Práctica 3
La integral de Riemann

G1953 - Cálculo - Curso 2020-2021
Grado en Ingeniería Civil

Joaquín Bedia
Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria

26 Nov 2020

1. Introdución

En esta práctica se va a trabajar con la noción de integral de Riemann (o *definida*), y su aplicación al cálculo de áreas, longitudes de curvas y volúmenes. Los objetivos específicos de esta sesión de laboratorio son:

- Hacer sumas de Riemann con Maxima
- Calcular y manejar integrales en Maxima
- Hallar áreas encerradas por dos funciones
- Calcular longitudes de curvas

1.1. Entrega de resultados

1. Los trabajos se realizarán en parejas o grupos de tres personas como máximo.
2. Las cuestiones planteadas deberán ser contestadas en un fichero máxima (*.wxmx*), en el que se intercalarán las preguntas planteadas en celdas de formato texto con las respuestas en celdas de código.

3. Los nombres de los integrantes del grupo figurarán en el encabezado de dicho fichero.

4. El fichero deberá subirse a la plataforma Moodle, quedando el plazo de entrega abierto hasta el fin de la clase.

5. Únicamente **uno de los integrantes** del grupo subirá las respuestas.

2. Las sumas de Riemann

Una función f se dice que es integrable en un intervalo finito $[a, b]$ si existe el límite:

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \tag{1}$$

y además éste no depende de la elección de las particiones o de los puntos x_k^* en cada uno de los subintervalos. Cuando se da este caso, se denota al límite de la expresión (1) de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\ dx, \tag{2}$$

conocida como la integral definida de la función f entre a y b.

Las sumas de Riemann, constituyen una aproximación a la integral de una determinada función en un intervalo, a través de sumas finitas de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \tag{3}$$

Así, la suma se calcula dividiendo la región de interés en un número finito de rectángulos cuyas áreas individuales se suman para dar un valor estimado del área total encerrada por la curva.

Dada la integral $\int_a^b f(x)\ dx$, se considera una partición del intervalo $[a, b] : x_k = x_0 + kh,\ k = 0, 1, 2, \ldots, N$, donde $x_0 = a,\ x_N = b$, las sumas de Riemann por la izquierda (Figura 1a) vienen dadas por la expresión:

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(x_0 + kh)h \tag{4}$$

De un modo similar, las sumas de Riemann por la derecha (Figura 1b) quedan definidas por la expresión:

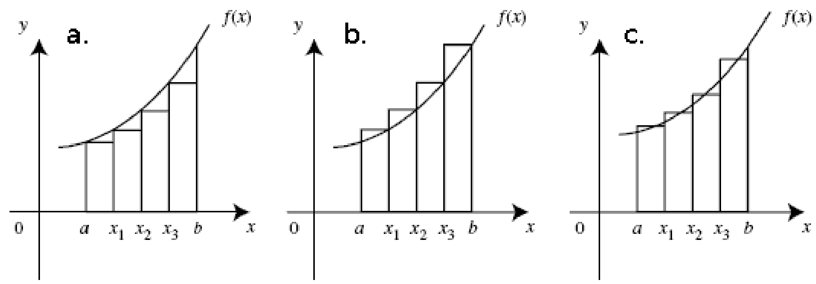

Figura 1: Representación esquemática de la estimación de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante sumas de Riemann. a) Sumas de Riemann por la derecha. b) Sumas de Riemann por la izquierda. c) Sumas de Riemann centradas.

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{k=1}^{N} f(x_0 + kh)h \qquad (5)$$

El error de la estimación cometido al aplicar las expresiones (4) y (5) puede ser reducido, para una misma anchura de subintervalos, mediante la suma de Riemann centrada: se toman en este caso las imágenes de $f(x)$ en los puntos medios de cada subintervalo (Figura 1c).

Cabe señalar que es frecuente la utilización de un soporte equidistante para la definición de subintervalos, si bien esto no tiene por qué ser así necesariamente. Por simplicidad en la implementación, en esta práctica se considerarán subintervalos de la misma anchura.

Ejercicio 1

En este ejercicio se analiza el área encerrada entre la función $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$ y el eje OX en el intervalo $[0,5]$.

1a. Calcula la suma por la izquierda. Para ello haz una partición del intervalo $[0,5]$ en 20 subintervalos de la misma anchura.

1b. Calcula la suma por la derecha y calcula la integral definida en el intervalo $[0,5]$.

1c. Dibujar las sumas utilizando el código del ejemplo. Explica los dibujos, comparándolos con los valores hallados en los apartados 1a y 1b.

1d. Explica con tus palabras por qué la suma centrada generalmente proporciona una mejor estimación. Calcula la suma centrada.

Regla de Barrow
El segundo teorema fundamental del cálculo integral (o también regla de Barrow, en honor al matemático inglés Isaac Barrow, profesor de Isaac Newton) es una propiedad de las funciones continuas que permite calcular fácilmente el valor de la integral definida a partir de cualquiera de las primitivas de la función. Dada una función $f(x)$ integrable en el intervalo [a,b] y sea $F(x)$ cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$. Entonces

$$\lim_{\max\ \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{6}$$

Aplicaremos a continuación la regla de Barrow.

Ejercicio 2

Considerando nuevamente la función racional $f(x)$ del ejercicio anterior:

2a. Calcula analíticamente la antiderivada $F(x)$ de $f(x)$. Verificar que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$.

2b. Aplica el teorema para el intervalo $[a, b]$. Es decir, calcula el lado derecho de la expresión (6). Verifica el teorema, es decir calcula $\int_a^b f(x)dx$ mediante un integral definida, utilizando ahora el comando `integrate`.

3. Cálculo integral de áreas y longitudes

3.1. Curvas planas

Área limitada por dos curvas planas

Sean las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$.

1. Se determinan los puntos de intersección de dichas curvas, mediante resolución del sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

2. Si los puntos obtenidos tienen abscisas a y b, suponiendo que en (a, b), $f(x) > g(x)$, el área viene dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Esto se generaliza en el caso de funciones arbitrarias f y g mediante la fórmula:

$$A = \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big| dx$$

Longitud de un arco de una curva plana.

Sea la curva $f(x)$ definida y continua, así como $f'(x)$ en el intervalo $[a, b]$. La longitud (L) del arco de curva entre los puntos $x = a, x = b$ viene dada por la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Ejercicio 3

3a. Dibujar las curvas $f(x) = x^2 - 5x$ y $g(x) = \frac{5x - x^2}{15}$. Para la representación gráfica, elegir un intervalo en x apropiado que permita ver los puntos de corte $f(x)$ con $g(x)$.

3b. Calcular las coordenadas de los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$.

3c. Calcular el área encerrada entre $f(x)$ y $g(x)$.

3d. Hallar el perímetro de dicho área.