Hoja de Ejercicios - Sucesiones y series numéricas

Ejercicio 1. *Determinar el carácter de la sucesión a_n en función del valor del parámetro a:*

$$a_n = \left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{2n+2} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1+16+81+256+\cdots+n^4}{n^4}\right)$$

Ejercicio 3. *Comprobar razonadamente si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, indicadas a continuación, son equivalentes.*

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n} \qquad b_n = \log(n+1)$$

Ejercicio 4. *Determinar el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}^+$, para que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sean equivalentes:*

$$\{a_n\} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \qquad \{b_n\} = kn^3$$

Ejercicio 5. *Estudiar el carácter de la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$$

Ejercicio 6. *Estudiar el carácter de la serie en función del valor del parámetro a:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n \cdot a^n}$$

Ejercicio 7. *Estudiar el carácter de la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{3^{n-2}}$$

Ejercicio 8. *Demostrar que si $|a| < 1$, la serie es absolutamente convergente:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \log n}{n}$$

Ejercicio 9. *Dada la serie de términos positivos, enunciar y comprobar la condición necesaria de convergencia y estudiar su carácter*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$$

Ejercicio 10. *Estudiar el carácter de la serie aplicando el criterio de comparación por paso al límite:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

Ejercicio 11. *Estudiar razonadamente la convergencia de las series:*

a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ *b.)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 12. *Dada la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n} x^n$$

a. Determinar el radio de convergencia

b. Hallar el intervalo de convergencia

Sol. Ejercicio. 1.

Se procede al cálculo del límite en el infinito:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{2n+2} = \{1^\infty\} \quad \text{(indeterminación)}$$

, que da lugar a una indeterminación del tipo 1^∞. Por lo tanto, se toman logaritmos para su resolución:

$$\log L = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty}(2n+2)\underbrace{\log\left(\frac{n+a}{n+1}\right)}_{\text{Infinitésimo}} \sim \lim_{n\to\infty}(2n+2)\underbrace{\left(\frac{n+a}{n+1}-1\right)}_{\text{Infinitésimo equiv.}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(2n+2)\cdot\frac{n+a-(n+1)}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(a-1)}{n+1} = (a-1)\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n+1} = 2(a-1)$$

Deshaciendo el logaritmo se obtiene el valor del límite:

$$\log L = 2(a-1) \Rightarrow L = e^{2(a-1)}$$

Se deduce por lo tanto que la sucesión será convergente para cualquier valor de a real finito, o bien cuando $a = -\infty$. La serie será divergente con $a = +\infty$.

Sol. Ejercicio. 2.

Para la resolución de este ejercicio se aplicará el criterio de Stolz:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

llamando $a_n = 1 + 16 + \cdots + n^4$ y $b_n = n^4$, y considerando que dicho criterio es de aplicación, ya que la sucesión b_n es monótona divergente. Por lo tanto, se tiene que:

- $a_{n+1} - a_n = (1+16+81+\cdots+n^4+(n+1)^4) - (1+16+81+\cdots+n^4) = (n+1)^4$
- $b_{n+1} - b_n = (n+1)^4 - n^4$

Entonces:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)^4}{(n+1)^4-n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)^4}{(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)-n^4} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)^4}{4n^3+6n^2+4n+1} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{4n^4} = \frac{1}{4}$$

Sol. Ejercicio. 3.

Para la resolución de este ejercicio se aplicará el criterio de Stolz:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

tomando $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ y $b_n = \log(n+1)$, y considerando que dicho criterio es de aplicación, ya que la sucesión b_n es monótona divergente. Por lo tanto, se tiene que:

- $a_n - a_{n-1} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n-1}) = \frac{1}{n}$
- $b_n - b_{n-1} = \log(n+1) - \log(n) = \log \frac{n+1}{n}$

Entonces:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\text{Infinitésimo}}} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\underbrace{1+\frac{1}{n}-1}_{\text{Infinitésimo equivalente}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$$

Dado que el valor del límite es 1, se puede concluir por lo tanto que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones equivalentes.

Sol. Ejercicio. 4.

Se dice que dos sucesiones$\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son equivalentes si se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

En este caso, escribimos dicho límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{kn^3}$$

La expresión del numerador sugiere la conveniencia de aplicar el criterio de Stolz. Para ello, se comprueban las hipótesis de aplicación. En este caso, se verifica que $b_n = kn^3 \ \ , k \in \mathbb{R}^+$ es monótona divergente, y por lo tanto puede aplicarse Stolz:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)}{k\left[(n+1)^3 - n^3\right]} =$$
$$= \frac{1}{k} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3k}$$

Para que ambas sean equivalente, ha de cumplirse que $L = 1$:

$$L = \frac{1}{3k} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Ambas sucesiones serán equivalentes cuando $k = \frac{1}{3}$

Sol. Ejercicio. 5.

Como primer paso, se comprueba la *condición necesaria* de convergencia, por la que una serie será convergente sólo cuando el límite de la sucesión que la origina es cero (no siendo cierto en general el recíproco). En este caso, resulta inmediato comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = 0$$

, por comparación de órdenes de infinitud de la potencial y el factorial.

Se cumple la condición necesaria de convergencia, aunque aún no es posible afirmar que la serie sea convergente. En este caso, dado que se trata de una serie de términos positivos (el numerador está elevado al cuadrado, y el denominado es un factorial), se aplicará alguno de los criterios para este tipo de series. Aplicando el criterio del cociente:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}}{\frac{n^2}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n+1)!}{n^2(n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2(n+2)} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Dado que $\lambda = 0 < 1$, se concluye que la serie es convergente.

Sol. Ejercicio. 6.

En este caso, dado que se trata de una serie de términos positivos, se aplicará alguno de los criterios para este tipo de series. Aplicando el criterio del cociente, se tiene que:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)\cdot a^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{(n\cdot a^n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)^2+1)\cdot(n\cdot a^n)}{(n^2+1)\cdot(n+1)\cdot a^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{n^3+2n+2n^2}{n^3+n^2+n+1} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{n^3}{n^3} = \frac{1}{a}$$

A continuación, se estudia en carácter de la serie en función de los posibles valores de a:

- Si $a > 1$, entonces $\lambda < 1$, y por lo tanto la serie será convergente
- Si $a < 1$, entonces $\lambda > 1$, y por lo tanto la serie será divergente
- Si $a = 1$, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n\cdot a^n} = \infty$, y por lo tanto no cumple la condición necesaria de convergencia, es decir, la serie también será divergente.

Sol. Ejercicio. 7.

Se trata de una serie alternada. Un criterio de utilidad en estos casos puede ser el criterio de Leibniz, por el cual, dada una serie alternada de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, ésta será convergente si se dan dos condiciones de manera simultánea: i) que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y ii), que a_n sea monónotona decreciente. Comprobemos ambas condiciones:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}} = 0$$

El límite es inmediato por comparación de órdenes de infinitud de las funciones exponenciales de numerador (base menor) y denominador (base mayor).

La segunda condición es que a_n sea monótona decreciente. Si es así, debe verificarse lo siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}}{\frac{2^n}{3^{n-2}}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}\cdot 3^{n-2}}{2^n\cdot 3^{n-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < 1$$

Lo cual se cumple para cualquier valor de n, siendo por lo tanto monótona *estrictamente* decreciente.

Por lo tanto, se concluye que la serie es *convergente* de acuerdo con el criterio de Leibniz.

Alternativamente,

podemos considerar el teorema del valor absoluto, por el cual si la serie es absolutamente convergente, entonces es convergente. Para ello, basta considerar la serie en valor absoluto y analizarla recurriendo a alguno de los criterios para series de términos positivos. A modo de ejemplo, aplicamos aquí el criterio de Cauchy (o de la raiz) considerando el valor de $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^{n-2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^{1-\frac{2}{n}}} = \frac{2}{3}$$

Como $L < 1$, se concluye que la serie es *absolutamente* convergente, y por lo tanto, convergente (Fig. 1).

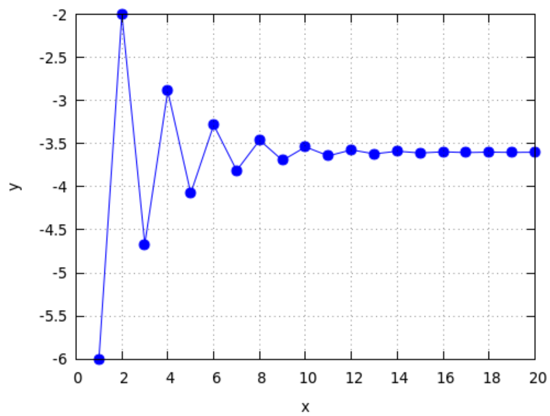

Figura 1: Representación gráfica de las sumas parciales n-ésimas, desde $n = 1$ hasta $n = 20$. Se muestra la convergencia de la serie al valor $-18/5$.

Sol. Ejercicio. 8.

Una serie de términos cualesquiera es absolutamente convergente si la serie de sus valores absolutos es convergente. Por lo tanto, se analiza el carácter de la serie:

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{a^n \log n}{n} \right| \quad \text{considerando} \quad |a| < 1$$

Se aplica a continuación el criterio del cociente para determinar su carácter:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a^{n+1}\log(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{a^n \log n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a \cdot n \log(n+1)}{(n+1)\log n} \right| =$$
$$= |a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\log(n+1)}{\log n} \right| = |a| \cdot 1 \cdot 1 = |a|$$

Por lo tanto, queda demostrado mediante el criterio del cociente que si $|a| < 1$, entonces $\lambda < 1$ y por lo tanto la serie converge.

Sol. Ejercicio. 9.

La condición necesaria de convergencia dice que, dada la serie $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si ésta es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Se trata de una condición necesaria pero no suficiente. En este caso, resulta de utilidad la aplicación de la Fórmula de Stirling para trabajar con el factorial:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow L \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{3^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n} e^n}{\cancel{n^n} 3^n \sqrt{2\pi n}} = 0$$

(por comparación del orden de los infinitos de numerador y denominador, ya que $e < 3$). Por lo que cumple la condición necesaria de convergencia. Aún no puede asegurarse que la función sea convergente.

En este caso, para determinar el carácter de la serie aplicaremos el criterio del cociente. Así:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n\cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n \cdot n!}{3^{n+1}\cdot n^n \cdot (n+1)!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow [1^\infty]$$

Se llega en este punto a una indeterminación del tipo 1^∞, para la cual tomaremos logaritmos. Se aplica después el infinitésimo equivalente $\log(a_n) \sim a_n - 1$ cuando $a_n \to 1$.

$$\lambda = \frac{1}{3}\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\} \sim \frac{1}{3}\exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\right\} =$$
$$= \frac{1}{3}\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\right\} = \frac{e}{3}$$

Siguiendo con el criterio del cociente, dado que $\lambda < 1$ podemos concluir que la serie es convergente.

Sol. Ejercicio. 10. Como primer paso, analizamos la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \log(1) = 0$$

No puede descartarse por lo tanto la convergencia de la serie. Aplicamos por lo tanto el criterio de comparación por paso al límite, tal y como se pide en el enunciado. En este caso, tomemos por ejemplo la serie armónica, que como sabemos es divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \Leftrightarrow b_n = \frac{1}{n}$$

En aplicación de la fórmula de paso al límite, desarrollamos la expresión para determinar el valor de L:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{2n}{2n+1}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \left(\log \underbrace{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)}_{a_n\to 1} \right) \sim \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{2n}{2n+1} - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+1} = \frac{-1}{2}$$

Como L es un número real finito diferente de cero, podemos afirmar que el caracter de la serie a_n y b_n es el mismo, y por lo tanto la serie a_n es divergente.

Sol. Ejercicio. 11. a.) Dado que se trata de una serie de términos positivos (la x se encuentra elevada al cuadrado), se aplica uno de los criterios conocidos para este tipo de series. En este caso se utiliza el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot (2n)! \cdot x^2}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2 \cdot (2n)! \cdot x^2}{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \cdot x^2$$

Por lo tanto,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \cdot x^2 = \frac{x^2}{4}$$

La serie sólo será convergente para valores de $\lambda < 1$, esto es:

$$\frac{x^2}{4} < 1 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2$$

Así, la serie será divergente para $\forall x \notin (-2, 2)$

Queda por dilucidar el comportamiento de la serie para $x = \pm 2$. En este caso $\lambda = 1$ y el criterio del cociente no decide. Sin embargo, puede demostrarse que el término $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es mayor que 1 para cualquier valor de n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\text{con } x = \pm 2) = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 4n^2+8n+4 &> 4n^2+6n+2 \\ 2n &> -2 \\ n &> -1 \end{aligned}$$

lo cual se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto la serie diverge.

Alternativamente, se puede recurrir en estos casos al criterio de Raabe:

$$L = \lim_{n-\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\left(n^2+2n+1\right)x^2}{4n^2+6n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2}{4n^2} = \frac{-1}{2}$$

Al ser $L < 1$, se concluye que la serie es divergente para $x = \pm 2$.

b.) Se trata de una serie alternada. Por lo tanto, aplicaremos el criterio de Leibniz. Comprobamos las condiciones del Teorema de Leibniz:

Primero, el límite de la sucesión a_n (prescindiendo de la alternancia de signo) ha de ser cero:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$$

por comparación de órdenes de infinitud del numerador (potencial orden 1) y denominador (potencial de orden 2).

Segundo, la sucesión a_n ha de ser decreciente. En este caso, se cumple esta segunda condición, por ser un cociente de dos polinomios positivos, siendo el del denominador de mayor grado que el del numerador. Así, siendo decreciente, se considera la siguiente desigualdad:

$$\frac{n}{n^2+1} \quad > \quad \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

Que demostramos operando sobre la misma:

$$\begin{aligned} n\left[(n+1)^2+1\right] &> (n+1)(n^2+1) \\ n^3+2n^2+n+1 &> n^3+n^2+n+1 \\ 2n^2 &> n^2 \\ 2 &> 1 \end{aligned}$$

Dado que se cumplen ambas condiciones, se puede concluir por el Teorema de Leibniz que la serie es convergente. Cabe recordar que el criterio de Leibniz proporciona una condición suficiente (pero no necesaria) de convergencia.

Sol. Ejercicio. 12. a. Se estudia la convergencia absoluta de la serie empleando el criterio de d'Alembert:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)^3 \cdot x^{n+1}}{4^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n^3 \cdot x^n}{4^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|4^n \cdot (n+1)^3 \cdot x^{n+1}\right|}{\left|4^{n+1} \cdot n^3 \cdot x^n\right|} =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{4 \cdot n^3} = \frac{|x|}{4}$$

Para que la serie sea convergente de acuerdo con el criterio del cociente, el valor de L debe ser menor que uno:

$$\frac{|x|}{4} < 1 \Leftrightarrow |x| < 4$$

Siendo por lo tanto el radio de convergencia $R = 4$

b. Para calcular el intervalo de convergencia habrá que estudiar el carácter de la serie en los extremos del intervalo, $x = -4$ y $x = 4$. En este caso, basta con analizar la condición necesaria de convergencia:

Para $x = -4$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot (-4)^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n n^3 \quad \text{(no existe el límite, serie oscilante)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot 4^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty \quad \text{(serie divergente)}$$

Por lo tanto, la serie será convergente dentro del intervalo $I = (-4, 4)$.
