Hoja de Ejercicios 1 - Números Reales

Ejercicio 1. *Demostrar por inducción las siguientes igualdades:*

a)
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b)
$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c)
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots n)^2$$

d)
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Ejercicio 2. *Demostrar por inducción que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9*

Conviene recordar que la suma de dos números divisibles por 9, es a su vez divisible por 9

Ejercicio 3. *Demostrar por inducción que* $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ *es múltiplo de 11* $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 4. *Resolver:*

a) $|3x-4|=4$
b) $|5x-3|=2$
c) $1-|2-x|=6$
d) $|x|+|x+1|=-3$
e) $\left|\frac{1-x}{2}\right|=1$
f) $\left|\frac{1-2x}{x}\right|=4$
g) $|1-x|=|3x-1|$

Ejercicio 5. *Describir explícitamente los siguientes conjuntos:*

a) $|x-2|<3$
b) $|3x-2|<1$
c) $|2x+5|>3$
d) $x^2-4x+6<x$
e) $|x^2-3|\leq 1$
f) $x^2+x\leq 2$
g) $\frac{x-1}{x+2}>0$
h) $|(x-2)(x-3)|<1$
i) $|x-3|+|x+1|\leq 6$
j) $\frac{|x+1|}{|x-1|}\geq 1$
k) $||x-1|-|x+1||\leq 1$
l) $\frac{1}{|1-5x|}\geq -\frac{1}{3}$

m) $\left|\frac{x+2}{x-6}\right| - \left|\frac{x-1}{x-3}\right| < 0$

Ejercicio 6. *Hallar los números $x \in \mathbb{R}$ que verifican:*

a) $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0$

b) $\frac{(x+3)(x-4)}{x^3-2x^2-3x} < 0$

c) $(x-3)^2 \leq 1$

Ejercicio 7. *Describir explícitamente los siguientes conjuntos. Además, determinar sus extremos, máximo y mínimo si los tienen. Se recomienda representar gráficamente los mismos.*

Pueden esbozarse sobre el papel, o bien hacerse con MAXIMA (preferible)

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2 < x \leq 0\}$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + 5x - 6 \leq 0\right\}$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 9\right\}$

d) $D = \{|x+3| - |x-1| < 2\}$

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \left|x^2 + 2x + 1\right| < \frac{1}{2}\right\}$

Sol. Ejercicio. 1.

a) Hacemos $n = 1$:

PASO 1 Se demuestra que es cierto para $n = 1$

$$n = 1: \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Se puede también comprobar su validez para $n = 2$

$$n = 2: \quad 1+2 = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Se generaliza para $n = h$:

PASO 2 Se admite su validez para cualquier $h \in \mathbb{N}$

$$n = h: \quad 1+2+\ldots+h = \frac{h(h+1)}{2}$$

Se suma el siguiente valor $h+1$:

PASO 3 Se demuestra que es cierto para $h+1$

$$n = h+1: \quad 1+2+\ldots+h+(h+1) = \frac{h(h+1)}{2} + (h+1)$$

Operando, se obtiene:

$$\frac{h(h+1)}{2} + (h+1) = \frac{h(h+1)+2(h+1)}{2} = \frac{h^2+3h+2}{2} =$$

Se factoriza h^2+3h+2

$$= \frac{(h+1)(h+2)}{2} = \frac{[h+1]([h+1]+1)}{2}$$

, que es la expresión propuesta sustituyendo n por $h+1$.

---

b) Se comprueba para $n = 1$ y $n = 2$:

$$n = 1: \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$n = 2: \quad 1^2+2^2 = \frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Asumiendo la validez de la expresión para n, se comprueba para $n+1$:

$$n = n+1: \quad 1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

Operando sobre el último término obtenido:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \tag{1}$$

Factorizando la expresión cuadrática del numerador:

$$n = \frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7\pm 1}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ -2 \end{cases}$$

luego

$$2n^2+7n+6 \equiv 2\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2) \equiv (2n+3)(n+2) \equiv (2[n+1]+1)([n+1]+1)$$

Por lo tanto, volviendo a la expresión 1, se tiene:

$$\frac{(n+1)(2[n+1]+1)([n+1]+1)}{6} = \frac{[n+1]([n+1]+1)(2[n+1]+1)}{6}$$

, que es la expresión propuesta sustituyendo n por $n+1$.

---

c) Similar a los anteriores

---

d) Similar a los anteriores

Sol. Ejercicio. 2.

Se pide demostrar que la expresión $(n)^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es divisible por 9 para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Resulta inmediato comprobarlo para $n=1$, ya que $1^3+2^3+3^3=36$, que es divisible por 3. Asumiendo la validez de la expresión para $n \in \mathbb{N}$, probamos si es cierto para $n+1$:

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n^3 + 9n^2 + 27n + 27) =$$
$$= \left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^2\right] + (9n^2 + 27n + 27)$$

la expresión de la izquierda es la inicial, y la derecha es divisible por 9. Dado que ambos sumandos son divisibles por 9, se concluye que la expresión resultante es a su vez divisible por 9, quedando demostrada la validez de la expresión inicial por inducción.

Sol. Ejercicio. 3.

Puede comprobarse que la expresión es válida para $n = 1$:

$$3^{2\cdot 1+2} + 2^{6\cdot 1+1} = 3^4 + 2^7 = 209 = 11 \cdot 19$$

Asumiendo la validez de la expresión para n, se prueba para $n+1$:

Se aplica la propiedad de las potencias por la cual $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$

$$3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1} = 3^{2n+2} \cdot 3^2 + 2^{6n+1} \cdot 2^6 \tag{2}$$

A continuación, se desdobla la expresión (2) del siguiente modo:

$$3^{2n+2} \cdot 3^2 + 2^{6n+1} \cdot 2^6 = 3^2(3^{2n+2} + 2^{6n+1}) + (2^6 - 3^2) \cdot 2^{6n+1} =$$
$$= 9 \cdot 11 + 55 \cdot 2^{6n+1} = 9 \cdot 11 + 5 \cdot 11 \cdot 2^{6n+1}$$

, que es múltiplo de 11, por lo que queda demostrada la expresión del enunciado.

Sol. Ejercicio. 4.

a) La parte interior del valor absoluto se hace igual a cero en $\frac{4}{3}$:

$$3x - 4 = 0 \to 3x = 4 \to x = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} 3x - 4 = 4 & si \quad x \geq \frac{4}{3} \to x = \frac{8}{3} \\ -3x + 4 = 4 & si \quad x < \frac{4}{3} \to x = 0 \end{cases}$$

Reuniendo las soluciones parciales, se da la solución:

Solución: $\{0, \frac{8}{3}\}$

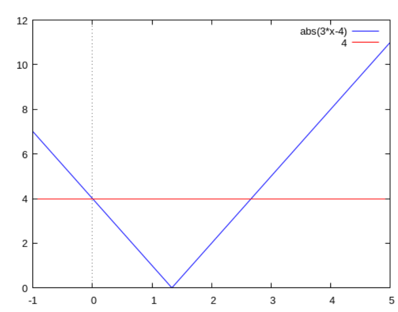

Figura 1: Representación gráfica de la solución, donde se observan los puntos de corte de $y = 4$ en $x = 0$ y $x = 8/3$

b) Solución: $\left\{\frac{1}{5}, 1\right\}$

---

c) Solución: $\{\emptyset\}$

---

d) Solución: $\{\emptyset\}$

---

e)
$$\left|\frac{1-x}{2}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|1-x|}{|2|} = 1 \Rightarrow |1-x| = 2$$

- Si $x \leq 1 \Rightarrow 1 - x = 2 \Rightarrow x = -1$
- Si $x > 1 \Rightarrow -1 + x = 2 \Rightarrow x = 3$

Solución: $x \in \{-1, 3\}$

---

f)
$$\left|\frac{1-2x}{x}\right| = 4 \Rightarrow \frac{|1-2x|}{|x|} = 4 \Rightarrow |1-2x| = 4|x|$$

De la última expresión, obtenemos los dos puntos críticos:

$$\begin{cases} 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

Analizando la expresión en cada uno de los tres intervalos a los que dan lugar sobre la recta real:

- Si $x < 0$: $1 - 2x = -4x \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$
- Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$: $1 - 2x = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{6}$
- Si $x > \frac{1}{2}$: $-1 + 2x = 4x \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$, solución que ya ha aparecido anteriormente.

Por lo tanto, la solución es $x \in \left\{\frac{-1}{2}, \frac{1}{6}\right\}$.

---

g) Identificamos puntos críticos en $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$.

- Si $x < \frac{1}{3}$, tenemos:

$$1 - x = -3x + 1 \Rightarrow x = 0$$

- Si $\frac{1}{3} \leq x < 1$, entonces:

$$1 - x = -3x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

- Si $x \geq 1$, se obtiene la solución $x = 0$, que ahora queda fuera del intervalo analizado, ya que $0 \ngeq 1$.

  Por lo tanto, la solución viene dada por $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

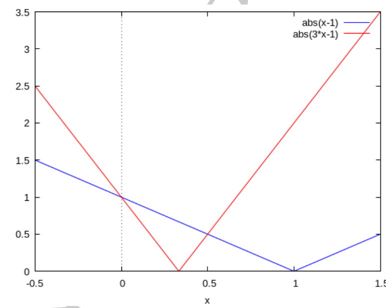

Figura 2: Representación gráfica de la solución, donde se observan los puntos de corte en $x = 0$ y $x = 1/2$

Sol. Ejercicio. 5.

a) Solución: $x \in (-1, 5)$

---

b) Solución: $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

---

c) Solución: $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$

---

d) Solución: $x \in (2, 3)$

---

e) Solución: $x \in \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right]$

---

f) Solución $x \in [-2, 1]$

---

g) Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

---

h) Solución: $x \in \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$

---

i) Solución:

Hallamos los puntos críticos:

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

a) Si $x < -1: \quad -x + 3 - x - 1 \leq 6 \Rightarrow -2x \leq 4 \Rightarrow 2x \geq -4 \Rightarrow x \geq -2$. Por lo tanto, la solución parcial para este intervalo es $[-2, -1)$

b) Si $-1 \leq x < 3: \quad -x + 3 + x + 1 \leq 6 \Rightarrow 4 \leq 6$, que se cumple siempre siendo válido entonces cualquier valor de $x \in [-1, 3)$

c) Si $x \geq 3: \quad x - 3 + x + 1 \leq 6 \Rightarrow 2x - 2 \leq 6 \Rightarrow x \leq 4$. Por lo tanto, la solución parcial para este intervalo es $x \in [3, 4]$

Reuniendo las soluciones parciales, se obtiene la solución

$x \in [-2, 4]$, representada en la figura 3.

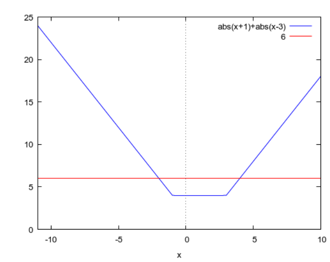

Figura 3: Representación gráfica de la solución

---

j) Solución: $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$

---

k) Solución: $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

---

l) Solución: $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$

---

m) Se aplica en primer lugar la propiedad adicional 5 (preservación de la división), para posteriormente pasar multiplicando los denominadores a los términos derecho e izquierdo de la ecuación. La estrategia seguida consiste en elevar al cuadrado ambos lados para deshacernos del valor absoluto:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+2}{x-6}\right| - \left|\frac{x-1}{x-3}\right| < 0 \quad & \Rightarrow \frac{|x+2|}{|x-6|} < \frac{|x-1|}{|x-3|} \\
& \Rightarrow |x+2||x-3| < |x-1||x-6| \\
& \Rightarrow (x+2)^2(x-3)^2 < (x-1)^2(x-6)^2 \\
& \Rightarrow (x^2+4x+4)(x^2-6x+9) < (x^2-2x+1)(x^2-12x+36) \\
& \Rightarrow 12x^3 - 72x^2 + 96x < 0 \\
& \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x < 0 \\
& \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) < 0 \\
& \Rightarrow x(x-2)(x-4) < 0
\end{aligned}$$

Despejando, se identifican los puntos críticos $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$. Obviamente, cuando x toma alguno de estos tres valores la expresión se iguala a cero, y por lo tanto ninguno de ellos pertenece al conjunto solución. Además, en $x = 3$ existe otro punto crítico, ya que en este caso la fracción del lado derecho de la expresión del enunciado no está definida. Analizamos ahora los cuatro intervalos resultantes:

- Si $x < 0$, la expresión resultante queda $(-)\cdot(-)\cdot(-) < 0$, por lo que el intervalo $(-\infty, 0)$ es parte de la solución.
- Si $0 < x < 2$, se tiene $(+)\cdot(-)\cdot(-) > 0$, por lo que queda fuera.
- Si $2 < x < 4$, se tiene $(+)\cdot(+)\cdot(-) < 0$
- Si $x > 4$, entonces $(+)\cdot(+)\cdot(+) > 0$, que queda fuera.

El conjunto solución queda por lo tanto definido asi:

$(-\infty, 0) \cup (2, 4) - \{3\}$, como queda representado de forma gráfica en la figura 4

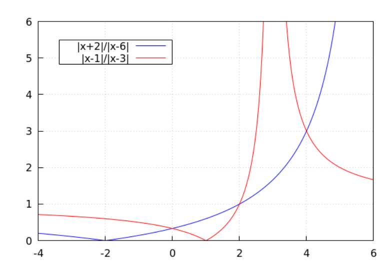

Figura 4: Representación gráfica de la solución

Sol. Ejercicio. 6.

a) Analizamos el signo en aquellos puntos en los que los factores se anulan $\{1, 2, 3, 4\}$, y en cada uno de los intervalos de $\mathbb{R}$ resultantes:

- Si $x < 1$, se obtiene:
$$\frac{(-)(-)}{(-)(-)} = \frac{(+)}{(+)} > 0$$
- Si $x = 1$, se anula el numerador, por lo que la expresión es igual a cero
- Si $1 < x < 2$, se tiene:
$$\frac{(+)(-)}{(-)(-)} = \frac{(-)}{(+)} < 0$$
- Si $x = 2$, se anula el numerador, por lo que la expresión es igual a cero
- Si $2 < x < 3$, se tiene:
$$\frac{(+)(+)}{(-)(-)} = \frac{(+)}{(+)} > 0$$
- Si $x = 3$, se anula el denominador, y por lo tanto la función no está definida.
- Si $3 < x < 4$, se obtiene
$$\frac{(+)(+)}{(+)(-)} = \frac{(+)}{(-)} < 0$$
- Si $x = 4$, se anula el denominador, y por lo tanto la función no está definida.
- Si $x > 4$, se obtiene:
$$\frac{(+)(+)}{(+)(+)} = \frac{(+)}{(+)} > 0$$

Por lo tanto, reuniendo las diferentes soluciones parciales, se obtiene en conjunto definido por $(-\infty, 1] \cup [2, 3) \cup (4, \infty)$.

b) Operando en el denominador:

$$\frac{(x+3)(x-4)}{x(x^2-2x-3)} < 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-4)}{x(x-3)(x+1)} < 0$$

Se factoriza la expresión cuadrática del denominador:
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Por tanto, deben estudiarse los signos de numerador y denominador, considerando los intervalos definidos por puntos críticos identificados: $\{-3, -1, 0, 3, 4\}$

- Si $x < -3$, se tiene

$$\frac{(-)(-)}{(-)(-)(-)} = \frac{(+)}{(-)} < 0$$

Por lo tanto, intervalo $(-\infty, -3)$ quedaría incluído en el conjunto

Siguiendo con la misma lógica, se estudian el resto de casos:

- Si $x = -3$ el numerador se anula, por lo que la expresión es igual a cero.
- Si $-3 < x < -1$, se obtiene:

$$\frac{(+)(-)}{(-)(-)(-)} = \frac{(-)}{(-)} > 0$$

- Si $x = -1$, se anula el denominador, y por lo tanto la función no está definida.
- Si $-1 < x < 0$:

$$\frac{(+)(-)}{(-)(-)(+)} = \frac{-}{+} < 0$$

- Si $x = 0$ de nuevo se anula el denominador
- Si $0 < x < 3$
- Si $x = 3$ también se anula el denominador
- Si $3 < x < 4$:

$$\frac{(+)(-)}{(+)(+)(+)} = \frac{-}{+} < 0$$

- Si $x = 4$ la expresión se hace cero al anularse el numerador

Y por lo tanto, la solución final viene dada por el conjunto:

$$S = (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (3, 4)$$

, como se refleja en la gráfica de la Figura 5.

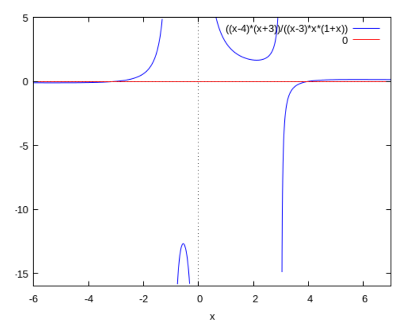

Figura 5: Representación gráfica de la solución

c) Resulta conveniente en este caso operar para reducir a cero la desigualdad. En este caso,

$$(x-3)^2 \leq 1 \equiv x^2 - 6x + 9 \leq 1 \equiv x^2 - 6x + 8 \leq 0$$

A continuación se factoriza y se llega a la expresión

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(x-4)(x-2) \leq 0$$

, procediéndose de modo similar a los anteriores apartados.

Solución: $x \in [2, 4]$

Sol. Ejercicio. 7.

a) Son cotas superiores de A cualquier $x \in \mathbb{R}$ / $x \geq 0$.

$sup(A) = 0$, que por pertencer al conjunto A es máximo.

b) $B = [6, 1]$. Por lo tanto, son cotas superiores del conjunto B cualquier $x \in \mathbb{R} \geq 1$.

$sup(B) = 1$, que por pertencer al conjunto B es máximo.

Son cotas inferiores de B cualquier $x \in \mathbb{R} \leq -6$.

$Inf(B) = -6$, que por pertencer al conjunto B, es mínimo.

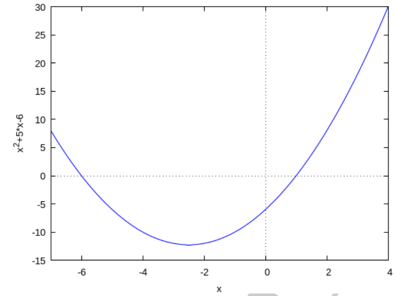

Figura 6: Representación gráfica de la parábola $x^2 + 5x - 6$. El conjunto $B = [-6, 1]$, es el conjunto de puntos cuya imagen ≤ 0

c) $C = (-3, 3)$, que es el conjunto de valores de x en los que la parábola indicada se encuentran por debajo de 9.
Son cotas superiores de C todos los valores $x \in \mathbb{R}\ /\ x \geq 3$.
$Sup(C) = 3$, y no existen máximos.

Son cotas inferiores de C todos los valores $x \in \mathbb{R}\ /\ x \leq -3$.

$Inf(C) = -3$, y no existen mínimo de C.

d) Se analizan los puntos $x = -3$ y $x = 1$

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Si} & x < -3 & \Rightarrow -x - 3 - (-x + 1) < 2 \\
 & & \Rightarrow -4 < 2 \\
\text{Si} & -3 \leq x < 1 & \Rightarrow x + 3 - (-x + 1) < 2 \\
 & & \Rightarrow 2x + 2 < 2 \\
 & & \Rightarrow x < 0 \\
\text{Si} & x \geq 1 & \Rightarrow x + 3 - (x - 1) < 2 \\
 & & \Rightarrow 4 < 2
\end{array}
$$

- La primera desigualdad se cumple siempre. Por tanto $x \in (-\infty, -3)$
- La segunda desigualdad se cumple $\forall x \in [-3, 0)$
- La tercera desigualdad es siempre falsa

Reuniendo soluciones parciales:

$$D \equiv (-\infty, -3) \cup [-3, 0) \equiv (-\infty, 0)$$

El conjunto D no está acotado inferiormente. Son cotas superiores todos los valores en el intervalo: $[0, +\infty)$.

No tiene extremo inferior. El extremo superior $Sup(C) = 0$. Como $x = 0$ no pertenece al conjunto A, éste no tiene máximo.

e) La ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ sólo tiene una raiz en $x = -1$, siendo positiva en el resto de su dominio. Por lo tanto, podemos decir que $|x^2 + 2x + 1| = x^2 + 2x + 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$. Escribimos:

$$x^2 + 2x + 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{2} < 0$$

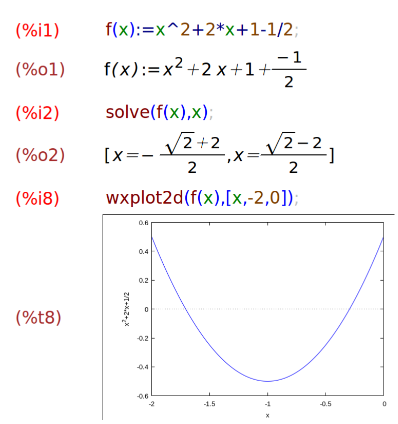

Figura 7: Captura de pantalla del programa MAXIMA, que muestra el cálculo de las raices de $p(x) = x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{2}$ y su representación gráfica.

Las raíces de éste último polinomio $p(x)$ de grado 2 son $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$, $\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$ (Fig. 7). Analizando el signo que toma la expresión en cada intervalo tenemos:

- Si $x < \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$, entonces $p(x)$ toma valores positivos
- Si $\frac{-2-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$, entonces $p(x) < 0$
- Si $x > \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$, entonces $p(x)$ toma valores positivos nuevamente

Por lo tanto, $E \equiv \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)$

$Sup(E) = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$. $Inf(E) = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$. Son cotas superiores de E $\forall x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$. Asimismo, serán cotas inferiores $\forall x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$. Al ser un conjunto abierto, E no posee máximo ni mínimo.