda = +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces a_n es divergente

El criterio de comparación por paso al límite es de utilidad si es posible apoyarse en una serie b_n cuyo carácter es conocido.

Criterio de comparación por paso al límite

Criterio de comparación por paso al límite. Ejemplos:

Determinar el carácter de las siguientes series:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4+2^n}$$

Series alternadas

Series alternadas

Las series alternadas son de una de las formas siguientes:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + \dots \quad (a_n > 0)$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} = -a_1 + a_2 - \dots \quad (a_n > 0)$$

Nota:

No son alternadas las series cuyos terminos cambian de signo de forma irregular, o bien que cambien de signo siguiendo un patrón regular, pero no término a término

Teorema de Leibniz

Teorema de Leibniz:

La serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad (a_n > 0)$$

converge si la sucesión (a_n) es monótona decreciente y se verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Conviene recordar que el Teorema de Leibniz es el único posible al trabajar con series alternadas, no siendo de aplicación ninguno de los anteriores, que son para series de términos positivos exclusivamente.

Ejemplo:

Determinar el carácter de las series:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$$

Convergencia absoluta

Definición

Una serie de términos cualesquiera, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es absolutamente convergente si la serie de sus valores absolutos es convergente, es decir, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Teorema:

Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente

Convergencia absoluta. Proposición:

Si una serie es convergente pero no es *absolutamente convergente* se denomina condicionalmente convergente

Series de potencias

Series de potencias. Definición

Se define una *serie de potencias centrada en el punto* a como una expresión de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

A menudo se interpreta como una *función de* x:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Convergencia de una serie de potencias

Convergencia

El dominio de la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ será el conjunto de valores de x donde la serie converge, siendo $f(x)$ el valor de dicha serie

De lo enunciado se deduce que toda serie de potencias converge en el punto $x = a$:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-a)^n = a_0$$

Convergencia de una serie de potencias

Teorema de Abel

Considerando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-a)^n$, se cumple **una y sólo una** de las siguientes afirmaciones:

1. La serie converge sólo en el punto a. En este caso, $R = 0$
2. Existe un número $R > 0$ de forma que la serie converge en $|x-a| < R$ y no converge en $|x-a| > R$
3. La serie converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$. En este caso, $R = \infty$

Radio de convergencia e Intervalo de convergencia

El número R es el radio de convergencia de la serie de potencias
El conjunto de los valores de x para los cuales la serie de potencias converge es el intervalo de convergencia de la serie de potencia

Radio de convergencia. Cálculo práctico

Criterio del cociente. Proposición:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias y aplíquese el criterio del cociente sobre la serie en valor absoluto tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to L$, donde $0 \leq L \leq \infty$. Entonces:

- Si $L = 0$, el radio de la serie es $R = \infty$
- Si $L = \infty$, el radio de la serie $R = 0$
- Si $0 < L < \infty$, entonces el radio de convergencia es $R = 1/L$

Nota:

Análogamente, lo expuesto para el criterio del cociente puede aplicarse del mismo modo para el criterio de la raíz, de tal modo que $\sqrt[n]{|a_n|} \to L$

Radio de convergencia

Ejemplos:

Hallar el radio de convergencia de las series de potencias:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Intervalo de convergencia

Hasta el momento no se ha hablado de la convergencia en los puntos *terminales* del intervalo de convergencia. Así, cada punto terminal debe analizarse separadamente respecto a la convergencia o divergencia de la serie en dicho punto.

Ejemplos. Hallar el intervalo de convergencia:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}$$
3. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Derivación e integración de series de potencias. Teorema:

Si la función f viene definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ con radio de convergencia $R>0$, entonces:

- f es continua en todo punto interior al intervalo de convergencia
- f es derivable en el intervalo de convergencia y su derivada $f'(x)$ puede obtenerse mediante la derivación término a término:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \quad \text{con radio de convergencia } R$$

- f es integrable en el intervalo de convergencia y además, se puede integrar término a término:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int a_n (x-a)^n dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C$$

siendo el radio de convergencia de la derivada también R