Práctica 2
La derivada y el polinomio de Taylor

G376-386 - Cálculo - Curso 2020-2021
Grado en Ingeniería de los Recursos Mineros y Energéticos

C.E.Graafland y Joaquín Bedia
Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria

05/11/2020

Introdución

En esta práctica se va a trabajar con la noción de derivada y la aproximación local de funciones a través de series de potencias, en concreto el conocido como polinomio de Taylor. Los objetivos específicos de esta sesión de laboratorio son:

- Representar geométricamente la derivada a través de la recta sectante y el cociente diferencial.
- Definir funciones en Maxima y evaluarlas localmente.
- Calcular y manejar derivadas en Maxima.
- Aplicar el Polinomio de Taylor para la estimación local de valores de funciones reales de variable real, y sus derivadas.

Entrega de resultados

1. Los trabajos se realizarán en grupos de tres o cuatro personas como máximo.
2. Las cuestiones planteadas deberán ser contestadas en un fichero máxima (*.wxmx*), en el que se intercalarán las preguntas planteadas en celdas de formato texto con las respuestas en celdas de código.
3. Los nombres de los integrantes del grupo figurarán en el encabezado de dicho fichero.
4. El fichero deberá subirse a la plataforma Moodle, quedando el plazo de entrega abierto hasta el fin de la clase.
5. Únicamente **uno de los integrantes** del grupo subirá las respuestas.

1 Recta secante y definición de la derivada

La fórmula que calcula la pendiente m de la recta secante a la gráfica de la función f, y que une los puntos $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ y $(x, f(x))$, es conocida como *cociente incremental*, que queda definido como:

$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La recta y se define a su vez como:

$$y = mx + b \qquad \text{con} \qquad b = f(x) - mx$$

La derivada $f'(x)$ de la función $y = f(x)$ en el punto x está definida como el límite del cociente incremental:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1.1 Ejercicio 1

1. Comprueba la aproximacion a la recta tangente de la siguiente funcion. Es decir: seguir los pasos del 1 a 5 del codigo del ejemplo para la función:

   $f(x) = x^3 - 3x - 5$, en $x = 3$ con $\Delta x = 3$

2. Calcular la pendiente m en $x = 3$ para $\Delta x = \{5, 4, 3, 2, 1, 0.5, 0.1, 0.05\}$. Pista: Haz una nueva función $m(x, \Delta x)$ de dos variables x y Δx, para lo cual se puede utilizar la función PENDIENTE. Luego aplica la función m sobre la lista de Δx.

3. Define una nueva función en Maxima para la derivada $f'(x)$ de $f(x)$ y evalua $f'(3)$.

4. El error absoluto entre la derivada $f'(x)$ y la pendiente de la recta secante $m(x, \Delta x)$ se puede definir como $\epsilon_{abs}(x, \Delta x) = |m(x, \Delta x) - f'(x)|$. Calcular el error en $x = 3$ para las diferentes valores de Δx indicados en el apartado 2.

5. Dibujar el error absoluto.

2 Polinomios de Taylor

Sea $f(x)$ una función $n+1$ veces derivable. El hecho de conocer sus n primeras derivadas no permite determinar la función, pero sí construir una expresión polinómica de n-ésimo orden que aproxima a $f(x)$ en el entorno de un punto dado x_i, con un cierto error. Dicha expresión polinómica viene dada por la *fórmula de Taylor*:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{f^{(3}(x_i)}{3!}(x - x_i)^3 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n}(x_i)}{n!}(x - x_i)^n + R_n, \end{aligned} \tag{1}$$

siendo el término R_n un término residual que considera todos los términos desde el $n+1$ hasta infinito. Si las derivadas $f^{(1} \ldots f^{(n}$ son continuas en el intervalo cerrado entre x y x_i, existe un valor ξ comprendido entre x y x_i con que se permite obtener una estimación exacta del error R_n, conocida como forma del resto de Lagrange:

$$R_n = \frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_i)^{n+1} \tag{2}$$

Aproximación local de funciones.
La serie de Taylor permite predecir el valor de la función y de sus derivadas en otro punto. Para ilustrar

esto, tomemos por ejemplo el primer término de la serie. Lo que nos dice, es que una primera aproximación al valor de la función en el punto x_{i+1} viene dada por

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i), \tag{3}$$

que se denomina *aproximación de orden 0*. De acuerdo con (3), el valor de la función en el nuevo punto es igual al valor del punto anterior. Intuitivamente, cuanto más próximos estén entre sí x_i y x_{i+1}, mayor exactitud tendrá dicha estimación. De hecho, la predicción será perfecta si la función es una constante.

Cuando la función cambia en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, pueden emplearse términos adicionales de Taylor para obtener una mejor aproximación. La *aproximación de primer orden* incorpora el término de la derivada primera de $f(x)$:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i), \tag{4}$$

donde como vemos se multiplica la pendiente de la recta tangente en el punto inicial $f'(x_i)$ por la distancia horizontal entre los dos puntos $x_{i+1} - x_i$, que permite estimar el incremento/decremento de la función en dicho intervalo. La aproximación de primer orden sólo proporcionará un valor exacto de $f(x_{i+1})$ en caso de ser $f(x)$ una línea recta.

Términos adicionales de la serie de Taylor permiten incluir la curvatura de la función en el cálculo, proporcionando mejores aproximaciones cuando la función no es una recta en el intervalo de estudio. Por ejemplo, si a continuación se incluye el término de orden 2, se tiene que:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x_{i+1} + x_i) \tag{5}$$

Añadiendo términos sucesivos en la serie se obtiene una aproximación cada vez más exacta de x_{i+1}, siempre y cuando esté en un entorno de un radio suficientemente reducido de x_i.

2.1 Ejercicio 2.

1. Construye en Maxima las series de Taylor del primero al quinto orden para la función $g(x) = sin(2x)$ en el punto $x_i = 2$. Utiliza la funcion `taylor` que está preprogramado en Maxima.

2. Dibuja la función $g(x)$ y las series de Taylor que has definido en el apartado anterior. Comenta lo que ves.

3. Construye los términos residuales R_1, R_2, R_3, R_4, R_5. Pista: Analiza el uso de la función `trunc` y úsala.

4. Dibuja los términos residuales. Explica el gráfico.

5. ¿Cuál es el error absoluto en $x = 2.2$ entre la aproximación de primer orden en el punto $x_i = 2$ y $f(2.2)$?