Práctica 4
Funciones escalares de dos variables

G1953 - Cálculo - Curso 2020-2021
Grado en Ingeniería Civil

Joaquín Bedia
Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria

18/12/2020

Resumen

En esta práctica se va a trabajar con funciones de dos variables. Se trabajarán las nociones de límite, continuidad y diferenciabilidad, así como los conceptos de derivada parcial y direccional.

- Hacer limites reiterados y direccionales para funciones de dos variables.
- Estudiar la continuidad de una función de dos variables.
- Calcular derivadas parciales
- Calcular derivadas direccionales.

Entrega de resultados

La no observación de las condiciones de entrega (p.e.: nombre del fichero incorrecto) será penalizada en la calificación final.

1. Los trabajos se realizarán en parejas o grupos de tres personas como máximo.
2. Las cuestiones planteadas deberán ser contestadas en un fichero máxima (*.wxmx*), en el que se intercalarán las preguntas planteadas en celdas de formato texto con las respuestas en celdas de código.
3. El **nombre del fichero** constará del primer apellido del alumno encargado de subir la tarea, seguido de *barra baja* y el término *practica4*, sin tildes. P ej.: *Garcia_Practica4.wxmx*
4. Los nombres de todos los integrantes del grupo figurarán en el encabezado de dicho fichero.
5. El fichero deberá subirse a la plataforma Moodle, quedando el plazo de entrega abierto hasta el fin de la clase.
6. Únicamente **uno de los integrantes** del grupo subirá las respuestas.

1. Limites y continuidad

Definición del limite de una función de dos variables Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto posiblemente en x_0, y_0, y sea L un número real. Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\big|f(x,y) - L\big| < \epsilon$$

siempre que:

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

Limites reiterados El limite reiterado de una función de dos variables $f(x,y)$ se basa en fijar una de las dos variables, por ejemplo x, y calcular el límite en la variable y. A continuación se calcula el límite en la x, dejando fija la y:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \quad \text{y} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

Ejercicio 1

Dadas las funciones:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 10 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 \quad ,$$

se pide:

1a. Calcular los limites reiterados de las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ en $(0,0)$.

1b. Calcular el límite direccional en el origen a través de rectas de la forma $y = mx$: $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$.

1c. Calcular el límite direccional en el origen mediante parábolas de la forma: $y = mx^{1/2}$.

1d. ¿Qué se puede concluir, a partir de los resultados de los apartados anteriores, sobre la existencia del límite de $f(x,y)$ y $g(x,y)$?

1e. En caso de existir el limite de $f(x,y)$, ¿cuál debe ser su valor? Comenta la continuidad de la función $f(x,y)$ asumiendo la existencia de límite.

2. Derivadas parciales de diferentes órdenes

Equivalente a la definición de derivada de una función $f(x)$ de una variable, podemos definir las derivadas parciales para una función $f(x, y)$ de dos variables.

Definición de la derivada parcial Si $z = f(x, y)$, las primeras derivadas parciales de f con respecto a x e y, son las funciones f_x y f_y definidas por:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{1}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{2}$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Es posible hallar las derivadas parciales de órdenes superiores a uno, siempre que dichas derivadas existan. Ejemplos son la derivada parcial segunda respecto a x: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y la derivada cruzada con respecto de y y de x: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Las derivadas cruzadas son iguales bajo determinadas condiciones, dadas por el siguiente Teorema:

Teorema de Schwarz: Si f es una función de x e y tal que sus derivadas parciales cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ son continuas en un disco abierto R, entonces se cumple que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \ \forall (x, y) \in R$$

El teorema se aplica igualmente a una función f de tres o más variables, siempre y cuando las derivadas parciales de segundo orden sean continuas.

Ejercicio 2

Dada la función $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y}$,

2a. Calcular las derivadas parciales usando la definición de las expresiones 1 y 2.

2b. Calcular las derivadas parciales utilizando la función `diff`. Verifica la respuesta obtenida en el apartado 2a.

2c. Comprobar los requisitos del Teorema de Schwarz hasta orden 2.

2d. Verificar el Teorema de Schwarz.

2e. Sea $g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Para $(a, b) = (0.1, 0.1)$ definir la función $P(x, y) = (y - b)g_y(a, b) + (x - a)g_x(a, b) + g(a, b)$.

2f. Representar en la misma figura las gráficas de $g(x, y)$ y $P(x, y)$. ¿Qué representa la superficie $P(x, y)$?.

3. Derivada direccional

Ya que hemos visto como calcular la derivada en la direccion de x o y, nos interesa ahora calcular la derivada en cualquier otra dirección del plano, que es lo que conocemos como *derivada direccional*. Su definición es la siguiente:

Sea f una función de dos variables x e y, y sea $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ un *vector unitario*. Entonces, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$, que se denota $D_u f$, es:

$$D_u f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

En la práctica, utlizaremos la siguiente fórmula de trabajo:

Forma para calcular la derivada direccional Dado que el gradiente de f es un vector, se puede expresar la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ como el producto escalar:

$$D_u f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \mathbf{u}$$

Ejercicio 3

En este ejercicio analizamos la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} 2y$ en el punto $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$, en la dirección de $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

3a. Definir el vector unitario $u = \frac{v}{||v||}$.

3b. Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3c. Calcular la derivada direccional $D_u f(1, \frac{\pi}{2})$.