Sucesiones numéricas

Joaquín Bedia

Dpto. Matemática Aplicada y CC de la Computación
Universidad de Cantabria

Tabla de Contenidos

1. Sucesiones numéricas
   - Definición. Término general de la sucesión
   - Sucesiones monótonas. Sucesiones acotadas
   - Límite de una sucesión. Convergencia. Divergencia. Oscilación.
   - Teoremas
2. Cálculo de límites
   - Propiedades de los límites
   - Cálculo práctico de límites
   - Criterio de Stolz

Sucesiones numéricas

Sucesión numérica. Definición informal

- Un conjunto de objetos ordenados mediante los *números naturales*.
- Si esta colección es de números se dirá que la sucesión es numérica. En este tema estudiaremos las sucesiones de números reales.
- Cada uno de los elementos de una sucesión se denomina término.

Notación

A cada uno de los elementos de una sucesión se les denomina término de la sucesión. Se designan como:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Sucesión numérica. Definición formal

Por norma general, la sucesión numérica se formaliza como una aplicación de los números naturales en los números reales: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

- Se define una sucesión de puntos en un espacio métrico (E, d) como una aplicación de $\mathbb{N} \in (E, d)$ que a cada número natural le asigna un punto del espacio métrico:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{N} &\rightarrow (E, d) \\ n &\rightarrow f(n) = a_n \end{aligned}$$

- Se llama rango de la sucesión al conjunto de los números reales

$$\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Igualdad

Dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son iguales si $a_n = b_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Representación y ejemplos

Ejemplo:

Dada la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, su *rango* vendrá determinado por los números:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$$

, que son los valores que tome el *término general* al dar a n los valores $1, 2, 3 \dots$

Representación gráfica

Un sucesión puede representarse sobre la recta real y sobre el plano cartesiano

Término general de la sucesión

Término n-ésimo de la sucesión

- En ocasiones puede ser necesario "descubrir" el término general de la sucesión para poder estudiarla, si éste no es dado explícitamente.
- La búsqueda del término n-ésimo a partir del patrón observado en sus primeros términos es un ejemplo de razonamiento inductivo.

Ejemplos. Hallar el término general de las sucesiones:

1. $-1, 4, 9, 14, 19, 24, \dots$ (Progresión aritmética: $a_n = a_1 + d(n-1)$)
2. $\frac{11}{3}, \frac{8}{7}, \frac{5}{11}, \frac{2}{15}, \dots$
3. $\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{18}{5}, \frac{54}{5}, \dots$ (Progresión geométrica: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$)
4. $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{9}, \frac{17}{12}, \dots$
5. $-2, \frac{8}{2}, -\frac{26}{6}, \frac{80}{24}, -\frac{242}{120} \dots$

Sucesión monótona

Sucesión creciente

Una sucesión $\{a_n\}$ se denomina monótona creciente si se verifica que:

$$a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Si se verifica que $a_n < a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces se dice que es estrictamente creciente.

Sucesión decreciente

Análogamente, una sucesión $\{a_n\}$ se denomina monótona decreciente si se verifica que:

$$a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Si se verifica que $a_n > a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces se dice que es estrictamente decreciente.

Sucesión monótona

Sucesión monótona. Nota práctica:

En algunos casos, para probar que una sucesión es monótona creciente resulta útil probar que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Análogamente, para probar que una sucesión es monótona decreciente, puede probarse que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sucesión acotada

Cota superior

Se dice que un número real $K \in \mathbb{R}$ es cota superior de la sucesión $\{a_n\}$ si se verifica que:

$$a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se denomina supremo a la menor de las cotas superiores. Si el supremo es un término de la sucesión, se denomina máximo.

Cota inferior

Análogamente, un número real $k \in \mathbb{R}$ es cota inferior de la sucesión $\{a_n\}$ si se verifica que:

$$a_n \geq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se denomina ínfimo a la mayor de las cotas inferiores. Si el ínfimo es un término de la sucesión, se denomina mínimo.

Sucesión acotada

Sucesión acotada. Definición.

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está acotada superiormente si tiene alguna cota superior. De forma análoga, se dice que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente si tiene alguna cota inferior.
Una sucesión $\{a_n\}$ decimos que es acotada si está acotada superior e inferiormente.

Límite de una sucesión

Definición:

Se dice que un número real L es límite de una sucesión $\{a_n\}$, y se representa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, o bien $a_n \to L$ si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \text{ existe un } \ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ |a_n - L| < \varepsilon \ \ \forall n > n_0$$

La definición anterior se lee "límite cuando n tiende a infinito de $\{a_n\}$ igual a L". También se puede escribir $\lim a_n = L$, ya que n sólo puede tender a infinito.

Interpretación

La definición anterior significa que si queremos que los términos de la sucesión se alejen de L una distancia menor que ϵ, lo podemos conseguir para todos los términos posteriores a un cierto número natural n_0. Cuanto más pequeño sea ϵ más grande habrá que tomar el valor de n_0

Límite de una sucesión

Sucesión convergente. Definición

Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L, se dice que a_n es convergente, siendo $L \in \mathbb{R}$ un número finito

Unicidad del límite

Si la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, finito o no, este es único.

Ejemplo:

Dada la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}$, se tiene que $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

- Comprobar con una calculadora o programa de cálculo de forma intuitiva el valor de dicho límite
- Demostrarlo a partir de la definición dada

Sucesiones divergentes

Sucesión divergente

La sucesión $\{a_n\}$ tiende a infinito $(+\infty)$ si cualquiera que sea el número real k fijado, por grande que este sea, podemos conseguir que los términos de la sucesión superen dicho valor sin más que tomar valores de n mayores que un número natural n_0. Simbólicamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{R}\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; a_n > k \;\forall n > n_0$$

Análogamente, la sucesión $\{a_n\}$ tiende a menos infinito $(-\infty)$ si cualquiera que sea el número real k fijado, por grande que este sea, podemos conseguir que los términos de la sucesión sean menores que $-k$, sin más que tomar valores de n mayores que un número natural n_0. Simbólicamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{R}\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; a_n < -k \;\forall n > n_0$$

Sucesión oscilante

Existen otras sucesiones que no tienen límite, pero tampoco divergen.

Ejemplos:

- La sucesión cuyos primeros términos son los siguientes:
$$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \ldots$$
no es convergente, pero tampoco tiende a ∞ ni a $-\infty$. Los términos impares se hacen infinitamente grandes a medida que n crece. Sin embargo, los términos pares tienden a 0, para n suficientemente grande. Se dice que esta sucesión no tiene límite o bien que su carácter es oscilante.
- La sucesión cuyo término general es $a_n = (-1)^n \cdot n$. Los términos de esta sucesión tampoco se acercan a un número concreto. Tienden a $+\infty$ los términos pares y tienden a $-\infty$ los términos impares. No tiene límite.

Las sucesiones de los dos ejemplos anteriores se denominan oscilantes.

Teoremas

Teorema (Acotación):

Toda sucesión $\{a_n\}$ convergente es acotada

El *recíproco* del teorema anterior no es cierto. Ejemplo: La sucesión $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ (oscilante), es acotada, y sin embargo, no es convergente.

Teorema (Weierstrass):

Toda sucesión monótona y acotada es convergente.
Toda sucesión monótona y **no** acotada es divergente.

Teoremas sobre sucesiones. Resumen:

Acotación	*Weierstrass*
Convergente $\Rightarrow$ Acotada Divergente $\Rightarrow$ No acotada (No son ciertos los recíprocos)	Convergente $\Leftarrow$ Acotada y monótona Divergente $\Leftarrow$ No acotada y monótona (No son ciertos los recíprocos)

Propiedades de los límites

Límites. Propiedades.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad si\ b \neq 0$
5. $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = a^b \quad si\ a^b \neq 0^0$

Indeterminaciones

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^\infty$$

$$0^0$$

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \infty^0$$

Propiedades de los límites

Cálculo práctico de limites en el infinito. Expresiones racionales.

Si se trata de una sucesión cociente entre expresiones polinómicas del tipo:

$$a_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \ldots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \ldots + b_q}$$

se resuelve dividiendo numerador y denominador por n^k, siendo k el grado del polinomio de menor grado. En resumen, se cumple que:

- Si $p > q$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (depende del signo de a_0 y b_0)
- Si $p = q$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{a_0}{b_0}$
- Si $p < q$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Propiedades de los límites

Cálculo práctico de limites. Límites de expresiones irracionales.

Se resuelven multiplicando y dividiendo por la expresión radical "conjugada"

Cálculo práctico de limites. Límites de las formas $\infty^0, 0^0, 1^\infty$

Para calcular este tipo de límites se puede tomar logaritmos, de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b^n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n \log a_n}$$

En el caso particular de que la indeterminación sea del tipo 1^∞ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n \log a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n (a_n - 1)}$$

Límites de la forma 1^{∞}. Ejemplo: número e

Ejemplo: origen del número e

El número e es un número irracional de gran importancia matemática. La constante como tal fue descrita por Jacob Bernoulli en 1683, al calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Puede probarse que esta sucesión es monótona y acotada por lo que aplicando el *teorema de Weierstrass* se concluye que es convergente. El valor al que converge es el número e, un número irracional cuyas diez primeras cifras decimales son $2'7182818284\ldots$

Cálculo práctico de límites. Infinitésimos

Infinitésimos. Definición

Un infinitésimo es una sucesión convergente a 0

Infinitésimos. Propiedades

1. El producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo
2. El producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es un infinitésimo

En el cálculo de límites, si tenemos un infinitésimo como factor en la expresión de un **producto** o **cociente**, podemos sustituirlo por un infinitésimo equivalente, como veremos a continuación.

Cálculo práctico de límites. Sucesiones equivalentes

Sucesion equivalente. Definición:

Se dice que dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son equivalentes si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$
Se representa como $a_n \sim b_n$, ó $a_n \approx b_n$

Nota:

No debe confundirse la equivalencia con la igualdad

Sucesión equivalente. Proposición:

Sean tres sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$. Si $a_n \sim b_n$, entonces:

1. Si existe $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot c_n = L_1$, también existe $\lim_{n\to\infty} b_n \cdot c_n = L_2$, y además $L_1 = L_2$
2. Si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = L_1$, también existe $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = L_2$, y además $L_1 = L_2$

Cálculo práctico de límites. Sucesiones equivalentes

Tabla de sucesiones equivalentes:

A menudo nos apoyaremos en la equivalencia de series para la resolución analítica de límites. La siguiente tabla presenta las equivalencias más usuales:

1. Si $a_n \to 0$ (Infinitésimos equivalentes):

$$\operatorname{sen} a_n \sim a_n \sim \operatorname{arc\,sen} a_n \;;\; \tan a_n \sim a_n \sim \arctan a_n \;;\; 1-\cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2}$$

$$(1+a_n)^\lambda \to 1 \sim \lambda \cdot a_n \;;\; e^{a_n}-1 \sim a_n \;;\; \log(1+a_n) \sim a_n$$

2. Si $a_n \to 1$:

$$\log a_n \sim a_n - 1 \;; \quad \text{en particular: } \sqrt[n]{a}-1 \sim \frac{1}{n}\log a \quad \forall a>0$$

3. $\sqrt[n]{n} \sim 1$ y $\sqrt[n]{a} \sim 1$ cuando $n \to \infty$ $\forall a > 0$

4. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Fórmula de Stirling)

Órdenes de infinitud

Órdenes de infinitud. Definición:

Dadas dos sucesiones divergentes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se dice que $\{b_n\}$ es un infinito de orden superior al de $\{a_n\}$, si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

El conocimiento de los órdenes de infinitud nos conduce a criterios prácticos para calcular límites, cuando la expresión analizada sea cociente de infinitos de distinto orden.

- Si el infinito de mayor orden está en el numerador, el límite del cociente tiende a infinito.
- Si el infinito de mayor orden está en el denominador, el cociente tiene límite 0.

Órdenes de infinitud

Órdenes de infinitud. Tabla resumen:

La siguiente tabla muestra los órdenes fundamentales de infinitud. De izquierda a derecha los órdenes de los infinitos van decreciendo.

Potencial-Exp.	**Factorial**	**Exponencial**	**Potencial**	**Logaritmo**
$n^{a\cdot n}$ $(a>0)$	$n!$	b^n $(b>1)$	n^c $(c>0)$	$(\log_q n)^p$ $(q>1,\ p>0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{an}}{n!}=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{b^n}=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{n^c}=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^c}{(\log_q n)^p}=\infty$$

Comparación de infinitésimos (e infinitos)

Nota: Orden *vs.* equivalencia

- En la comparación de infinitésimos, es importante no confundir los conceptos de infinitésimos equivalentes con infinitésimos del mismo orden.
- Los infinitésimos equivalentes son siempre del mismo orden, pero en general, el recíproco no es cierto.

Ejemplo:

1. los infinitésimos $a_n = \frac{2n+1}{n^2+n+2}$ y $b_n = \frac{1}{n-1}$ son del mismo orden, pero no son equivalentes.
2. Los infinitésimos $a_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ y $b_n = \frac{1}{n-1}$ son del mismo orden y equivalentes

Teorema del valor absoluto

Teorema:

Dada la sucesión $\{a_n\}$, se cumple que si:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Ejemplo:

Aplicar el teorema del valor absoluto para determinar el carácter de la sucesión $\{a_n\}$:

$$a_n = \left\{1, -\frac{4}{3}, \frac{8}{7}, -\frac{16}{25}, \frac{32}{121}, \dots\right\}$$

Criterio de Stolz

Criterio de Stolz. Teorema:

Sean dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}, \quad \text{siempre que:}$$

1. $\{b_n\}$ sea una sucesión monónotona divergente,
   o bien:
2. $a_n \to 0, \;\; b_n \to 0$ y $\{b_n\}$ sea monótona.

El criterio de Stolz del cociente se suele aplicar con frecuencia para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Criterio de Stolz

Ejemplos:

1. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$$

2. Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ definidas por

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad b_n = \log n \quad ,$$

estudiar razonadamente si son equivalentes