Práctica 1
Sucesiones y series

G1953 - Cálculo - Curso 2020-2021
Grado en Ingeniería Civil

J. Bedia & C.E. Graafland

23 Oct 2020

Introdución

En esta práctica se va a trabajar con la noción de sucesión, serie y límite de una serie. El objetivo general, dado que es la primera práctica de laboratorio de la asignatura, será familiarizar al alumno con el entorno Maxima, a través de su interfaz gráfica *wxMaxima*, que es un software libre de amplia utilización en cálculo simbólico, y que resultará de gran ayuda al alumno para progresar en sus estudios, comprobando soluciones de ejercicios y visualizando gráficas de forma fácil en dos y tres dimensiones. Los objetivos específicos de esta sesión de laboratorio son:

- Definir sucesiones de forma explícita e implícita y hacer cálculos sencillos con ellas
- Definir series y calcular sumas parciales e infinitas, y aplicar criterios para determinar su carácter (convergente/divergente)
- Calcular el error relativo y absoluto de una estimación
- Construir gráficos sencillos

Entrega de resultados

1. Los trabajos se realizarán en parejas o grupos de tres personas como máximo.
2. Las cuestiones planteadas deberán ser contestadas en un fichero máxima (*.wxmx*), en el que se intercalarán las preguntas planteadas en celdas de formato texto con las respuestas en celdas de código.
3. Los nombres de los integrantes del grupo figurarán en el encabezado de dicho fichero.
4. El fichero deberá subirse a la plataforma Moodle, quedando el plazo de entrega abierto hasta el fin de la clase.
5. Únicamente **uno de los integrantes** del grupo subirá las respuestas.

1 Sucesiones

Una *sucesión* de números reales es una aplicación

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos $a_n = a(n)$. De este modo, la sucesión pasa a ser escrita de forma compacta como $\{a_n\}_{n \in N}$.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n \in N}$ tiene límite si los valores de a_n se acercan tanto como se quiera a l tomando valores de n *suficientemente grandes*. De forma más precisa, se dice que un número real l es limite de la sucesion $\{a_n\}_{n \in N}$, y se representa

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

o bien

$$a_n \to l$$

si:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \ \ t.q. \ \ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \epsilon$$

Ejercicio 1

Se presenta la sucesión definida mediante:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \alpha}{x_n + 1}, \ x_1 = \alpha, \alpha \in (0,1)$$

Se trata de una sucesión *monótona creciente* y *acotada*, luego *convergente* (por el Teorema de Weierstrass), cuyo límite $l = \sqrt{\alpha}$. Por lo tanto, la sucesión indicada puede emplearse para aproximar la raíz cuadrada $\sqrt{\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$.

1. Construir la sucesión considerando el valor de $\alpha = 1/4$
2. Obtener los primeros 10 valores de la sucesión
3. Investigar los valores de la expresión $|x_n - l|$ en la ecuación que debe ser cumplido en la definición del límite de una sucesión: Calcula $\epsilon_{abs}(n) = |x_n - l|$ para las valores que has encontrado en el apartado anterior
4. Dado $\epsilon = 4.5700 * 10^{-4}$, lea de la solución en el apartado 1c. qué número natural n_0 es el número natural más pequeño que cumple

$$\exists \ n_0 \in \mathbb{N} \ \ t.q. \ \ \forall n \geq n_0 \quad |x_n - l| < \epsilon.$$

5. Construir un gráfico en el que se visualice el error absoluto cometido por los primeros 10 elementos de la sucesion.
6. Construir la sucesión implícita de los errores relativos, definido como:

$$\epsilon_{rel}(n) = \left| 1 - \frac{x_n}{x_{n-1}} \right|, \ n \geq 2$$

7. Obtener los primeros 9 valores de la sucesión en el paratado anterior. ¿Cómo interpretas este resultado del error relativo?

2 Series

Si $\{a_k\}_{k\in N}$ es una sucesión numérica, se llama suma parcial n-ésima a

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\in N}$ se llama serie asociada a la sucesión $\{a_k\}_{k\in N}$ y se designa:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Si esta sucesión de sumas parciales, es decir la serie, S_n es convergente, su límite S se llama suma de la serie y se designa:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Teorema: Si una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente, entonces

$$\lim_{k\to\infty} (a_k) = 0.$$

Se trata de una condición **necesaria pero no suficiente**. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ cumple la condición necesaria de convergencia y sin embargo, como puede comprobarse, es divergente.

Existen diversos criterios para determinar la convergencia de una serie. El *criterio de Cauchy* es uno de ellos. Se aplicará en el siguiente ejercicio para probar la convergencia de una serie.

Criterio de Cauchy: Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos, este criterio se basa en el cálculo del límite $L = \lim_{k\to\infty}(a_k)^{1/k}$. Si se cumple $0 \leq L < 1$, la serie es convergente, si $L > 1$ la serie es divergente y si vale 1 no se puede concluir nada por aplicación de este criterio.

Nota: Para definir una serie numérica con Maxima hay que utilizar una letra de índice diferente en la sucesión inicial y en la sucesión de sumas parciales.

Ejercicio 2

El número e se puede definir como suma de una serie de términos positivos: $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

1. Definir la serie parcial $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
2. Obtener los primeros 10 valores de la serie $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
3. Comprobar la condición necesaria de convergencia.
4. Demostrar, aplicando el criterio de Cauchy, que la serie es convergente
5. Construir un gráfico en el que se visualice la aproximación de la serie al valor e