Hoja de Ejercicios 2 - Números Complejos

Ejercicio 1. *Dados $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$, $z_3 = \frac{3}{2}$ y $z_4 = 7i$, calcular:*

a) $(z_1 - z_2) \cdot z_3$
b) $z_1 \cdot z_4 + z_3 \cdot z_4$
c) $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2}$
d) $z_1 + z_3^{-1}$
e) z_2^{-1}
f) $\overline{\overline{z_1 \cdot z_2}}$
g) $(\overline{z_1 + z_2})^{-1}$
h) $z_1^2 \cdot z_3$
i) $\frac{z_2}{z_1}$
j) $\frac{z_1}{2z_3 + z_4}$

Ejercicio 2. *Dados los números complejos $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 3 + 6i$, determinar el valor de x que verifica cada una de las siguientes igualdades:*

a) $z_1 + x = z_2$
b) $z_1^2 \cdot x = 1$
c) $z_1 + z_2 + x = 1$
d) $z_2^2 + x = -z_1^2$
e) $z_2 \cdot x = z_1$

Ejercicio 3. *Expresar en forma trigonométrica los siguientes números complejos, indicando además módulo y argumento:*

a) $-1 + i$
b) $2 + 2i$
c) $-2 + 2i$
d) $2 - 2i$
e) $-2 - 2i$
f) $-\sqrt{5}$
g) $\frac{5}{3}i$
h) $\sqrt{3} + i$
i) $\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}$
j) $\frac{1}{-1+i\sqrt{3}}$

Ejercicio 4. *Escribir en forma binómica el número complejo z:*

$$z = \log\left(\frac{(2 + 2\sqrt{3}i)^{-2}}{(1 - i)^{-2}}\right)$$

Ejercicio 5. *Calcula el siguiente número complejo:* $z = \frac{2}{i}\log\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

Ejercicio 6. *Hallar el complejo $z = \log(\sqrt{w})$, siendo w tal que $\frac{w}{1+\sqrt{3}i}$ es un número real, y su módulo $|w| = 1$*

Ejercicio 7. *Expresar* $\operatorname{sen} 3\alpha$ *y* $\cos 3\alpha$ *en forma de senos y cosenos mediante la aplicación de la fórmula de de Moivre.*

Ejercicio 8. *Determinar una ecuación de coeficientes reales cuyas soluciones en $\mathbb{C}$ sean $\{-3, -5 + 2i, -5 - 2i\}$*

Ejercicio 9. *Determinar un polinomio de coeficientes reales de grado 4 que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5 + 2i$.*

Ejercicio 10. *Resolver la ecuación algebraica* $x^6 + 1 = 0$*, expresando el resultado en forma binómica.*

Ejercicio 11. *Resolver la siguiente ecuación algebraica considerando todas las raíces en* $\mathbb{C}$*. Dar el resultado en forma binómica.*

$$x^7 - 9x^4 + 8x = 0$$

Ejercicio 12. *Expresar en forma polar y binómica un complejo z cuyo cubo sea*

$$z^3 = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Ejercicio 13. *Determinar los números complejos tales que* $w = \frac{z-1-i}{z+1+i}$*, sea un número real*

Ejercicio 14. *Calcular el valor de a y b para que* $\frac{3b-2ai}{4-3i}$ *sea real, y de módulo unidad*

Ejercicio 15. *Demostrar que* i^i *es un número real*

Ejercicio 16. *Determinar el valor de* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $z \in \mathbb{C}$*, de manera que la ecuación* $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + az + b = 0$ *admita la raiz* $z = 1 + i$

Ejercicio 17. *Hallar todas las raíces cuartas de i y esbozar gráficamente la solución obtenida.*

Ejercicio 18. *Determinar los números complejos z tales que su cuadrado sea igual a su conjugado*

Ejercicio 19. *Hallar los números complejos z tales que* $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$*, expresando el resultado en forma binómica.*

Ejercicio 20. *Hallar los números complejos z tales que* $z^2 + 2\bar{z}^2 + z - \bar{z} + 9 = 0$

Ejercicio 21. *Hallar las coordenadas de los vértices de un hexágono regular de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo* $1_{\frac{\pi}{2}}$

Ejercicio 22. *Un triángulo equilátero tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de sus vértices es el punto* $(1, 0)$*. Determinar los complejos cuyos afijos son las coordenadas de los dos vértices restantes.*

Soluciones

Sol. Ej. 1.

a) $-12 + 9i$

b) $-28 - \frac{21}{2}i$

c) $-28 - 21i$

d) $-\frac{7}{3} + 4i$

e) $\frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$

f) $-7 + 26i$

g) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

h) $-\frac{21}{2} - 36i$

i) $-\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

j) $\frac{19}{58} + \frac{33}{58}i$

Sol. Ej. 2.

a) $x = 1 + 7i$

b) $x = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

c) $x = -4 - 5i$

d) *Falta*

e) *Falta*

Sol. Ej. 3. Falta

Sol. Ej. 4. Para hallar z, calculamos primero el valor de numerador y denominador, posteriormente el valor del cociente, y por último se calcula el logaritmo. Tomando $z = \log \dfrac{w_1^{-2}}{w_2^{-2}}$, tenemos que:

$$w_1 = 2 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 \\ \alpha = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{2} = \arctan \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

. Por lo tanto, en forma exponencial se tiene que $w_1 = 4e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i}$

Del mismo modo:

$$w_2 = 1 - i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = 0 - \arctan \frac{|-1|}{1} = 0 - \arctan 1 \Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

Siendo $w_2 = \sqrt{2}e^{\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)i}$. Entonces:

$$w_1^{-2} = (4e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i})^{-2} = 4^{-2}e^{\left(\frac{-2\pi}{3}-4k\pi\right)i} = \left(\frac{1}{16}\right)e^{\left(\frac{-2\pi}{3}-4k\pi\right)i}$$

y:

$$w_2^{-2} = \left(\sqrt{2}e^{\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)i}\right)^{-2} = \sqrt{2}^{-2}e^{\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)i} = \left(\frac{1}{2}\right)e^{\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)i}$$

Se calcula a continuación el cociente en su forma exponencial:

$$\frac{w_1^{-2}}{w_2^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{16}\right)e^{\left(\frac{-2\pi}{3}-4k\pi\right)i}}{\left(\frac{1}{2}\right)e^{\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)i}} = \left(\frac{2}{16}\right)e^{\left[\frac{-2\pi}{3}-4k\pi-\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)\right]i} = \frac{1}{8}e^{\frac{-7\pi}{6}i} = \frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{8}$$

Finalmente, se calcula el valor del logaritmo:

$$z = \log\left(\frac{w_1^{-2}}{w_2^{-2}}\right) = \log\left(\frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{8}\right) = \log\left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right) - \log(8) = \frac{5\pi}{6}i\underbrace{\log(e)}_{=1} - \log(8)$$

Siendo por lo tanto éste el resultado expresado en forma binómica:

$$z = \frac{5\pi}{6}i - \log(8)$$

Por conveniencia, en este ejercicio se usa la forma exponencial del complejo $z = re^{i\alpha}$, que resulta cómoda para trabajar con logaritmos de números complejos.

Al igual que en la forma polar, el cociente se calcula mediante división de módulos y diferencia de argumentos de numerador y denominador.

Sol. Ej. 5. Resolvemos el cociente, multiplicando y dividiendo el mismo por el conjugado del denominador:

$$\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$$

Si pasamos i a su forma exponencial, tenemos que:
$|z| = r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, y $arg(z) = \alpha = \arctan \frac{1}{0} = \infty$

Esto quiere decir que $\cos\alpha = 0$. Como $Im(z)$ es positiva, sabemos que $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

En forma polar, tenemos que $z = 1_{\frac{\pi}{2}}$

En forma exponencial, lo expresamos como $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$
Por lo tanto, $\log(e^{\frac{\pi}{2}i}) = \frac{\pi}{2} i \log(e) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$
Y finalmente, tenemos:

$$z = \frac{2}{i} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i = \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Sol. Ej. 6. Se comienza tomando $w = x + yi$ y operando el cociente del enunciado:

$$u = \frac{w}{1+\sqrt{3}i} = \frac{x+yi}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{x+\sqrt{3}y}{4} + \frac{y-\sqrt{3}x}{4} i$$

A continuación, considerando las condiciones dadas en el enunciado:

1. El número es real, por lo que la parte imaginaria ha de ser cero:

$$u \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y-\sqrt{3}x}{4} = 0 \Rightarrow y - \sqrt{3}x = 0$$

2. Su módulo, es la unidad, y por lo tanto:

$$|w| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Y de aquí se extrae un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} y - \sqrt{3}x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} y = \sqrt{3}x \\ \end{array} \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Siendo por tanto $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ y $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Antes de calcular el logaritmo, se pasa a forma exponencial:

$$w_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |w_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\ \alpha = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \Leftrightarrow e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i}$$

$$w_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |w_2| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\ \alpha = \arctan\sqrt{3} - \pi = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \Leftrightarrow e^{\left(\frac{-2\pi}{3}+2k\pi\right)i}$$

Y por lo tanto:

$$\log\sqrt{w_1} = \log\left(e^{\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2} i}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) i, \ \ k = 0, 1$$

$$\log \sqrt{w_2} = \log \left(e^{\frac{\frac{-2\pi}{3}+2k\pi}{2} i} \right) = \left(\frac{-\pi}{3} + k\pi \right) i, \quad k = 0,1$$

Dando valores a k, se obtendrían las cuatro soluciones:

$$\frac{\pi}{6} i + 2k'\pi, \quad \frac{7\pi}{6} i = \frac{-5\pi}{6} i + 2k'\pi, \quad \frac{-\pi}{3} i + 2k'\pi \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{3} i + 2k'\pi \quad k' \in \mathbb{Z}$$

Sol. Ej. 7. Un aplicación muy útil de la fórmula *de Moivre* consiste en deducir fórmulas trigonométricas de ángulos múltiples expresados en función del seno y coseno del ángulo simple.

- Se considera por un lado la fórmula de *de Moivre*, y se tiene que

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha$$

- Por otra parte, se desarrolla el cubo mediante el binomio de Newton:

$$\begin{aligned}
(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^3 = & \binom{3}{0} \cos^3 \alpha + \binom{3}{1} \cos^2 \alpha \cdot i \operatorname{sen} \alpha + \\
& + \binom{3}{2} \cos \alpha \cdot i^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \binom{3}{3} i^3 \operatorname{sen}^3 \alpha = \\
& = cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + i \left(3 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha \right)
\end{aligned}$$

- Finalmente, se igualan por un lado la parte real y por otro las imaginaria de los pasos anteriores, llegándose a las expresiones buscadas:
  - Parte real:

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$$

  - Parte imaginaria:

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha$$

Sol. Ej. 8. Sol.: $x^3 + 13x^2 + 59x + 87 = 0$

Sol. Ej. 9. Sol.: $x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 160x + 464 = 0$

Sol. Ej. 10. De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra, la ecuación debe tener exactamente 6 soluciones complejas.

$$x^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -1 + 0i \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{-1+0i}$$

Para calcular dicha raíz, se emplea aquí la fórmula de de Moivre. Para ello, se convierte el complejo $z = 1 + 0i$ a su forma trigonométrica, resultando:

$$z = 1 + 0i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \\ \alpha = \pi - \arctan \frac{0}{1} = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow z = \cos(\pi + 2k\pi) + i \,\mathrm{sen}(\pi + 2k\pi)$$

Así, las soluciones de la ecuación vendrán dadas por:

$$\sqrt[6]{z} = \cos\left(\frac{1}{6}(\pi + 2k\pi)\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{6}(\pi + 2k\pi)\right), \quad k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

dando valores a k:

- $k = 0: \quad x_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $k = 1: \quad x_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$
- $k = 2: \quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $k = 3: \quad x_4 = \cos\frac{7\pi}{6} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6} = \cos\frac{-5\pi}{6} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{-5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
- $k = 4: \quad x_5 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{-\pi}{2} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{2} = -i$
- $k = 5: \quad x_6 = \cos\frac{11\pi}{6} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{-\pi}{6} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Se representan dichas soluciones sobre el plano complejo en la Figura 1.

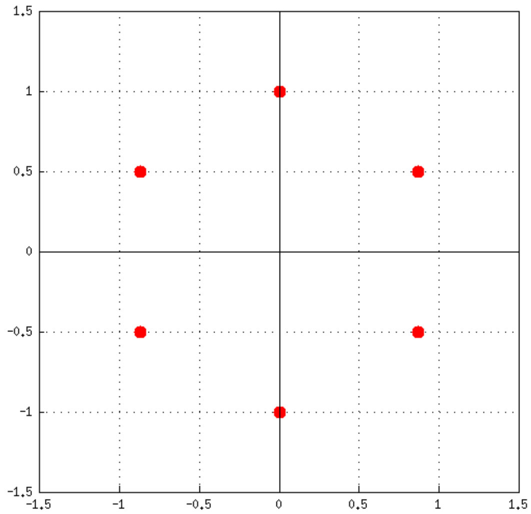

Figura 1: Los afijos de las soluciones de $x^6 + 1 = 0$ son los vértices de un hexágono regular sobre el plano complejo.

Sol. Ej. 11. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, la ecuación debe tener exactamente siete soluciones en $\mathbb{C}$. Sacando la x como factor común se obtiene la primera raíz real $x_1 = 0$

$$x^7 - 9x^4 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^6 - 9x^3 + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 = 0 + 0i \\ x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \end{cases}$$

La ecuación bicuadrada permite su resolución mediante el cambio de variable $x = t^3$, que da lugar a la ecuación de segundo grado $t^2 - 9t + 8 = 0$, con raíces reales $t = 8$ y $t = 1$. Deshaciendo el cambio, se obtienen las ecuaciones $x^3 = 8$ y $x^3 = 1$, a partir de las cuales obtenemos el resto de soluciones:

$$x^3 = 8 + 0i = 8_{0+2k\pi} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8_{0+2k\pi}} = 2_{\frac{0+2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2$$

- $k = 0: \quad x_2 = 2_0 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2 + 0i$
- $k = 1: \quad x_3 = 2_{\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}) = -1 + \sqrt{3}i$
- $k = 2: \quad x_4 = 2_{\frac{4\pi}{3}} = 2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}) = -1 - \sqrt{3}i$

Sol. Ej. 12. En forma polar tenemos que $z^3 = 8_{\frac{\pi}{2}}$. Por lo tanto:

$$|z| = \sqrt[3]{8} = 2$$

En cuanto al argumento, $Arg(z^3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Por lo tanto:

El número se presenta en su forma trigonómetrica $r\,(cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$, siendo por lo tanto inmediato identificar su módulo r y argumento α. Además, sabemos que z^n viene dado en forma trigonómetrica por $r^n\,(cos\ n\alpha + i \cdot sen\ n\alpha)$

$$Arg(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$$

Dando valores a k, obtenemos las soluciones,

Para pasar de la forma polar a la binómica, nótese el paso intermedio en forma trigonométrica

- $k = 0;\ \alpha = \frac{\pi}{6} \to z = 2_{\frac{\pi}{6}} = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sen\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$
- $k = 1;\ \alpha = \frac{5\pi}{6} \to z = 2_{\frac{5\pi}{6}} = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot sen\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$
- $k = 2;\ \alpha = \frac{3\pi}{2} \to z = 2_{\frac{3\pi}{2}} = 2\left(cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot sen\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$

Sol. Ej. 13. Operando, se obtiene:

Tomando $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$w = \frac{z-1-i}{z+1+i} = \frac{x-1+i(y-1)}{x+1+i(y+1)} = \frac{(x-1+i(y-1))\,(x+1-i(y+1))}{(x+1)^2+(y+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2+i(2y-2x)}{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

Por lo tanto, $w \in \mathbb{R}$ si, y sólo si $y = x \neq -1$, es decir, z está en la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero y $z \neq (-1-i)$

Hay que tener en cuenta que -1 anula el denominador, y por lo tanto debe excluirse de la solución

---

Sol. Ej. 14. Operando, tenemos que:

$$z = \frac{3b-2ai}{4-3i} = \frac{(3b-2ai)\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)}$$
$$= \frac{12b+9bi-8ai-6ai^2}{16+12i-12i-9i^2} = \frac{12b+6a}{25} + \frac{9b-8a}{25}i$$

Si $z \in \mathbb{R} \Rightarrow Im(z) = 0$, y por lo tanto:

$$\frac{9b-8a}{25} = 0 \Rightarrow 9b - 8a = 0 \Rightarrow b = \frac{8a}{9}$$

Además, si $|z| = 1$, entonces debe verificarse que:

$$\sqrt{\left(\frac{12b+6a}{25}\right)^2 + \left(\frac{9b-8a}{25}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{12b+6a}{25} = 1 \Rightarrow 12\frac{8a}{9} + 6a = 25 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Sol. Ej. 15. Se aplica la definición de las potencias de base y exponente complejo

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, se define $z^w = e^{w \log z}$
Se escribe i en su forma exponencial $re^{i\alpha}$ como $1e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$. Posteriormente, se aplican propiedades de los logaritmos.

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i \log 1e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}} = e^{i\left[\log 1 + i\left(\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cdot \log e\right)\right]} = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$

, quedando demostrado que $i^i \in \mathbb{R}$

Sol. Ej. 16. Resulta conveniente convertir z a su forma polar:

$$z = 1 + i \to r_\alpha \begin{cases} r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \arctan \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$$

A continuación se calculan los diferentes términos de la ecuación:

- $z^4 = (\sqrt{2})^4_{\frac{4\pi}{4}} = 4_\pi = 4(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = -4$
- $z^3 = (\sqrt{2})^3_{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2+2i$
- $z^2 = (\sqrt{2})^2_{\frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{\pi}{2}} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} i) = 2i$

Sustituyendo en la ecuación del enunciado:

$$\begin{aligned} 0 &= z^4 + 2z^3 + 3z^2 + az + b \\ &= -4 + 2(-2+2i) + 3\cdot 2i + a(1+i) + b \\ &= -8 + a + b + (10+a)i \to \begin{cases} a+b = 8 \\ a = -10 \Rightarrow b = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es: $a = -10, b = 18$.

Sol. Ej. 17. Dado $z = i$, se pretende hallar $\sqrt[4]{i}$. Se calcula en primer lugar el módulo y argumento del radicando z:

$$z = 0 + i \to \begin{cases} r = \sqrt{0^2+1^2} = 1 \\ \alpha = \arctan\frac{1}{0} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En forma trigonométrica: $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$. Por lo tanto, para calcular las raíces cuartas, se tiene que

$$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)\right], \quad k = 0,1,2,3$$

- Para $k = 0$:

$$\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}$$

- Para $k = 1$:

$$\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\right) = \cos\frac{5\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{8}$$

- Para $k = 2$:

$$\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right)\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right)\right) = \cos\frac{9\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{8}$$

- Para $k = 3$:

$$\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+6\pi\right)\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+6\pi\right)\right) = \cos\frac{13\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{8}$$

Se representa gráficamente la solución en la Figura 2.

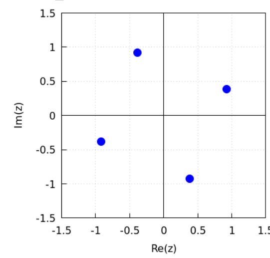

Figura 2: Representación gráfica de la solución, que forma un cuadrado en el plano complejo.

Sol. Ej. 18. Para resolver este ejercicio aquí se emplea la forma exponencial $z = re^{\alpha i}$. Resulta inmediato ver que el conjugado en dicha forma se expresa como $\bar{z} = re^{-\alpha i}$. Por lo tanto:

$$(re^{\alpha i})^2 = re^{-\alpha i} \rightarrow r^2 e^{2\alpha i} = re^{-\alpha i}$$

, y por lo tanto:

$$\frac{r^2 e^{2\alpha i}}{re^{-\alpha i}} = \frac{re^{-\alpha i}}{re^{-\alpha i}}$$

Nótese que con el fin de despejar la expresión, basta con dividir ambos términos de la igualdad por $re^{-\alpha i}$

, que despejando:

$$re^{3\alpha i} = 1 \Rightarrow re^{3\alpha i} = 1e^{(0+2k\pi)i} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dando valores a k, obtenemos:

- $k = 0;\ \alpha = 0 \rightarrow z = 1(cos(0) + i\cdot sen(0)) = 1 + 0i$
- $k = 1;\ \alpha = \frac{2\pi}{3} \rightarrow z = 1(cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot sen\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $k = 2;\ \alpha = \frac{4\pi}{3} \rightarrow z = 1(cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot sen\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Sol. Ej. 19.

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0 \to t^2 - 9t + 8 = 0 \to \begin{cases} t = 8 \\ t = 1 \end{cases}$$

Se aplica el cambio de variable $z^3 = t$

Tomando la primera solución $z^3 = 8$, la escribimos en forma trigonométrica $z = \sqrt[3]{8} = 2\left(cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right)$.

Dando valores a k:

- $k = 0 \to z = 2\left(cos\left(0\right) + i \cdot sen\left(0\right)\right) = 2 + 0i$
- $k = 1 \to z = 2\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + \sqrt{3}i$
- $k = 2 \to z = 2\left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i$

Otras soluciones se obtienen de $z^3 = 1$, que en forma trigonométrica queda como $z = 1\left(cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right)$, que procediendo de forma análoga:

- $k = 0 \to z = 1\left(cos\left(0\right) + i \cdot sen\left(0\right)\right) = 1 + 0i$
- $k = 1 \to z = 1\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $k = 2 \to z = 1\left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Se muestra el resultado gráficamente en la figura 3.

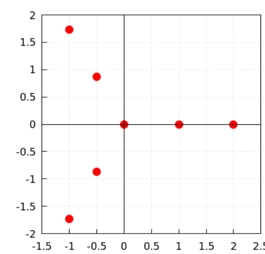

Figura 3: Representación gráfica de los puntos solución sobre el plano complejo

---

Sol. Ej. 20. Tomando $z = a + bi$, se tiene que $\overline{z} = a - bi$ y $\overline{z}^2 = a^2 - b^2 - 2abi$. Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación inicial:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2abi + 2a^2 - 2b^2 - 4abi + a + bi - a + bi + 9 &= 0 \\ 3a^2 - 3b^2 - 2abi + 2bi + 9 &= 0 \\ 3a^2 - 3b^2 + 2b(1-a)i &= -9 + 0i \end{aligned}$$

Igualando parte real y parte imaginaria a partir de la última expresión:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^2 - 3b^2 = -9 \Rightarrow a^2 - b^2 = -3 \\ 2b(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Si $b = 0 \Rightarrow a^2 = -3$. En este caso no existe solución, ya que los términos a y b deben ser números reales.
- Si $a = 1 \Rightarrow 1 - b^2 = 3 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$

Por lo tanto, la solución es doble, $z_1 = 1+2i$ y su conjugado, $z_2 = \overline{z_1} = 1-2i$.

Sol. Ej. 21. Como se ha visto, los afijos del hexágono en este caso serán las raíces sextas de otro complejo z. En este caso, una de dichas raíces viene dado por el afijo del complejo $1_{\frac{\pi}{2}}$, que en coordenadas cartesianas se corresponde con el punto $P(1,0)$.

Por lo tanto, preservando la forma polar, haremos $z = (1_{\frac{\pi}{2}})^6 = 1^6_{6\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1_{3\pi} = 1_{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$. Se calculan todas las soluciones de $\sqrt[6]{z}$:

$$\sqrt[6]{z} = 1_{\frac{\pi+2k\pi}{6}}$$

A continuación, dando valores a k se obtienen las 6 soluciones en forma polar:

Se aplica la fórmula de la raíz enésima de un complejo en forma polar $z = r_n$, por la cual $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}_{\frac{1}{n}\cdot\alpha}$ con $n = 0,1,\dots,n$ $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha = \frac{\pi+2k\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} k=0: & \alpha = \frac{\pi}{6} & \rightarrow z_1 = 1_{\frac{\pi}{6}} \\ k=1: & \alpha = \frac{\pi}{2} & \rightarrow z_2 = 1_{\frac{\pi}{2}} \\ k=2: & \alpha = \frac{5\pi}{6} & \rightarrow z_3 = 1_{\frac{5\pi}{6}} \\ k=3: & \alpha = \frac{7\pi}{6} & \rightarrow z_4 = 1_{\frac{-5\pi}{6}} \\ k=4: & \alpha = \frac{3\pi}{2} & \rightarrow z_5 = 1_{\frac{-\pi}{2}} \\ k=5: & \alpha = \frac{11\pi}{6} & \rightarrow z_6 = 1_{\frac{-\pi}{6}} \end{cases}$$

Para obtener las coordenadas de los afijos, es conveniente pasar de la forma polar a la forma binómica, empleando para ello la forma trigonométrica:

- $z_1 = 1_{\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $z_2 = 1_{\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = 0 + i = (0,1)$
- $z_3 = 1_{\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6} = -\frac{sqrt3}{2} + \frac{1}{2}i = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $z_4 = 1_{\frac{-5\pi}{6}} = \cos\frac{-5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- $z_5 = 1_{\frac{-\pi}{2}} = \cos\frac{-\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{2} = 0 - i = (0,-1)$
- $z_6 = 1_{\frac{-\pi}{6}} = \cos\frac{-\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Sol. Ej. 22. Sabemos que las raíces n-ésimas de un número complejo se pueden representar como un polígono regular de n lados sobre el plano complejo. En este caso, una de las raíces enésimas viene dado por el punto $(1,0)$, que es el afijo de $z = 1 + 0i$, que podemos representar en forma polar como $z = 1_{0+2k\pi}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, aplicando la fórmula de de Moivre para raíces enésimas, se tiene que:

$$z = 1 + 0i = \cos\left(\frac{1}{3} \cdot (0 + 2k\pi)\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{1}{3} \cdot (0 + 2k\pi)\right) \quad \text{con } k = 0$$

Dando los restantes valores a k, es decir $k = 1$ y $k = 2$, se obtienen las otras dos raíces, cuyos afijos son las coordenadas de la solución:

- Para $k = 1$:

$$\cos\left(\frac{1}{3}(0 + 2 \cdot 1\pi)\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{1}{3}(0 + 2 \cdot 1\pi)\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- Para $k = 2$:

$$\cos\left(\frac{1}{3}(0 + 2 \cdot 2\pi)\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{1}{3}(0 + 2 \cdot 2\pi)\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$